

CALCUL DANS $\mathbb{R}$

Exercice 0.1 Après un calcul rapide :

1. Compléter par une croix si le nombre est un élément de l'ensemble en suivant l'exemple de la première colonne.

-17	$\sqrt{(-6)^2}$	$\frac{39}{0,0003}$	$\sqrt[3]{64}$	$\frac{-22}{7}$	$(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})$	$\frac{1}{3}$	-2,57349	Ensemble
×								$\mathbb{Q}$
×								$\mathbb{Z}$
								$\mathbb{N}$
×								$\mathbb{R}$
×								$\mathbb{D}$

2. Remplacer les pointillés par $\in$ ou $\notin$

$$(-5)^2 \dots \mathbb{N} ; -\sqrt{25} \dots \mathbb{Z} ; -\left(-\frac{18}{2}\right) \dots \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{(-7)^2} \dots \mathbb{N} ; \sqrt{0,49} \dots \mathbb{Q} ; -0,07 \times 10^2 \dots \mathbb{Z}$$

$$-2^2 \dots \mathbb{N} ; \sqrt{\frac{4}{0,09}} \dots \mathbb{Q} ; 3 \times 10^2 \dots \mathbb{R}$$

$$0,65 \dots \mathbb{D} ; \frac{0,030}{0,020} \dots \mathbb{D} ; -\frac{3,6}{10^{-3}} \dots \mathbb{D}$$

$$\frac{\pi}{5} \dots \mathbb{Q}$$

3. Soit l'ensemble

$$A = \left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \right)^4 ; 0,00007 \times 10^8 ; (5 - 3\sqrt{2})(5 + 3\sqrt{2}) ; \sin 30^\circ ; \left(1 - \frac{1}{2} \right)^2 ; \tan 50\text{grs} ; \sqrt{(-2)^4} \right\}$$

Déterminer les ensembles :

$$A \cap \mathbb{Q} ; A \cap \mathbb{N} ; A \cap \mathbb{D} ; A \cap \mathbb{Z}.$$

4. Résoudre dans $\mathbb{N}$, dans $\mathbb{Z}$, dans $\mathbb{Q}$, dans $\mathbb{D}$ et dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $3x + 2 = 0$; b) $2x - 4 = 0$; c) $10^3x + 2 = 5$; d) $2x - \sqrt[3]{2} = \pi$.

5. Déterminer l'entier naturel n tel que :

$$9^{3n} = 3^{12} ; 2^{n+4} = 64 ; 7^{4-n} = 1 ; 25 \times 5^n = 125 ; \frac{13^{n-4}}{13} = 169$$

Exercice 0.2

1. Calculer en simplifiant les expressions suivantes :

$$A = \frac{2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{12}}{5 - \frac{1}{4} - \frac{2}{9}} \div \frac{7 - \frac{1}{3}}{5} ; B = \frac{3}{\frac{5}{2}} - \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} + \frac{2}{\frac{1}{3} - \frac{3}{8}} - \frac{7 + \frac{1}{3}}{5} ;$$

$$C = \frac{9 - \frac{1}{3} + \frac{5}{6} - \frac{25}{4}}{2 + \frac{1}{6} + \frac{5}{12}} \times \frac{3 - \frac{2}{5}}{\frac{5}{3} - 1} ; D = \frac{5}{6} - \frac{7}{3} + \frac{1}{12} - \frac{1}{30} + \frac{13}{5} - 2 ;$$

$$E = -27 \times \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^4 \times \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^2 ; H = \frac{2 + \frac{5}{6}}{2 - \frac{5}{6}} \div \frac{-\frac{3}{5} + \frac{5}{3}}{\frac{3}{5} - \frac{2}{3}} \times \frac{\frac{4}{5} - \frac{3}{4}}{\frac{4}{3} + \frac{5}{4}}$$

$$I = 1 - \frac{\frac{1}{2} + 3}{\frac{1}{3} - 2} ; J = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}{2} \div \frac{2}{1 - \frac{1}{3}} ; K = \frac{3}{7} - \frac{1}{2} + \frac{5}{4} + \frac{1}{8} + \frac{2}{16} ;$$

2. i) Trouver l'écriture décimale illimitée des fractions suivantes sans utiliser une calculatrice :

$$\frac{45}{37} ; \frac{124}{9} ; \frac{71}{9} ; \frac{1926}{99} ; \frac{3578}{999} ; \frac{78210}{999}.$$

- ii) Écrire sous forme de fraction irréductible :

- $a = -17, \underline{321} \dots; b = 3, \underline{857} \dots; c = -2, \underline{5135} \dots;$
 $d = 2, \underline{451} \dots + 3, \underline{153} \dots; e = 2, \underline{451} \dots \times 4, \underline{0153} \dots;$
 $f = 3(0, \underline{7} \dots) + 2(-1, \underline{6} \dots) + \frac{5}{3}$
 iii) On donne $a = 4, \underline{27} \dots$ et $b = -0, \underline{3} \dots$; calculer : $c = a - b$ et $d = c - b$.
 iv) On donne les nombres
 $X = 0, \underline{23} \dots; Y = -3, \underline{15} \dots; Z = -12, \underline{54} \dots$.
 Calculer $X + Y; Y - X; Z + 2$.

Exercice 0.3

Calculer en simplifiant les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{0,081 \times 0,36 \times 2560}{0,144 \times 2,16 \times 64}; & E &= \frac{16^{-8} \times 24^3 \times 27^4 \times 4^5}{1024 \times 81^3 \times 48^{-2}}; \\
 F &= \frac{0,0000045 \times 3,3 \times 0,0009}{0,00000015 \times 0,3 \times 0,011 \times 3^2}; \\
 G &= \frac{(x^2 y^3)^3 (z^2)^2 \times y^5}{y^8 \times (xy)^5 \times z^3} \text{ pour } x = 2 \times 10^{-4}; y = 0,000001 \text{ et } z = 2 \times 10^{-3}; \\
 I &= \frac{(3^4 \times 2^{-3})^3}{(9^{-1} \times 2^2)^4} \\
 A &= \frac{(0,9)^2 \times (1,25)^2 \times (4,9)^3 \times (0,0001)^2}{(0,3)^5 \times (0,5)^6 \times (0,7)^3}; & B &= \frac{x^{\frac{2}{3}} \times y^{\frac{1}{4}} \times z^3}{x^{-\frac{1}{3}} \times y^{-\frac{3}{4}} \times z^2} \times \frac{z^{-1}}{xy} \times \frac{\sqrt{3}}{2}; \\
 C &= \frac{(0,14)^2 \times (1,21)^2}{(0,55)^3 \times 0,49};
 \end{aligned}$$

Exercice 0.4

1. Calculer sans calculatrice :

$$\sqrt{\frac{25}{36}}; \sqrt{0,04}; \sqrt[4]{625}; \sqrt[3]{0,001}; \sqrt[5]{-32}; \sqrt[3]{-2187}$$

2. Rendre rationnel le dénominateur des réels suivants :

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{2}{\sqrt{6}}; & B &= \frac{2}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}; & C &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6} + 1}; \\
 D &= \frac{5}{3\sqrt{2} - 3}; & E &= \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{5} + 5\sqrt{3}}; \\
 F &= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}; & G &= \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

3. Calculer en simplifiant les expressions suivantes :

$$Z = \frac{2 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{2}} + \frac{2 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{6}}{7}; \quad R = \frac{\sqrt{20} + \sqrt{45} - \sqrt{80}}{\sqrt{135} - \sqrt{15}}; \quad P = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$$

$$S = \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} \times \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}} \times \frac{3 + 2\sqrt{2}}{2}; \quad K = \frac{\sqrt{0,8^6 \times 3^2}}{0,5^2 \times 0,2^3}; \quad X = \sqrt[6]{729} + \sqrt[4]{625} + \sqrt[3]{512}$$

$$V = \sqrt{54} - \sqrt{24} + \sqrt{150}; \quad N = \sqrt{20} - 2\sqrt{125} + \sqrt{180}; \quad M = 3\sqrt{5} - 4\sqrt{20} + 5\sqrt{45} - 3\sqrt{80}; \\
 L = 2\sqrt{40} - 2\sqrt{90} + \sqrt{4000} - 5\sqrt{10}$$

4. Soit $H = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$ et $I = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} - \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$

(a) Calculer H^2, I^2

(b) En déduire les valeurs de H et I .

(c) Simplifier les expressions : $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$ et $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} - \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$

Exercice 0.5

1. En utilisant le triangle de Pascal, développer les expressions suivantes :

$$\begin{array}{llll}
(1 - \sqrt{3})^2; & (-2x + 1)^2; & 3(\sqrt{3} - 2)^2; & 4(-1 + \sqrt{3})^2 \\
(5 - x)^3; & (3x + 1)^3; & (5 + x)^5; & (\sqrt{2} - \sqrt{3})^4; \\
\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}x\right)^5; & (2 - \sqrt{3})^3; & \left(3 + \frac{x}{2}\right)^3; & (2 - \sqrt{3} + \sqrt{5})^2; \\
(\sqrt{2} - 3x)^5; & (\sqrt{2}x + 7)^5; & (\sqrt{5} + 2\sqrt{2} + \sqrt{3})^2; & (1 + x)^7; \\
\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3; & (2 - x + y)^2; & (1 - x + \sqrt{2})^2; & -(3x - 1)^2 + 7\left(5x + \frac{1}{2}\right)^3
\end{array}$$

2. En utilisant les identités, montrer que :

a) $(100 + 1)^3 = 1\,030\,301$; b) $(100 - 2)^3 = 941\,192$

Vérifier ces résultats en calculant 101^3 et 98^3 à la machine.

3. Factoriser les expressions suivantes :

$$U = x^2 - 6x + 9;$$

$$A = 512x^3 + 216y^3$$

$$C = (3x - 1)^2 - (5x + \frac{1}{2})^2;$$

$$E = \frac{1}{7\sqrt{7}} - x^3;$$

$$G = 5\sqrt{5} + x^3$$

$$I = 8x^3 + \frac{125}{64};$$

$$W = 16x^2 + 8xy - 4xz - 2yz$$

$$J = \left(\frac{\sqrt{5}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{\sqrt{5}}{6}x - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2$$

$$K = -(3x - 6) + 5(2 - x)^2 + \frac{5}{2}x(8 - 4x)(x + 1) - \frac{1}{3}(2 - x)$$

$$V = 25x^2 + 10x + 1;$$

$$B = x^3 - 1 + 5(x - 1)^3 - 2x(1 - x);$$

$$D = 2\sqrt{2} - 125x^3;$$

$$F = x^3 - 27;$$

$$H = \frac{1}{27} - \frac{7\sqrt{7}}{8}x^3;$$

$$Q = x^2 - 25 - 7(3x + 15)(x - 2);$$

$$L = xy - x + y - 1$$

Exercice 0.6

Deux capitaux ont pour somme 18 000F et pour rapport $\frac{18}{27}$. Quels sont ces deux capitaux C_1 et C_2 ?

Même question lorsque ces deux capitaux diffèrent de 25 000F et ont pour rapport $\frac{9}{4}$.

Déterminer les dimensions d'un terrain rectangulaire dont la longueur et la largeur sont proportionnelles aux nombres 7 et 4 et sachant que le terrain mesure 220 m de périmètre.

On veut partager une somme d'argent en deux parts inversement proportionnelle à 6 et 11. La première part diminue de 6 400 000 FCFA. Quelle est la somme que l'on partage.

Déterminer les réels x , y et z dans les systèmes suivants :

$$a) \begin{cases} \frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{z}{13} \\ 3x + 4y - 2z = 5100 \end{cases} \quad b) \begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{7} \\ x + y + z = 70\,000 \end{cases}$$

Exercice 0.7

1. Écrire les intervalles suivants sous forme d'ensembles :

$$I =]-83; 72]; \quad J = [-22; \frac{112}{3}]; \quad K =]-\infty; 0[; \quad L = [-9; +\infty[$$

2. Déterminer $I \cap J$; $I \cap K$; $J \cap L$; $I \cap (]-\infty; 2[\cup [7; 23])$;

$$I \cap K \cap L; ([0; \frac{17}{3} \cup]-16; -2]) \cap J; \quad J \cap L \cap K$$

3. Déterminer $I \cup J$; $I \cup K$; $I \cup L$; $I \cup J \cup K$; $L \cup I \cup]-4; +\infty[$

Exercice 0.8

Écrire les ensembles suivants sous forme d'intervalles :

$$\mathbb{R}; \quad \mathbb{R}^*; \quad \mathbb{R}^* - \{2; \pi\}; \quad \mathbb{R}_+^*; \quad \mathbb{R}_-^*; \quad A = \{x \in \mathbb{R}^*; -3 \leq x < 11\};$$

$$B = \{x \in \mathbb{R}_+^*; x > -15 \text{ et } x \neq 2\}; \quad C = \{x \in \mathbb{R}; x \geq -27; x \leq \frac{56}{3} \text{ et } x \neq 1\};$$

$$D = \{x \in \mathbb{R}^*; -\frac{5}{2} \leq x < \frac{7}{2}\}; \quad E = \{x \in \mathbb{R}; |x - 2| \leq 6\}; \quad F = \{x \in \mathbb{R}^*; |x| < 1\}$$

Exercice 0.9

On donne les ensembles

$$X =]-3, 5; \frac{32}{3}] \cap \mathbb{N}; \quad Y = [-\frac{3}{2}; 7[\cap \mathbb{Z}; \quad K = \{x \in \mathbb{N}^*; 2x - 7 < 13\};$$

$$L = \{x \in \mathbb{Z}; 4 < x \leq 25\}$$

1. Définir : X ; Y ; K et L par extension
2. Déterminer : $\min(X)$; $\min(Y)$; $\min(K)$; $\min(L)$; $\max(X)$; $\max(Y)$; $\max(K)$; $\max(L)$; $\min(X \cup Y)$; $\max(Y \cap K)$

Pourcentage

Exercice 0.10

1. Dans une classe de 10^{ème} CT de 35 élèves, il y a 14 garçons. Calculer le pourcentage de garçons dans la classe
2. Sur les 300 élèves que compte un établissement, 12% sont des élèves de 11^{ème} SES. Dans cette classe de 10^{ème} CT, un quart des élèves étudient l'allemand. Quel est le nombre d'élèves de 10^{ème} CT et le nombre de ceux-ci qui étudient l'allemand ?
3. Dans un groupe de touristes, il y a 35 touristes belges qui représente 14% du groupe. Quel est le nombre total de touristes dans ce groupe ?

Exercice 0.11

1. La population d'une ville passe de 56 000 à 91 000 habitants pendant un certain temps. Quel est le pourcentage d'augmentation de la population ? Calculer le coefficient multiplicateur.
2. Le prix d'un téléviseur de 156000 F a été soldé à 136500 F. Quel est le pourcentage de réduction. Calculer le coefficient multiplicateur.
3. La fréquentation d'un musée subit une augmentation de 18% de 2000 à 2007. En 2000, 110 000 personnes ont visité le musée. Quel est le nombre de visiteurs en 2007 ?

Exercice 0.12

1. Calculer le pourcentage d'augmentation d'une quantité donnée sachant que le coefficient multiplicateur est 1,03.
2. Calculer le pourcentage de réduction d'une quantité donnée sachant que le coefficient multiplicateur est 0,92.
3. Un prix subit une augmentation de 10% suivi d'une réduction de 10%. Quelle est l'évolution globale ?

Exercice 0.13

Un article coutant 3400 F subit une baisse de 3, 5% puis quelque mois plus tard une hausse de 3, 5%.

1. Quel est alors son prix ?
2. Quelle constat faites vous ?

Exercice 0.14

1. Dans une classe de 50 élèves, 15 sont des filles. Quel pourcentage de l'effectif cela représente t-il ? En déduire celui des garçons.
2. Dans une ville A de 800 000 habitants, 65% sont des jeunes. Quel effectif cela représente t-il ?
3. Dans une ville B, 30% de la population représente une effectif de 150 000 habitants. Calculer effectif total de la population.

