

DÉRIVATION (Partie 2)

I. Fonction dérivée d'une fonction polynôme du troisième degré

Soit f une fonction polynôme du troisième degré définie par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1$.

Pour déterminer la fonction dérivée f' , on applique la technique suivante :

$$\begin{array}{c}
 f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1 \\
 \downarrow \\
 f'(x) = 3 \times 2x^2 - 2 \times 3x + 5
 \end{array}$$

Définition : Soit f une fonction polynôme du troisième degré définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

On appelle **fonction dérivée** de f , notée f' , la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Méthode : Déterminer la fonction dérivée d'une fonction polynôme du troisième degré

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

- a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$ b) $g(x) = 5x^3 + 2x^2 + 2x - 7$ c) $h(x) = -2x^3 - 3x^2 - 7x + 8$
 d) $k(x) = -x^3 + x^2 + 1$ e) $l(x) = -4x^3 + 1$ f) $m(x) = -x^3 + 7x$

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$ donc $f'(x) = 3 \times x^2 - 2 \times 3x + 2 = 3x^2 - 6x + 2$

b) $g(x) = 5x^3 + 2x^2 + 2x - 7$ donc $g'(x) = 3 \times 5x^2 + 2 \times 2x + 2 = 15x^2 + 4x + 2$

c) $h(x) = -2x^3 - 3x^2 - 7x + 8$ donc $h'(x) = -2 \times 3 \times x^2 - 2 \times 3x - 7 = -6x^2 - 6x - 7$

d) $k(x) = -x^3 + x^2 + 1$ donc $k'(x) = -3x^2 + 2x = -3x^2 + 2x$

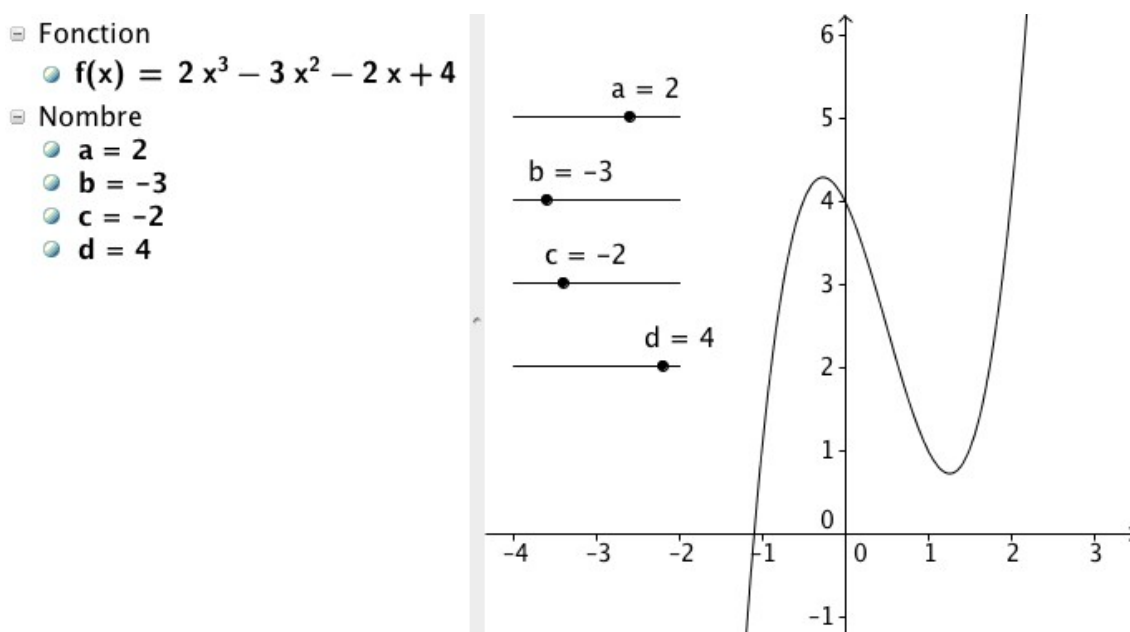
e) $l(x) = -4x^3 + 1$ donc $l'(x) = -3 \times 4x^2 = -12x^2$

f) $m(x) = -x^3 + 7x$ donc $m'(x) = -3x^2 + 7 = -3x^2 + 7$

II. Variations d'une fonction polynôme du troisième degré

1) Observation sur quelques exemples

À l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, on observe les variations de quelques fonctions polynômes du troisième degré.



2) Etude des variations à l'aide de la fonction dérivée

Théorème (rappel) : Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I .

- Si $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I .

- Si $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I .

Méthode : Étudier les variations d'une fonction polynôme du troisième degré

EXEMPLE 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x$.