Exercice 0.15

Un capital de 400 000F, placé dans une banque de la place augmente annuellement de 6, 5%.

1. Calculer l'augmentation un an après le dépôt.
2. Calculer le montant total obtenu un an après le dépôt.
3. Vérifier ce résultat en utilisant le coefficient multiplicateur.

Exercice 0.16

Une voiture achetée à 6 000 000F est revendue avec une remise de 2,5%.

1. Calculer le montant de la remise.
2. Calculer le prix de vente de la voiture.
3. Vérifier ce résultat en utilisant le coefficient multiplicateur.

Exercice 0.17

Dans un lycée de 850 élèves 46% sont des filles. On a constaté que dans ce lycée 32% des filles suivent des études scientifiques.

Calculer l'effectif des filles faisant des études scientifiques.

Dans une classe 10^{ème} CT, 30% des élèves de cette classe pratiquent un sport. Parmi eux, 20% pratiquent le football, 50% le tennis et 10% pratiquent les deux.

Calculer le pourcentage d'élèves en football et celui en tennis uniquement.

Exercice 0.18

En appliquant la définition, écrire sans le symbole de la valeur absolue les expressions suivantes :

$$|-2,5|; \quad |(-3)^5|; \quad \left| \frac{\pi-1}{\sqrt{3}-2} \right|; \quad \left| \frac{1-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}{1-\frac{7}{12}} \right|; \quad \left| \frac{1-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \right|; \quad |4x-3|; \quad |-2x+6|$$

Exercice 0.19

1. Déterminer l'amplitude A , le centre C et le rayon C des intervalles :

$$I = \left[-\frac{2}{3}; \frac{7}{11} \right]; \quad J = \left] \frac{5}{2}; \frac{15}{2} \right[$$

$$\text{Soit les intervalles } I(1;6) \text{ et } \bar{J} = \left(-\frac{1}{2}; 8 \right)$$

Écrire I ; $\bar{J}$; $I \cap \bar{J}$; $I \cup \bar{J}$ sous forme et d'intervalle puis sous forme d'ensemble.

2. Résolution algébrique

En utilisant la définition, déterminer le réel x dans chaque cas : $4|x-2| = 2$; $-|3x+9|+6 = 0$; $|3x-5| < 8$; $|6-2x| \geq 9$; $|x-2\sqrt{2}| \leq \sqrt{2}$; $|6x-10| = |8-5x|$; $|-3x+1| < 5$.

3. Résolution graphique

Résoudre graphiquement les équations et inéquations suivantes :

$$|x+4| = 2; \quad |3x-9| = 3; \quad |x-3| < 5; \quad |x-8| \geq 2; \quad |12-3x| \leq 9; \quad |4x-20| > 16; \\ |x| = |5-x|; \quad |12-3x| \leq |3x+6|; \quad |6x| \geq |12x+18|$$

Exercice 0.20 Encadrement

1. Sachant que $5,84 \leq x \leq 6,18$ et $1,34 \leq x \leq 2,25$

(a) Donner un encadrement de :

$$x+y; \quad x-y; \quad 2x+3y; \quad \frac{6y}{x}; \quad 3xy.$$

(b) Déterminer un encadrement de : $2(y-1)$; $(x+2)^2$; $-y^2+4$; $2+\frac{1}{x^2+1}$

(c) Après avoir encadré les expressions $(x+y)^2$ et $x^2+2xy+y^2$, faites une comparaison

(d) Sachant que $1,7 \leq x \leq 1,8$. Déterminer un encadrement de :

$$f(x) = 2x-1; \quad g(x) = -3x^2+4; \quad h(x) = \frac{5}{x+2}$$

Exercice 0.21

Rappel : La partie entière d'un nombre réel x notée $E(x)$ est un entier relatif n tel que : $n \leq x < n+1$

1. Déterminer $E(0,745)$; $E(-2,35)$; $E(9)$; $E(\sqrt{3})$; $E\left(\frac{1272}{237}\right)$.

2. Déterminer un encadrement de x dans chaque cas :

$$E(x) = 7; \quad E(2x+1) = -5; \quad E(-x+\frac{3}{2}) = 2$$