1) Calculer la fonction dérivée de f .

- 2) Déterminer le signe de f' en fonction de x .
- 3) Dresser le tableau de variations de f .
- 4) À l'aide de la calculatrice, représenter graphiquement la fonction f .

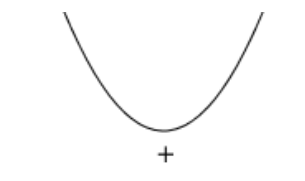
1) Pour tout x réel, on a : $f'(x) = 3x^2 + 4x + 2$.

2) Commençons par résoudre l'équation $f'(x) = 0$:

Le discriminant du trinôme $3x^2 + 4x + 2$ est égal à $\Delta = 4^2 - 4 \times 3 \times 2 = -8$

$\Delta < 0$ donc l'équation $f'(x) = 0$ ne possède pas de solution.

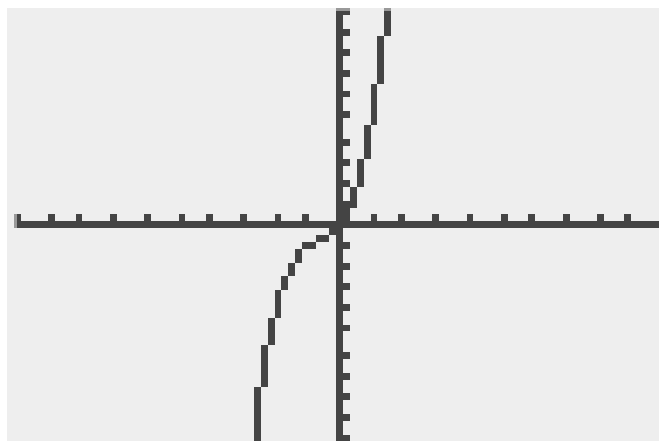
Le coefficient de x^2 , égal à 3, est positif, donc la parabole est tournée dans le sens « cuvette ». La dérivée est donc positive pour tout x .



3) On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f		

4)



EXEMPLE 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 5$.

- 1) Calculer la fonction dérivée de f .
- 2) Déterminer le signe de f' en fonction de x .
- 3) Dresser le tableau de variations de f .
- 4) À l'aide de la calculatrice, représenter graphiquement la fonction f .

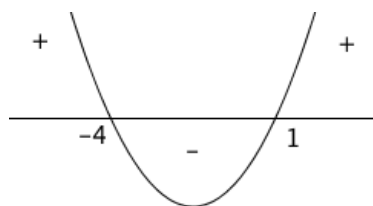
1) Pour tout x réel, on a : $f'(x) = 3x^2 + 2 \times \frac{9}{2}x - 12 = 3x^2 + 9x - 12$.

2) Commençons par résoudre l'équation $f'(x) = 0$:

Le discriminant du trinôme $3x^2 + 9x - 12$ est égal à $\Delta = 9^2 - 4 \times 3 \times (-12) = 225$

L'équation possède deux solutions : $x_1 = \frac{-9 - \sqrt{225}}{2 \times 3} = -4$ et $x_2 = \frac{-9 + \sqrt{225}}{2 \times 3} = 1$

Le coefficient de x^2 , égal à 3, est positif, donc la parabole est tournée dans le sens « cuvette ». La dérivée est donc positive à l'extérieur de ses racines -4 et 1.

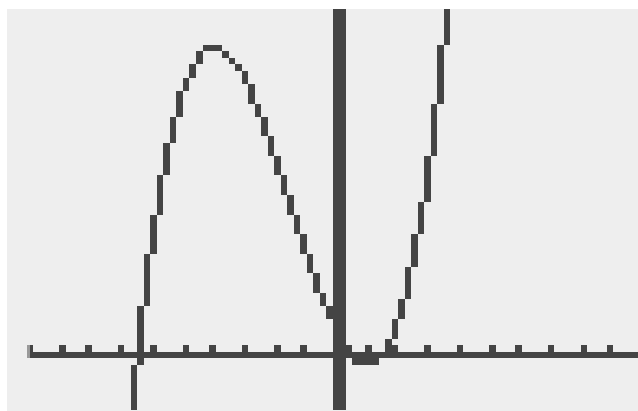


3) On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	$\ominus$	$\ominus$	+
f				

En effet, $f(-4) = (-4)^3 + \frac{9}{2}(-4)^2 - 12 \times (-4) + 5 = 61$ et $f(1) = 1^3 + \frac{9}{2} \times 1^2 - 12 \times 1 + 5 = -\frac{3}{2}$.

4)



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.
www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales