



OUVRAGE COLLABORATIF

100% GRATUIT

MATHEMATIQUES

1ère ESF CG

Cours • Exercices

Conformes au nouveau programme en vigueur
au Cameroun

Document libre et gratuit. Ne peut être vendu

LES GRANDS PROFS DE MATHS

AVANT-PROPOS

La collection « **Les grandprofs de maths** », après trois éditions de supports pédagogiques pour l'enseignement secondaire général, a choisi cette année de produire des documents pour l'enseignement secondaire technique au Cameroun.

Lancés officiellement le 02/07/2021 pour s'arrêter en septembre 2021, cet ouvrage et toute la collection dans les sections industrielles et sciences de technologie et du tertiaire sont le fruit du travail d'un groupe d'enseignants dévoués qui ont décidé de mettre leur professionnalisme au service du public; ils sont réunis autour de deux forums à savoir : "**Les grandprofs de maths**" et "**Profmaths Lytech & CETIC**".

Dans la mesure où il se pose avec acuité un réel problème de manuel de mathématiques dans l'enseignement technique, les documents de cette collection arrivent à point nommé pour donner un coup d'oxygène dont ce milieu en avait besoin. Sa conformité avec le programme en vigueur au Cameroun viendra remettre de l'ordre dans le processus enseignement/apprentissage dans cette section où les mathématiques sont un outil indispensable pour une installation optimale des ressources des matières professionnelles.

Cette édition 4 n'aurait jamais vu le jour sans la détermination d'un groupe d'enseignants. Une mention honorable est à décerner à l'un des administrateurs du forum "**Les grandprofs de maths**" **M. POUOKAM NGUEGUIM Léopold Lucien**, qui n'a pas abandonné le projet des travaux dans l'enseignement technique après quelques tentatives infructueuses ; il a conduit à bon port les travaux de l'édition 4. Ce travail d'équipe doit son succès à tous les enseignants qui ont apporté leur contribution dans la réalisation des livres de cette édition. Ce serait ingrat de ne pas mentionner ces gladiateurs qui ont mis leur professionnalisme et précieux temps à contribution pour la fusion d'un livre de cette collection, dans ce volet, toutes nos félicitations à **Dr. KOUAKEP, M. TCHÉUKO TCHOMI, M. KPADJOU DA, M. MPENGSOUI AMARA HENRI, M. SIYAPDJE HENRI, M. EWANE Fabrice et M. GUELA**. Nous remercions enfin **M. NGANDI Michel** pour la réalisation des jolies couvertures utilisées dans cette édition.

La perfection n'étant pas de ce monde, nous sollicitons l'indulgence des utilisateurs sur des éventuelles coquilles que pourraient contenir un livre de l'édition 4. Nous restons ouverts à toute critique constructive des utilisateurs à l'une des adresses mails suivantes : leopouokam@gmail.com ou gkppedro@yahoo.fr.

Tous les enseignants ou passionnés des mathématiques désirant faire partir de la famille "**Les grandprofs de maths**" / « GPM » et disponible à participer aux futurs projets du groupe sont priés de bien vouloir écrire à l'un des administrateurs ci-dessous : **M. Guela Kamdem Pierre** (697 473 953 / 678 009 612), **M. Pouokam Léopold Lucien** (696 090 236 / 651 993 749), **M. Tachago Wabo Wilfried Anderson** (699 494 671) et **M. NTAKENDO Emmanuel** (676 519 464).

NB : Toute utilisation d'un document de cette collection à but lucratif est formellement proscrite.

Les auteurs.

Sous la supervision de **M. Léo Lucien Pouokam**, ont bénévolement travaillé les auteurs suivants :

No	Nom	Contact	Chapitre(s) réalisé(s)
1	OUANDJI TCHAPTCHIE GAELLE		EQUATIONS, INEQUATIONS ET SYSTEMES
2	KOGUI NGUIMETSA SYLVAIN	696216943	GÉNÉRALITÉ SUR LES FONCTIONS.
3	NGNAZOKE WASSAIN ARMAND		LIMITE ET CONTINUE
4			
5			
6	MBUMBET YANNICK	675666335	DÉNOMBREMENT
7	TOKO DEDAMA CHERIFAIN	695798901	STATISTIQUE
8	EDDY MICHEL FANLEU	697477990	SUITES NUMÉRIQUES
9	DJAPA MKAMWA NIKER	67822746.	TRANSFORMATIONS DU PLAN
10	VALENTIN POUGNONG		GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DU PLAN
TD	DYLAN DIMITRI NGUEKAM	698644850	TRAVAUX DIRIGES

Nous remercions tous les relecteurs anonymes ainsi que tout le groupe GPM pour leurs remarques.

Table des matières

CHAPITRE1 : EQUATIONS, INEQUATIONS ET SYSTEMES.....	5
LECON 1 : équations et inéquations associées aux fonctions homographiques.	5
LECON2 : : équations du second degré à une inconnue.me	8
Leçon 3 : inéquations de second degré à une inconnue.	10
LECON 4 : systèmes d'équation de $\mathbb{R}^2$	12
LECON 5 : système d'équations linéaires à trois inconnues.....	14
LECON 6 : Programmation linéaire dans $\mathbb{R}^2$	17
• ENTRAINE-TOI	18
LECON 1 : GENERALITE SUR LES FONCTIONS	21
LECON 2 : SENS DE VARIATIONS D'UNE FONCTION	23
⇒ ENTRAINE-TOI	24
CHAPITRE 3: LIMITES ET CONTINUITE	26
1 ^{ère} PARTIE : LIMITES.....	26
LECON 1 : Limite d'une fonction en un réel	26
LECON 2 : Limites d'une fonction en un réel ; limites en l'infini.....	27
LECON 3 : Limites de fonctions usuelles-opérations sur les limites	28
2 ^{ème} PARTIE : CONTINUITE.....	30
LECON 1 : Continuité en un point	30
LECON 3 : Continuité d'une fonction sur un intervalle	32
CHAPITRE 4: FONCTIONS DERIVEES.....	33
LECON 1 : NOMBRE DERIVE – FONCTIONS DERIVEES	33
LECON 2 : SENS DE VARIATION	35
CHAPITRE 5: FONCTIONS USUELLES	38
LECON 2 : représentation graphique des fonctions : $x \mapsto f(x) = x^2$; $x \mapsto f(x - a)$;	38
$x \mapsto f(x) + b$; $x \mapsto f(x) $; $a, b \in \mathbb{R}$	38
LECON 2 : fonction polynôme du second degré.....	40
LECON 2 : fonction homographique $x \mapsto ax + bcx + d$ ($x \neq -cd$).....	42
• ENTRAINE-TOI	43
CHAPITRE 6: DENOMBREMENT	47
LECON 1 : Premiers outils de Dénombrement	47
LECON 2 : AUTRES OUTILS DE DENOMBREMENTS	50
• ENTRAINE-TOI	52
CHAPITRE 7 : STATISTIQUES	54
LECON 1 : SERIES STATISTIQUES NON GROUPEES	54

LECON 2 : SERIES STATISTIQUES GROUPEES	60
• ENTRAINE-TOI	67
CHAPITRE 8 : SUITES NUMERIQUES	70
LECON 1 : GENERALITES	70
LECON 2 : SUITES ARITHMETIQUES.....	72
LECON 3 : SUITES GEOMETRIQUES.....	73
• ENTRAINE-TOI	75
CHAPITRE 9 : TRANSFORMATIONS DU PLAN	78
LECON 1 : TRANSLATION	78
LECON 2 : PROJECTION	81
LECON 3 : SYMÉTRIE ORTHOGONALE.....	84
LECON 4 : HOMOTHETIE.....	88
LEÇON 5 : ROTATION.....	90
• ENTRAINE-TOI	92
CHAPITRE 10 : GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DU PLAN	94
LEÇON 1 : Distance d'un point à une droite.....	94
LEÇON 2 : Cercles du plan	96
⇒ ENTRAINE-TOI	98

CHAPITRE1 : EQUATIONS, INEQUATIONS ET SYSTEMES

MOTIVATION : De nombreuses situations de la vie quotidienne comme la détermination de quantité manquante, requièrent l'utilisation d'équations, d'inéquations ou de systèmes d'équations.

LECON 1 : équations et inéquations associées aux fonctions homographiques.

DUREÉ : 50 min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES: A la fin de cette leçon, l'apprenant doit être capable de:

- Résoudre une équation de la forme $\frac{ax+b}{cx+d} = k$ (avec $k \in \mathbb{R}$).
- Résoudre une inéquation de la forme $\frac{ax+b}{cx+d} \leq k$ ou $\frac{ax+b}{cx+d} \geq k$ (avec $k \in \mathbb{R}$).

Prérequis (5mins) :

1. Détermine la condition d'existence de la fraction $\frac{2x-3}{3x+9}$; puis résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x - 3 = 3x + 9$.
2. Complète ce tableau de signe :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x - 3$			

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

Soient les équations et inéquations suivantes que l'on souhaite résoudre dans $\mathbb{R}$: $\frac{3x-1}{4x+2} = 0$;

$$\frac{3x-1}{4x+2} = 1 \text{ et } \frac{3x-1}{4x+2} \leq 1.$$

1. Quelle est la condition sur x pour l'existence d'une valeur numérique de $\frac{3x-1}{4x+2}$?
2. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation $3x-1=0$ et déduis-en l'ensemble solution de $\frac{3x-1}{4x+2} = 0$.
3. Montre que l'équation $\frac{3x-1}{4x+2} = 1$ est équivalente à $\frac{-x-3}{4x+2} = 0$.
4. Déduis-en l'ensemble solution de $\frac{3x-1}{4x+2} = 1$.
5. Sachant que $\frac{3x-1}{4x+2} \leq 1$ est équivalent à $\frac{-x-3}{4x+2} \leq 0$; recopie et complète le tableau de signe ci-dessous ; puis donne l'ensemble solution de l'inéquation.

EQUATIONS, INEQUATIONS ET SYSTEMES

x	$-\infty$	-3	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$-x-3$		•		
$4x+2$			•	
$\frac{-x-3}{4x+2}$		•		

Résolution :

- $\frac{3x-1}{4x+2}$ existe si et seulement si $4x+2 \neq 0$; d'où $x \neq -\frac{1}{2}$ et par simplification $x \neq -\frac{1}{2}$.
- $3x-1=0$ signifie que $x=\frac{1}{3}$; et donc l'ensemble solution est $S=\{\frac{1}{3}\}$. Ainsi pour $x=\frac{1}{3}$ et $x \neq -\frac{1}{2}$ on a $3x-1=0 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{4x+2}=\frac{0}{4x+2} \Leftrightarrow \frac{3x-1}{4x+2}=0$. D'où $S=\{\frac{1}{3}\}$.
- $\frac{3x-1}{4x+2}=1 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{4x+2}-1=0$
 $\Leftrightarrow \frac{3x-1}{4x+2}-\frac{1}{1}=0$
 $\Leftrightarrow \frac{1(3x-1)-1(4x+2)}{1(4x+2)}=0$
 $\Leftrightarrow \frac{-x-3}{4x+2}=0$
- D'après la question 3, $\frac{3x-1}{4x+2}=1 \Leftrightarrow \frac{-x-3}{4x+2}=0$
 $\Leftrightarrow -x-3=0$ et $4x+2 \neq 0$ (D'après la question 2)
 $\Leftrightarrow x=-3$ et $x \neq -\frac{1}{2}$
 $\Leftrightarrow S=\{-3\}$

5.

x	$-\infty$	-3	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$-x-3$	+	•		-
$4x+2$	-		•	+
$\frac{-x-3}{4x+2}$	-	•		-

RÉSUMÉ :

Pour résoudre une équation ou une inéquation liée à une fonction homographique, on cherche les valeurs de x pour lesquelles la fonction $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ (avec a, b, c et d des réels vérifiant: $cx+d \neq 0$) est inférieure ou égale ou supérieure à un réel donné.

Ainsi pour résoudre $\frac{ax+b}{cx+d}=k$ (avec $k \in \mathbb{R}$):

- Si $k=0$, on résout $ax+b=0$; si le résultat est différent de la condition d'existence alors il est le résultat de l'équation, par contre s'il correspond à la condition d'existence, l'ensemble solution est vide.

EQUATIONS, INEQUATIONS ET SYSTEMES

- Si $k \neq 0$, on fait passer le membre de gauche à droite en respectant le changement de signe, puis, on réduit au même dénominateur toute l'expression à gauche ; on obtient alors une équation semblable à celle du premier point qu'on résoudra pareillement.

De même pour résoudre une inéquation de la forme $\frac{ax+b}{cx+d} \leq k$ ou $\frac{ax+b}{cx+d} \geq k$ (avec $k \in \mathbb{R}$):

- On fait passer le membre de gauche à droite en respectant le changement de signe, puis, on réduit au même dénominateur toute l'expression à gauche ; on obtient alors une inéquation de la forme $\frac{ax+b}{cx+d} \leq k$ ou $\frac{ax+b}{cx+d} \geq k$ ou $\frac{ax+b}{cx+d} \geq 0$ dont on étudiera le signe de la fraction rationnelle.
- Si l'inéquation est de la forme $\frac{ax+b}{cx+d} \leq k$ on prendra comme ensemble solution, l'ensemble des x pour laquelle la dernière ligne affiche le signe $-$.
- Si l'inéquation est de la forme $\frac{ax+b}{cx+d} \geq k$ on prendra comme ensemble solution, l'ensemble des x pour laquelle la dernière ligne affiche le signe $+$.

Exemples : Résolvons dans $\mathbb{R}$: $(E_1) \frac{3x-5}{x-3} = 0$; $(E_2) \frac{3x-5}{x-3} = -1$; $(I_1) \frac{3x-5}{x-3} \geq -1$.

$$(E_1) \Leftrightarrow \frac{3x-5}{x-3} = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x - 5 = 0 \text{ et } x - 3 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \text{ et } x \neq 3$$

$$\Leftrightarrow S = \left\{ \frac{5}{3} \right\}$$

$$(E_2) \Leftrightarrow \frac{3x-5}{x-3} = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-5}{x-3} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x-8}{x-3} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x - 8 = 0 \text{ et } x - 3 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ et } x \neq 3$$

$$\Leftrightarrow S = \{2\}$$

$$(I_1) \Leftrightarrow \frac{3x-5}{x-3} \geq -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x-8}{x-3} \geq 0$$

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$4x - 8$	-	•	+	+
$x - 3$	-	-	•	+
$\frac{4x-8}{x-3}$	+	•	-	+

$$S =]-\infty; 2] \cup [3; +\infty[$$

EXERCICES D'APPLICATIONS :

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\frac{2x+3}{x-1} = 0$; $\frac{2x+3}{x-1} = 4$; $\frac{2x+3}{x-1} \leq 4$

MOTIVATION : De nombreuses situations de la vie quotidienne comme la détermination de quantité manquante, requièrent l'utilisation d'équations, d'inéquations ou de systèmes d'équations.

LECON2 : : équations du second degré à une inconnue.me

DURÉE : 50 min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES: A la fin de cette leçon, l'apprenant doit être capable de:

- Résoudre une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, ou toute équation pouvant se ramener à une équation du second degré à une inconnue.
- Déterminer lorsqu'ils existent, deux réels connaissant leur somme et leur produit.

Prérequis (5mins) :

Trouve la forme canonique du polynôme suivant : $2x^2 + 6x - 8$, puis son expression factorisée

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

On recherche deux nombres entiers a et b dont la somme vaut 10 et le produit 24.

1. Montre que a et b sont des solutions de l'équation (E) : $x^2 - 10x + 24 = 0$ sachant que $\begin{cases} ab = 24 \\ a + b = 10 \end{cases}$. (on pourra exprimer b en fonction de a dans l'équation traduisant la somme puis remplacer ensuite dans celle qui traduit le produit)
2. Détermine la forme canonique de $x^2 - 10x + 24$; puis, sa forme factorisée.
3. En déduire l'ensemble solution de l'équation (E), et les valeurs possibles de a et b.

Résolution :

1. On a $b = 10 - a$ d'où $ab = 24 \Leftrightarrow a(10 - a) = 24$
 $\Leftrightarrow -a^2 + 10a - 24 = 0$
 $\Leftrightarrow a^2 - 10a + 24 = 0$ d'où a est solution de (E). On montre de même que b est solution de (E).
2. $x^2 - 10x + 24 = (x - 5)^2 - 25 + 24 = (x - 5)^2 - 1 = (x - 5 - 1)(x - 5 + 1) = (x - 6)(x - 4)$
3. $(E) \Leftrightarrow x^2 - 10x + 24 = 0$
 $\Leftrightarrow (x - 6)(x - 4) = 0$
 $\Leftrightarrow (x - 6) = 0$ ou $(x - 4) = 0$
 $\Leftrightarrow x = 6$ ou $x = 4$
 $\Leftrightarrow S = \{4; 6\}$
donc $a = 4$ et $b = 6$ ou $a = 6$ et $b = 4$

RESUME : on appelle équation de second degré à une inconnue, toute équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$. Pour résoudre une telle équation on peut procéder comme suit :

1. Se servir de la forme canonique. Pour cela :
 - On détermine la forme canonique du polynôme de second degré en appliquant la formule $ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$ ou en se servant de la méthode des débuts de carré.

EQUATIONS, INEQUATIONS ET SYSTEMES

- Si l'expression obtenue est factorisable, on la met sous sa forme factorisée et ensuite on résout cette forme factorisée égale à zéro ; les solutions trouvées sont alors solution de l'équation.
- Si l'expression obtenue n'est pas factorisable alors l'ensemble solution est vide.

Exemple : Résolvons dans $\mathbb{R}$: $3x^2 - 6x - 9 = 0$ et $x^2 - x + 24 = 0$

$$3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 - 2x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 \left[\left(x + \frac{-6}{2 \times 3} \right)^2 - \frac{(-6)^2 - 4(3)(-9)}{4(3)^2} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 \left[(x - 1)^2 - \frac{144}{36} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 3[(x - 1)^2 - 4] = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x - 1 - 2)(x - 1 + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3(x - 3)(x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 3 = 0 \text{ ou } x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -1$$

$$\Leftrightarrow S = \{-1; 3\}$$

$$x^2 - x + 24 = 0 \Leftrightarrow 1 \left[\left(x + \frac{-1}{2 \times 1^2} \right)^2 - \frac{(-1)^2 - 4 \times 1 \times 24}{4 \times 1^2} \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{95}{4} = 0 \text{ (non factorisable)}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 = -\frac{95}{4} \text{ impossible car un carré est forcément positif}$$

$$\Leftrightarrow S = \emptyset$$

2. Se servir du discriminant.

Définition 1: On appelle discriminant du polynôme $ax^2 + bx + c$, le nombre réel noté Δ et tel que $\Delta = b^2 - 4ac$.

Propriétés :

- Si Δ est positif ($\Delta > 0$), alors l'équation admet deux solutions distinctes

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si Δ est négatif ($\Delta < 0$), alors l'équation n'admet pas de solution.
- Si Δ est nul ($\Delta = 0$), alors l'équation admet une solution double $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

Définition 2 : Le système $\begin{cases} a + b = S \\ ab = P \end{cases}$ est appelé système symétrique. Les nombres a et b sont les solutions éventuelles de l'équation : $x^2 - Sx + P = 0$

Propriétés :

- Si le couple $(a; b)$ est une solution du système symétrique, alors le couple $(b; a)$ l'est aussi.
- Si le polynôme $ax^2 + bx + c$ admet deux racines x_1 et x_2 alors $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$.

EXERCICES D'APPLICATIONS :

Résous les équations suivantes : $2x^2 - 4x + 8 = 0$; $\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2} = 0$;

$$-x^2 + 6x - 9 = 0,$$

1. Par la méthode des débuts de carré ;
2. À l'aide du discriminant

MOTIVATION : La leçon suivante nous explique comment résoudre certains problèmes d'optimisation liés aux polynômes de second degré.

Leçon 3 : inéquations de second degré à une inconnue.

Durée : 50 min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES: A la fin de cette leçon, l'apprenant doit être capable de déterminer le signe d'un polynôme de second degré, et l'utiliser pour résoudre une inéquation obtenue à partir de celui-ci.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

Madame Owona est la propriétaire de trois jeunes entreprises, l'une de tissu, l'autre d'accessoires et la dernière est un atelier de couture. Elle est inquiète pour l'avenir de ses sociétés et fait appel à un expert qui lui dit que les bénéfices dans ces entreprises suivent respectivement les fonctions $b_1(x) = (x - 3)^2 + 4$; $b_2(x) = x^2 - 4x - 5$ et $b_3(x) = -3(x - 2)(x - 2)$. On voudrait connaître quand seront définitivement rentable ces entreprises.

1. Quel est le degré de chacun des polynômes b_1 , b_2 et b_3 ?
2. Résoudre $b_1(x) = 0$; $b_2(x) = 0$ et $b_3(x) = 0$
3. Compléter les tableaux de signes ci-dessous :

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
4				
$(x - 3)^2$				
$b_1(x)$				

x	$-\infty$	-1	5	$+\infty$
$x - 5$				
$x + 1$				
$b_2(x)$				

x	$-\infty$	2	$+\infty$
-3			
$(x - 2)^2$			
$b_3(x)$			

4. Sur la base de la question 3, complète avec signe de a , signe de $-a$

$\Delta < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		

$\Delta = 0$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$			

$\Delta > 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$				

5. Expliquer à madame Owona à partir de combien d'année après la création ses entreprises auront un bénéfice positif.

Résolution :

EQUATIONS, INEQUATIONS ET SYSTEMES

1. Le degré de chacun des polynômes b_1 , b_2 et b_3 est 2.
2. Résolvons $b_1(x) = 0$; $b_2(x) = 0$ et $b_3(x) = 0$

$$\begin{aligned}
 b_1(x) = 0 &\Leftrightarrow (x-3)^2 + 4 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x-3)^2 = -4 \text{ impossible} \\
 &\Leftrightarrow S = \emptyset
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_2(x) = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \\
 \Delta &= (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-5) \\
 &= 36 > 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_3(x) = 0 &\Leftrightarrow -3(x-2)(x-2) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x-2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = 2 \quad \text{Ainsi } S = \{2\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{D'où } \sqrt{\Delta} = 6 \\
 &\text{Ainsi } x_1 = -1 \text{ et } x_2 = 5 \\
 &\text{Donc } S = \{-1; 5\}
 \end{aligned}$$

3. Complétons les tableaux de signes ci-dessous :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
4	+		+
$(x-3)^2$	+	•	+
$b_1(x)$	+		+

x	$-\infty$	-1	5	$+\infty$	
$x - 5$	$-$	$-$	$\bullet$	$+$	
$x + 1$	$-$	$\bullet$	$+$	$+$	
$b_2(x)$	$+$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$+$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
-3	-		-
$(x-2)^2$	+	•	+
$b_3(x)$	-	•	-

4. Sur la base de la question 3, complète avec signe de a, signe de -a

$$\Delta < 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	Signe de a	

$$\Delta = 0$$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a	•	signe de a

$$\Delta > 0$$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$ax^2 + bx + c$	signe de a	•	signe de -a	•	signe de a

5. Le bénéfice de la première société est positif de $]-\infty; +\infty[$, donc la première société fera toujours du profit ; par contre, dans la deuxième société le bénéfice est positif sur $]-\infty; -1[\cup]5; +\infty[$ or x est positif donc cette société sera florissante dès sa cinquième année. La dernière société a un bénéfice toujours négatif donc elle perd de l'argent et ne sera jamais prospère.

RESUME :

Soit $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) un polynôme de degré deux. Le signe de ce polynôme en fonction de Δ est :

$$\Delta < 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	Signe de a	

$$\Delta > 0$$

$$\Delta = 0$$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a	•	signe de a

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a	• signe de -a	• signe de a	

On appelle inéquation du second degré à une inconnue, toute équation de la forme $p(x) \leq 0$; $p(x) \geq 0$; $p(x) < 0$ ou $p(x) > 0$; où $p(x)$ est un polynôme de degré deux.

Pour résoudre une inéquation de second degré à une inconnue, on cherche dans le tableau de signe du polynôme $p(x)$ les valeurs de x pour lesquelles le polynôme est inférieur ou égale ou supérieur à zéro.

EXERCICES D'APPLICATIONS : Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$x^2 - x - 6 < 0; 4x^2 + 12x + 9 > 0; x^2 + x + 1 \leq 0.$$

MOTIVATION : Nous avons appris depuis la classe de troisième à résoudre un système linéaire à deux inconnues par des méthodes comme la combinaison linéaire ou la substitution. Dans cette leçon, nous apprendrons une nouvelle méthode pour résoudre de tels systèmes.

LECON 4 : systèmes d'équation de $\mathbb{R}^2$.

DURÉE : 50 min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES: A la fin de cette leçon l'apprenant doit être capable de:

- Résoudre des problèmes liés aux systèmes d'équations linéaires de $\mathbb{R}^2$.
- Résoudre un système de $\mathbb{R}^2$ par combinaison ou substitution ou déterminant.

Prérequis (2 min) : Calculer $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

Tchomtchoua a acheté deux types de tissu à la mercerie pour confectionner des vêtements ; du lin léger et de la popeline. Lors du premier achat, elle a pris 3 mètres de lin et la même quantité de popeline pour 10500 FCFA. Au second achat dans la même mercerie, elle a pris 2 mètres de lin et 3 mètres de popeline et a payé 7500 FCFA. Elle voudrait aujourd'hui acheter 4 mètres de lin léger et ne sait combien prévoir. Aidons-la à trouver le prix d'un mètre de lin.

1. On désigne par x et y les prix respectifs d'un mètre de lin et popeline. Montre que x et y vérifient le système (s) : $\begin{cases} x + y = 3500 \\ 2x + 3y = 7500 \end{cases}$
2. Résous le système (s).
3. Calcule $\Delta_s = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$; $\Delta_x = \begin{vmatrix} 3500 & 1 \\ 7500 & 3 \end{vmatrix}$; $\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3500 \\ 2 & 7500 \end{vmatrix}$.
4. Compare $\frac{\Delta_x}{\Delta_s}$ et la valeur de x trouvée à la question 2 ; puis $\frac{\Delta_y}{\Delta_s}$ à la valeur de y trouvée à la même question. Propose alors une méthode pour résoudre un système de la forme $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$
5. Dit alors à Tchomtchoua combien elle dépensera pour son achat.

Résolution :

1. Premier achat : $3x + 3y = 10500 \Leftrightarrow x + y = 3500$.
Second achat : $2x + 3y = 7500$. D'où x et y vérifient le système (s).

2. Par substitution :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y = 3500 & (1) \\ 2x + 3y = 7500 & (2) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 3500 \\ 2x + 3(-x + 3500) = 7500 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 3500 \\ -x + 10500 = 7500 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 3500 \\ x = 3000 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 500 \\ x = 3000 \end{cases} \end{aligned}$$

ainsi $S = \{(3000; 500)\}$

$$3. \Delta_s = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1; \Delta_x = \begin{vmatrix} 3500 & 1 \\ 7500 & 3 \end{vmatrix} = 10500 - 7500 = 3000;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 3500 \\ 2 & 7500 \end{vmatrix} = 7500 - 7000 = 500.$$

$$4. \frac{\Delta_x}{\Delta_s} = \frac{3000}{1} = 3000; \frac{\Delta_y}{\Delta_s} = \frac{500}{1} = 500 \text{ donc } x = \frac{\Delta_x}{\Delta_s} \text{ et } y = \frac{\Delta_y}{\Delta_s}.$$

Pour résoudre le système $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ il suffit de calculer Δ_s , Δ_x et Δ_y et si $\Delta_s \neq 0$ alors $x = \frac{\Delta_x}{\Delta_s}$ et $y = \frac{\Delta_y}{\Delta_s}$. Cette méthode s'appelle la méthode de Cramer ou du discriminant.

RESUME :

Pour résoudre le système $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$; on peut se servir :

- De la méthode par combinaison linéaire qui consiste à multiplier chacune des équations par des coefficients judicieusement choisis de façon que par simple addition membre à membre des équations multipliées l'une des inconnues s'annule.

Exemple : Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} x + y = 3500 \\ 2x + 3y = 7500 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y = 3500 \\ 2x + 3y = 7500 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \begin{cases} 1x + 1y = 3500 \\ 2x + 3y = 7500 \end{cases} \\ 1 \begin{cases} 2x + 3y = 7500 \end{cases} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2y = -7000 \\ 2x + 3y = 7500 \end{cases} \\ &\quad \quad \quad \underline{\hspace{1cm}} \\ &\quad \quad \quad y = 500 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \begin{cases} x + y = 3500 \\ 2x + 3y = 7500 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \begin{cases} x + y = 3500 \\ 2x + 3y = 7500 \end{cases} \\ 1 \begin{cases} 2x + 3y = 7500 \end{cases} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 3y = -10500 \\ 2x + 3y = 7500 \end{cases} \\ &\quad \quad \quad \underline{\hspace{1cm}} \\ &\quad \quad \quad -x = -3000 \\ &\quad \quad \quad x = 3000 \end{aligned}$$

Ainsi on retrouve l'ensemble solution $S = \{(3000; 500)\}$

- De la méthode par substitution qui consiste à exprimer dans l'une des équations, l'une des inconnues en fonction de l'autre, puis remplacer la variable exprimée par sa valeur dans l'autre équation.

Exemple : Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} x + y = 3500 \\ 2x + 3y = 7500 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y = 3500 & (1) \\ 2x + 3y = 7500 & (2) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 3500 \\ 2x + 3(-x + 3500) = 7500 \end{cases} \text{ (en remplaçant } y \text{ par sa valeur)} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 3500 \\ -x + 10500 = 7500 \end{cases} \end{aligned}$$

EQUATIONS, INEQUATIONS ET SYSTEMES

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 3500 \\ x = 3000 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 500 \\ x = 3000 \end{cases}$$

ainsi $S = \{(3000; 500)\}$

De la méthode de cramer. Pour résoudre le système $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$, il suffit de calculer $\Delta_s = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$,

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} \text{ et } \Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}.$$

- Si $\Delta_s \neq 0$ alors $x = \frac{\Delta_x}{\Delta_s}$ et $y = \frac{\Delta_y}{\Delta_s}$.
- Si $\Delta_s = 0$ et $\Delta_x \neq \Delta_y$ alors $S = \emptyset$
- Si $\Delta_s = 0$ et $\Delta_x = \Delta_y$ alors $S = \{(x; y) \mid ax + by = c\}$, on peut aussi noter $S = \left\{ \left(x; -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \right) \right\}$

EXERCICES D'APPLICATIONS :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système (S) d'inconnues $(x; y)$ suivants : $\begin{cases} x + 2y = 15 \\ 2x + y = 21 \end{cases}$

2) Dans un petit enclos, il y a des poules et des chèvres. On compte alors 30 pattes. Si on intervertit le nombre de poules avec le nombre de chèvres, on dénombrerait alors 42 pattes.

a) En posant x le nombre de poules et y le nombre de chèvres avant l'intervention, montrer que x et y vérifient le système (S) ci-dessus.

b) En déduire le nombre de poules et le nombre de chèvres présents dans cet enclos au

MOTIVATION : Nous avons appris à résoudre des systèmes linéaires à deux inconnues. Dans cette leçon, nous apprendrons à résoudre des problèmes dont la résolution fait intervenir des systèmes linéaires à trois inconnues.

LECON 5 : système d'équations linéaires à trois inconnues.

DURÉE : 50 min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES:

- Résoudre par substitution ou par le pivot de Gauss un système linéaire,
- Résoudre un problème lié aux systèmes d'équations linéaires à trois inconnues.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

Une personne possède 19 pièces de monnaie, composé de 8 pièces de 25 FCFA, 5 pièces de 50 FCFA et 6 pièces de 100 FCFA. Cette pile de 19 pièces mesure 30 mm de hauteur.

Une pile constituée de 3 pièces de 50 FCFA et de 4 pièces de 100 FCFA mesure 9 mm de hauteur ; par contre une pile constituée de 6 pièces de 25 FCFA et de 4 pièces de 50 FCFA mesure 16 mm de hauteur. Vous recevez 2 pièces de 25 FCFA et 9 pièces de 100 frs. On voudrait calculer la hauteur de la pile que vous pouvez former avec ces pièces.

EQUATIONS, INEQUATIONS ET SYSTEMES

- On désigne par x , y et z les hauteurs respectives des pièces de 25 FCFA, 50 FCFA et 100 FCFA.
Montre que x , y et z vérifient le système (S) :
$$\begin{cases} 8x + 5y + 6z = 30 & (E_1) \\ 3y + 4z = 9 & (E_2) \\ 6x + 4y = 16 & (E_3) \end{cases}$$
- Dans (E_2) exprimé y en fonction de z , puis, remplacer y par l'expression obtenue dans (E_1) et (E_3) .
 - Comment nomme-t-on la méthode utiliser ?
 - En déduire la valeur de x et z , puis celle de y .
- résoudre le système (S) par combinaison linéaire.
- En déduire la hauteur de chaque pièce et celle de votre pile.

Résolution :

- Première pile : $8x + 5y + 6z = 30$; deuxième pile : $3y + 4z = 9$; troisième pile : $6x + 4y = 16$; d'où x , y et z vérifient le système (S).

$$\begin{aligned} 2. \text{ a) } (E_2) &\Leftrightarrow 3y + 4z = 9 \\ &\Leftrightarrow 3y = 9 - 4z \\ &\Leftrightarrow y = 3 - \frac{4}{3}z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dans } (E_1) &\Leftrightarrow 8x + 5\left(3 - \frac{4}{3}z\right) + 6z = 30 \\ &\Leftrightarrow 8x + 15 - \frac{20}{3}z + 6z = 30 \\ &\Leftrightarrow 8x - \frac{2}{3}z = 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dans } (E_3) &\Leftrightarrow 6x + 4\left(3 - \frac{4}{3}z\right) = 16 \\ &\Leftrightarrow 6x + 12 - \frac{16}{3}z = 16 \\ &\Leftrightarrow 6x - \frac{16}{3}z = 4 \end{aligned}$$

b) méthode par substitution.

$$\text{c) D'après la question 2a) on obtient le sous-système : } (S') : \begin{cases} 8x - \frac{2}{3}z = 15 \\ 6x - \frac{16}{3}z = 4 \end{cases} \text{ qui une fois résolue}$$

par substitution ou par combinaison nous donne $x = 2$ et $z = 1,5$. On en déduit que $y = 3 - \frac{4}{3} \times 1,5 = 1$.

- Par combinaison ou pivot de Gauss :

$$\begin{cases} 8x + 5y + 6z = 30 & (E_1) \\ 3y + 4z = 9 & (E_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases} \begin{cases} 16x + 10y + 12z = 60 \\ -9y - 12z = -27 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &16x + y = 33 \quad (E_4) \\ \begin{cases} 16x + y = 33 & (E_4) \\ 6x + 4y = 16 & (E_3) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -4 \\ 1 \end{cases} \begin{cases} -64x - 4y = -132 \\ 6x + 4y = 16 \end{cases} \\ &\underline{-58x = -116} \Leftrightarrow x = 2 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi on obtient le système triangulaire : } \begin{cases} 8x + 5y + 6z = 30 & (E_1) \\ 16x + y = 33 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 5y + 6z = 30 & (E_1) \\ 16 \times 2 + y = 33 \\ x = 2 \end{cases}$$

EQUATIONS, INEQUATIONS ET SYSTEMES

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 5y + 6z = 30 & (E_1) \\ y = 1 \\ x = 2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 8 \times 2 + 5 \times 1 + 6z = 30 \\ y = 1 \\ x = 2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} z = 1,5 \\ y = 1 \\ x = 2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow S = \{(2; 1; 1,5)\}
 \end{aligned}$$

4. Ainsi la pièce de **25 FCFA** a une hauteur de 2 mm, celle de **50 FCFA** une hauteur de 1 mm et celle de **100 FCFA** une hauteur de 1,5 mm. Notre pile mesure donc $2 \times 2 + 1,5 \times 9 = 17,5$ mm.

RESUME : On appelle système linéaire de trois équations à trois inconnues, tout système de la

forme $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$ où $a, b, c, d, a', b', c', d', a'', b'', c''$ et d'' sont des nombres réels.

Pour résoudre un tel système, on peut utiliser :

- La substitution qui consiste à sélectionner une équation afin d'exprimer une des inconnues en fonction des deux autres inconnues ; on remplace alors cette expression dans les deux autres équations, ce qui donne lieu à un nouveau système de deux équations à deux inconnues que l'on résoudra à l'aide des méthodes apprises à la leçon 4. On reprend ensuite la formule de substitution dans laquelle on remplace les deux inconnues trouvées dans le système précédent pour en déduire la valeur de la dernière inconnues.
- La combinaison linéaire qui consiste à combiner deux à deux des équations à l'aide de coefficient judicieusement choisis, dans le but d'éliminer la même inconnue à chaque fois.

Exemple : résolvons par combinaison le système :

$$\begin{cases} x - y - z = 6 & (E_1) \\ x - 2y - 3z = 10 & (E_2) \\ 5x + 6y + z = 2 & (E_3) \end{cases}$$

Éliminons z en combinant (E_1) et (E_2) puis (E_1) et (E_3)

$$\begin{aligned}
 -3 \begin{cases} x - y - z = 6 & (E_1) \\ x - 2y - 3z = 10 & (E_2) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 3y + 3z = -18 \\ x - 2y - 3z = 10 \end{cases} \\
 \underline{1 \quad \quad \quad} & \\
 -2x + y &= -8 \quad (E_4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 \begin{cases} x - y - z = 6 & (E_1) \\ 5x + 6y + z = 2 & (E_3) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 6 \\ 5x + 6y + z = 2 \end{cases} \\
 \underline{1 \quad \quad \quad} & \\
 6x + 5y &= 8 \quad (E_5)
 \end{aligned}$$

Combinons ensuite (E_4) et (E_5) pour éliminer y :

$$\begin{aligned}
 -5 \begin{cases} -2x + y = -8 & (E_4) \\ 6x + 5y = 8 & (E_5) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 10x - 5y = 40 \\ 6x + 5y = 8 \end{cases} \\
 \underline{16x} &= 48
 \end{aligned}$$

$$x = 3 \quad (E_5)$$

On obtient alors le système triangulaire :

$$\begin{cases} x - y - z = 6 & (E_1) \\ -2x + y = -8 & (E_4) \\ x = 3 & (E_5) \end{cases}$$

proche nous donne :

EQUATIONS, INEQUATIONS ET SYSTEMES

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} x - y - z = 6 & (E_1) \\ -2x + y = -8 & (E_4) \\ x = 3 & (E_5) \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3 - y - z = 6 & (E_1) \\ -2 \times 3 + y = -8 \\ x = 3 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 3 + 2 - z = 6 \\ y = -2 \\ x = 3 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} z = -1 \\ y = -2 \\ x = 3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ainsi l'ensemble solution est $S = \{(3; -2; -1)\}$

Remarque : cette méthode de résolution s'appelle également la méthode par le pivot de Gauss. Le pivot étant à chaque fois l'équation doublement utilisée.

EXERCICES D'APPLICATIONS :

1. Résoudre par substitution : $\begin{cases} x + y + z = 25 \\ x - y + z = 5 \\ x - 2y + 2z = -10 \end{cases} ; \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + 2y + z = 8 \\ 3x - y + 2z = 7 \end{cases}$
2. Résoudre par combinaison linéaire : $\begin{cases} x + 3y + 2z = -13 \\ 2x - 6y + 3z = 32 \\ 3x - 4y - z = 12 \end{cases} ; \begin{cases} 2x - 3y + 2z = 6 \\ x + 8y + 3z = -31 \\ 3x - 2y + z = -5 \end{cases}$

MOTIVATION : La programmation linéaire peut se définir comme une technique mathématique permettant de résoudre des problèmes de gestion et particulièrement ceux où le gestionnaire doit déterminer, face à différentes possibilités, l'utilisation optimale des ressources de l'entreprise pour atteindre un objectif spécifique comme la maximisation des bénéfices ou la minimisation des coûts. Dans la plupart des cas, les problèmes de l'entreprise pouvant être traités par la programmation linéaire comportent un certain nombre de ressources. On peut mentionner, par exemple, la main-d'œuvre, les matières premières, les capitaux, ... qui sont disponibles en quantité limitée et qu'on veut répartir d'une façon optimale entre un certain nombre de processus de fabrication.

LECON 6 : Programmation linéaire dans $\mathbb{R}^2$.

DUREÉ : 50 min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES: A la fin de cette leçon l'apprenant doit être capable de:

- Modéliser le problème sous forme d'équations ou d'inéquations linéaires qui permettra ainsi de bien identifier et structurer les contraintes que doivent respecter les variables du modèle ;
- Déterminer l'optimum mathématique à l'aide de certaines techniques propres à la programmation linéaire.

Prérequis (2 min) : Construire dans un repère orthonormé (O, I, J) la droite (D) d'équation $y = 2x - 3$; puis résoudre l'inéquation $2x - y - 3 \leq 0$.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE : La direction d'une usine de montage de vêtements a constaté qu'il y a des temps morts dans chacun des départements de l'usine. Pour remédier à cette situation, elle décide

EQUATIONS, INEQUATIONS ET SYSTEMES

d'utiliser ces temps morts pour fabriquer deux nouveaux modèles, M_1 et M_2 . Les temps de réalisation pour chacun de ces modèles dans les ateliers de coupe, d'assemblage et de repassage ainsi que les temps libres dans chacun de ces ateliers sont donnés dans le tableau ci-dessous. Ces temps représentent le nombre d'heures nécessaires à un homme pour effectuer le travail. Les profits que la compagnie peut réaliser pour chacun de ces modèles sont de 300FCFA.- pour M_1 et de 200 FCFA pour M_2 .

	M_1	M_2	TEMPS LIBRES
Coupe	1	2	20
Assemblage	2	1	22
repassage	1	1	12

La direction désire déterminer combien de vêtements de chaque modèle elle doit fabriquer pour maximiser son profit.

1. Soit x et y le nombre de vêtement des modèles M_1 et M_2 respectivement à fabriquer.
 - a) Traduis par des inéquations les contraintes liés à la durée du temps libre ainsi que toute autre contrainte qui te semblera judicieuse.
 - b) Résous graphiquement le système :
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 12 \\ 2x + y \leq 22 \\ x + 2y \leq 20 \end{cases}$$

✚ ENTRAINE-TOI

EXERCICE 1 :

- 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
 - a) $\frac{-2x+3}{x-2} = 0$;
 - b) $\frac{6x-30}{x+7} = 3$;
 - c) $\frac{2x+3}{-x+5} = 4$
- 2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
 - a) $\frac{-2x+3}{x-2} > 0$;
 - b) $\frac{6x-30}{x+7} \leq 3$;
 - c) $\frac{2x+3}{-x+5} \geq 4$

EXERCICE 2 :

- 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
 - a) $x^2 + 102x - 535 = 0$;
 - b) $-2x^2 + 7x - 3 = 0$;
 - c) $6x^2 - x - 15 = 0$
- 2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
 - a) $x^2 + 102x - 535 \geq 0$;
 - b) $-2x^2 + 7x - 3 > 0$;
 - c) $6x^2 - x - 15 \leq 0$
- 3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
 - a) $x^2 + 2x + 2 > 0$;
 - b) $-2x^2 + 2x - 8 \leq 0$;
 - c) $-x^2 + 2x - 5 \geq 0$

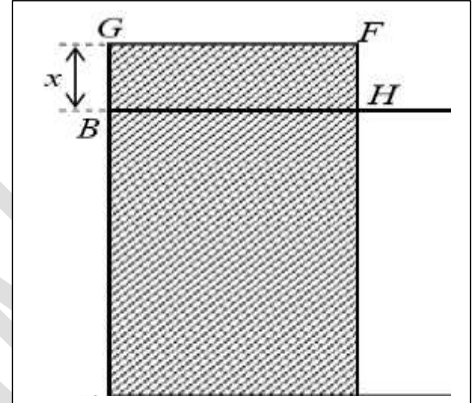
EXERCICE 3 :

- 1) ADAMU veut acheter une chaussure qui coute 7500 F. cette chaussure subit une première baisse de $x\%$ puis une seconde baisse de $(x+3)\%$ sur le nouveau prix. Calculer le taux de la première réduction sachant que la chaussure est finalement vendue à 5610 F.
- 2) Déterminer deux nombres réels **a** et **b** tel que leur somme vaut **53** et leur produit **690**
- 3) Un champ rectangulaire a pour surface 40m^2 et pour périmètre 2600cm. Déterminer les dimensions de ce champ.

EXERCICE 4 :

- 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E) -x^2 + 5x + 50 = 0$
- 2) Soit x un réel strictement positif et inférieur à 15.

IVAN dispose d'un terrain rectangulaire ABCD de 70m de long sur 30m de large. On augmente la longueur de x mètres et on diminue la largeur de $2x$ mètres comme l'indique la figure ci-contre.



- a) Exprimer en fonction de x l'aire de AGFE et l'aire de EHCD.
- b) Sachant que l'aire de AGFE est de 2000m^2 , montrer que x vérifie l'équation (E)
- c) Déterminer alors la valeur de x

EXERCICE 5 :

- 1) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :
 $(S1) \begin{cases} 4x + 5y = 50 \\ 8x + 10y = 110 \end{cases} ; \quad (S2) \begin{cases} 3a - b = 3 \\ -a + 2b = 4 \end{cases} ; \quad (S3) \begin{cases} -2x + 3y = 1 \\ 5x - 4y = -6 \end{cases}$
- 2) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants :

$$(S3) \begin{cases} 7x - 7y - 7z = 350 \\ x - 3y + z = -100 \\ x + y - 7z = 200 \end{cases} ; \quad (S4) \begin{cases} 40x + 18y + 70z = 3656 \\ 60x + 20y + 110z = 5040 \\ 15x + 7y + 35z = 1494 \end{cases}$$

EXERCICE 6 :

- 1) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :
 $(S1) \begin{cases} 4x + 5y = 2650 \\ 3x + 4y = 2100 \end{cases} ; \quad (S2) \begin{cases} 2x - 5y = 11 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$
- 2) a) Dédire de (S1) la solution du système (S3) $\begin{cases} 4x^2 + 5(\frac{1}{y}) = 2650 \\ 3x^2 + 4(\frac{1}{y}) = 2100 \end{cases}$
- b) Dédire de (S2) la solution du système (S4) $\begin{cases} \frac{2}{x-1} - \frac{5}{y+1} = 11 \\ \frac{3}{x-1} + \frac{4}{y+1} = 5 \end{cases}$

EXERCICE 7 :

- 1) Pendant une balade, Ina achète 5 oranges et 10 mandarines à 625 F et son amie Nina achète 2 oranges et 6 mandarines à 300F. Déterminer le prix d'une orange et d'une mandarine
- 2) Pour assister à un concert, la famille Linga composée de deux adultes et de trois enfants a payé 9800F. M. Ali accompagné de ses quatre enfants a payé 8900. Déterminer le prix d'entrée d'un billet pour adulte et celui d'un billet pour enfant.

EXERCICE 8 :

EQUATIONS, INEQUATIONS ET SYSTEMES

- 1) Un potier fabrique trois différents types (**A, B et C**) de canaris. Pour fabriquer un canari de type A, il a besoin de 40kg d'argile, 60l d'eau et 15kg de bois de chauffage. Pour un de type B, il a besoin de 70kg de d'argile, de 110l d'eau et de 35kg de bois. Pour un de type C, il a besoin de 18kg d'argile, 20l d'eau et 7kg de bois. En un mois, le potier utilise 3656kg d'argile, 5040l d'eau et 1494kg de bois de chauffage. Déterminer le nombre de canaris de chaque type qu'il a fabriqué en un mois.
- 2) Une provenderie du coin propose trois mélanges d'aliments pour bétails : mélange A (30% de maïs, 50% de sorgho et 20% de son) ; mélange B (40% de maïs, 20% de sorgho et 40% de son) ; mélange C (60% de maïs, 30% de sorgho et 10% de son). Les pourcentages expriment les fractions de volume. Sachant que 1L de mélange A pèse 443g, 1L de mélange B pèse 384g et 1L de mélange C pèse 441g, trouver combien pèse 1L de maïs, 1L de sorgho et 1L de son

CHAPITRE 2: GENERALITES SUR LES FONCTIONS

MOTIVATION :

MOTIVATION : Dans les devis que nous réalisons , nous faisons souvent appel à des calculatrices qui nous donnent des résultats aux grandeurs lorsqu'on fait entrer un nombre. Ce chapitre nous fera comprendre toutes ces grandeurs associées à un nombre

LECON 1 : GENERALITE SUR LES FONCTIONS

DUREE : 100 min

OBJECTIFS PEDAGOGIQUES : A la fin de cette leçon , l'élève doit être capable de donner le domaine de définition d'une fonction , de déterminer les antécédents et les images d'un réel donné par une fonction.

Control des prérequis : donner la condition d'existence des expressions suivantes :

$$f(x) = \frac{2x+5}{x-1} ; \quad t(x) = \sqrt{x+2}$$

Solution

$f(x)$ existe si et seulement si $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$

$t(x)$ existe si et seulement si $x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$

ACTIVITE D'APPRANTISSAGE :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$.

- 1- Donner la condition d'existence de la fonction f .
- 2- Résoudre l'équation $f(x) = 1$
- 3- Calculer $f(2)$

SOLUTION

- 1- $f(x)$ existe si et seulement si $x \neq -3$; on dit que la fonction f a pour domaine de définition $\mathbb{R} - \{-3\}$ où encore $]-\infty; -3[\cup]-3; +\infty[$
- 2- L'équation $f(x) = 1$ a pour solution 2 ; on dit que 1 a pour antécédent 2 par f .
- 3- $f(0) = \frac{1}{3}$ on dit que 0 a pour image $\frac{1}{3}$ par f .

RESUME

Définition 1 :

Soient A et B deux ensembles non vides.

On appelle **fonction** toute correspondance de A vers B qui à tout élément de l'ensemble A , on fait correspondre au plus un élément de l'ensemble B . On le note : $f: A \rightarrow B$

$$x \mapsto f(x)$$

Et on lit : fonction définie de A vers B qui à x on associe $f(x)$.

- A est appelé ensemble de départ et B est ensemble d'arrivé.
- $f(x)$ est l'image de x par la fonction f et x est l'antécédent de $f(x)$ par f .

Remarques

R 1- On appelle fonction numérique toute fonction dont l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivé sont des parties de $\mathbb{R}$.

R 2- on appelle fonction numérique de la variable réelle , toute fonction dont l'ensemble de départ est $\mathbb{R}$.

GENERALITES SUR LES FONCTIONS

R 3- une fonction dont tout élément de l'ensemble de départ a une image dans l'ensemble d'arrivée est appelé **application**.

Exemple 1

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$.

- 1- Déterminer l'image par f des réels -1 ; -3 et 0 .
- 2- Déterminer les antécédents par f des réels 5 ; 1 et 3 .

Solution 1

- 1- $f(-1) = 2$; $f(-3) = 10$ et $f(0) = 1$
- 2- $f(x) = 5$ ainsi on a $x = -2$ ou $x = 2$; on dit alors que -2 et 2 sont les antécédents de 5 par f .

Définition 2 :

L'ensemble de définition de la fonction f noté D_f est l'ensemble des éléments de l'ensemble de départ admettant une image dans l'ensemble d'arrivée.

NB : Toute fonction dont l'ensemble de départ coïncide avec son ensemble de définition est appelée application

Remarque :

- L'ensemble de définition d'une fonction polynôme est $\mathbb{R}$.
- L'ensemble de définition de la fonction inverse $\left(\frac{1}{x}\right)$ est $] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$.
- L'ensemble de définition de la fonction racine carrée $(\sqrt{x})$ est $] 0; +\infty[$.

Exemple 2

Donner le domaine de définition des fonctions suivantes : $f(x) = 2x + \sqrt{x+3}$; $g(x) = \frac{4x+3}{x^2+1}$

Solution 2

- $f(x)$ existe si et seulement si $x+3 \geq 0$ d'où $D_f = [-3; +\infty[$.
- $g(x)$ existe si et seulement si $x^2 + 1 \neq 0$ or cela est toujours vraie d'où $D_g = \mathbb{R}$.

EXERCICES D'APPLICATIONS

Donner le domaine de définition des fonctions suivantes :

- a) $g(x) = \frac{x+3}{x-1}$; b) $f(x) = \sqrt{-x+2} + 3x$; c) $h(x) = 3$

LECON 2 : SENS DE VARIATIONS D'UNE FONCTION**DUREE : 50 min****OBJECTIFS PEDAGOGIQUES :**

A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de donner le sens des variations d'une fonction.

Control des prérequis : calculer l'expression suivante : $\frac{2-(-6)}{-1-4}$.

Solution : $\frac{2-(-6)}{-1-4} = \frac{2+6}{-5} = \frac{8}{-5} = -\frac{8}{5}$.

ACTIVITE D'APPRANTISSAGE 1:

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 1$.

- 1- Calculer $f(-1)$ et $f(4)$ puis comparer les résultats.
- 2- Calculer donner le signe de $\frac{f(-1)-f(4)}{-1-4}$.

ACTIVITE D'APPRANTISSAGE 2:

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x - 1$.

- 1- Calculer $g(5)$ et $g(9)$ puis comparer les résultats.
- 2- Calculer donner le signe de $\frac{g(5)-g(9)}{5-9}$.

Solution 1

- 1- On a $f(-1) = 3$; $f(4) = -7$ et $3 \geq -7$ d'où $f(-1) \geq f(4)$ comme -1 et 4 appartiennent au $\mathbb{R}$; $-1 \leq 4$ et $f(-1) \geq f(4)$ on dit que la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
- 2- $\frac{f(-1)-f(4)}{-1-4} = -2 \leq 0$ on peut dire que la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Solution 2

- 1- Nous avons $g(5) = 14$ et $g(9) = 28$ d'où $g(5) \leq g(9)$; comme 5 et 9 appartiennent au $\mathbb{R}$; $5 \leq 9$ et $g(5) \leq g(9)$, on dit que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.
- 2- $\frac{g(5)-g(9)}{5-9} = 7,5 \geq 0$ on peut dire que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.
- 3-

RESUME

- On dit qu'une fonction f est croissante sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si pour tous réelles a et b de I , tels que $a \leq b$, on a $f(a) \leq f(b)$ ou encore $\frac{f(a)-f(b)}{a-b} \geq 0$.
- On dit qu'une fonction f est décroissante sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si pour tous réelles a et b de I , tels que $a \leq b$, on a $f(a) \geq f(b)$ ou encore $\frac{f(a)-f(b)}{a-b} \leq 0$.
- On dit qu'une fonction f est constante sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ si pour tous réelles a et b de I , tels que $a \leq b$, on a $f(a) = f(b)$ où encore $\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = 0$.

NB : Etudier les variations d'une fonction revient à dire si cette fonction est croissante, décroissante ou constante.

EXEMPLE :

Etudier le sens des variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 1$

GENERALITES SUR LES FONCTIONS

Solution

$$* D_f = IR$$

* On a $2 \in D_f, 3 \in D_f, 2 \leq 3, f(2) = 5$ et $f(3) = 8$ or $f(2) \leq f(3)$ d'où la fonction f est croissante sur IR .

EXERCICES D'APPLICATIONS

Etudier le sens des variations des fonctions suivantes :

a- $f(x) = x^2 - 1$ sur $[0; +\infty[$

b- $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$ sur $] -\infty; 1[$

$\Rightarrow$ **ENTRAINE-TOI**

EXERCICE 1 :

1) Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 1; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x + 2; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 1; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^2 + 3;$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 + 3x - 1; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^3 + 5x^2 - x + 7; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^5$$

2) Même question lorsque $x \rightarrow +\infty$

EXERCICE 2 :

1) Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 5x - 1}{x + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 1}{x^2 - x + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 5x - 1}{x^2 - 5x + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-7x^2 - 3}{x - 2};$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x - 1}{x + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 1}{-4x + 1}$$

2) Même question lorsque $x \rightarrow +\infty$

EXERCICE 4 :

Soit $f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$ et $g(x) = \frac{x+4}{2-x}$

1) Calculer les limites à gauche et à droite en 1 de $f(x)$

2) Calculer les limites à gauche et à droite en 2 de $g(x)$

EXERCICE 5 :

Calculer les limites à gauche et à droite de la fonction f en x_0 dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = \frac{x+3}{2-x}$ et $x_0 = 2$

2) $f(x) = \frac{x-5}{x-3}$ et $x_0 = 3$

EXERCICE 6 :

GENERALITES SUR LES FONCTIONS

- 1) Calculer les limites de chacune des fonctions suivantes aux bornes de son domaine de définition et interpréter si possible les résultats

$$f(x) = \frac{5x-1}{x+1} ; g(x) = \frac{4x-1}{-2x+6} ; h(x) = \frac{2x-1}{-4x+2} ; j(x) = \frac{x^2+2x-8}{6-2x} ; k(x) = \frac{x^2-3x-8}{-2x+8}$$

- 2) Mettre f, g et h sous la forme $a + \frac{b}{x+c}$ où a, b et c sont des réels à déterminer

EXERCICE 7 :

- 1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} (2-x)^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x^3 + x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ Etudier la continuité de f en 1
- 2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & \text{si } x < 2 \\ \frac{2x-1}{x-1} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ Etudier la continuité de g en 2

EXERCICE 8 :

- 1) Etudier la continuité de $f(x) = 2x + 1$ en $x_0 = 3$
- 2) Etudier la continuité de $f(x) = \frac{3x+2}{x+2}$ en $x_0 = 2$ et $x_1 = -2$

CHAPITRE 3: LIMITES ET CONTINUITE

 1^{ère} PARTIE : LIMITES

LECON 1 : Limite d'une fonction en un réel

DUREÉ: 50 minutes.

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES:

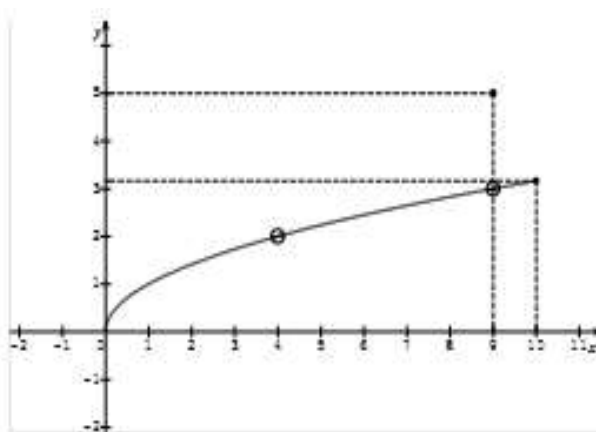
- Conjecturer algébriquement la limite d'une fonction en un réel ;
- Conjecturer graphiquement la limite d'une fonction en un réel.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

La courbe ci-contre est celle de la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Déterminer l'arrondi d'ordre 2 de chacune des images dans les tableaux suivants :

x	3.999	3.999999	4.0001	4.000001
$\sqrt{x}$				
x	9.0001	9.00001	8.999	8.999999
$\sqrt{x}$				



RESUME :

Définition : Soit f une fonction numérique, x_0 et l deux réels.

- Si $f(x)$ prend des valeurs très proche de l lorsque x prend des valeurs proches de x_0 , on dit que f admet pour limite l en x_0 ou que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers x_0 . On note $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$
- Lorsque $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, on dit que la limite de f en x_0 existe et est égale à l .

Remarque : Pour déterminer la limite d'une fonction f en x_0 , il n'est pas nécessaire que $x_0 \in D_f$.

Exemple : On définit la fonction g par $g(x) = \frac{-2x+3}{2}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Du tableau des images suivantes :

x	1.99	1.999	2.001	2.0001
$g(x)$	-0.49	-0.499	-0.501	-0.5001

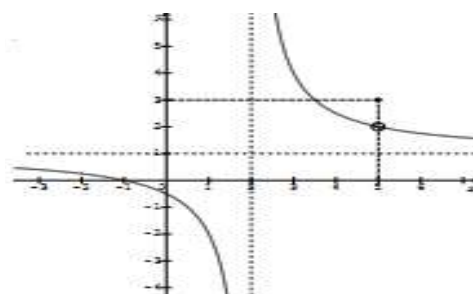
on a : $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -0.5$.

Propriété :

- Lorsque $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ existe, l est unique.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ si, et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - l| = 0$.

EXERCICES D'APPLICATIONS :

1. On définit la fonction h par $h(x) = \frac{-2x+3}{x-2}$.
Par des calculs approchés, déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$.
2. La courbe ci-contre est celle d'une fonction u .
Déterminer $\lim_{x \rightarrow 5} u(x)$



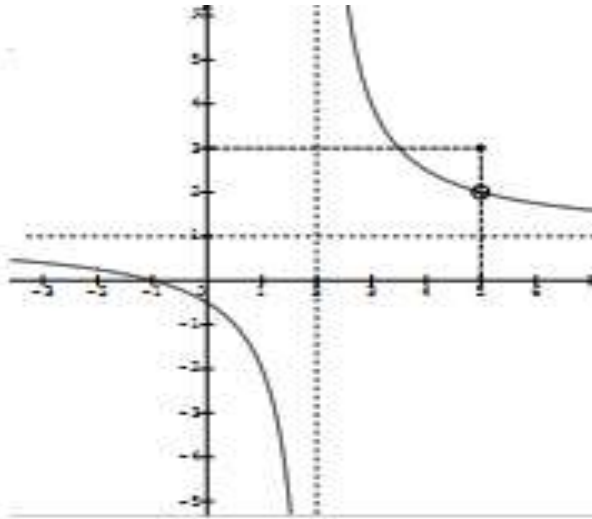
LECON 2 : Limites d'une fonction en un réel ; limites en l'infini

DURÉE: 100 minutes.

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES:

- Conjecturer algébriquement la limite à gauche ou la limite à droite d'une fonction en un réel ;
- Conjecturer graphiquement la limite à gauche ou la limite à droite d'une fonction en un réel.

ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE :



Le graphique ci-contre est la courbe représentative d'une fonction f .

1. Donner par lecture graphique l'ensemble de définition de f .
2. La fonction f est-elle définie en 2 ?
 - a) Pour $x_0 = 2$, Vers quelle valeur $f(x)$ se rapproche-t-elle lorsque x prend des valeurs très proches de x_0 et inférieures à x_0 ?
 - b) Vers quelle valeur $f(x)$ se rapproche-t-elle lorsque x prend des valeurs très proches de x_0 et supérieures à x_0 ?

- Si $f(x)$ prend des valeurs très proches de l lorsque x prend des valeurs proches de x_0 , avec $x > x_0$, on dit que l est la limite à droite de f en x_0 .
On note $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$
- Si $f(x)$ prend des valeurs très proches de l lorsque x prend des valeurs proches de x_0 avec $x < x_0$, on dit que l est la limite à gauche de f en x_0 .
On note $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$
- Si $f(x)$ prend des valeurs assez grandes pour des valeurs de x très proches de x_0 , on note $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$
- Si $f(x)$ prend des valeurs très petites et négatives pour des valeurs de x très proches d'un réel x_0 , on note $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$
- Si $f(x)$ prend des valeurs très proches d'un réel l , pour des valeurs très grandes de $|x|$, on dit que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers $-\infty$ ou $+\infty$.
On note $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$
- Si $|f(x)|$ prend des valeurs très grandes, pour des valeurs très grandes de $|x|$, on dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ ou $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ ou $+\infty$.
On note $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Exemple : On définit la fonction g par $g(x) = \sqrt{x-1}$. De proche en proche, on a $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 0$

Propriété :

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ Équivaut à $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l \end{cases}$

Conséquence :

Si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ n'existe pas.

EXERCICES D'APPLICATIONS :

On définit les fonctions f et k par : $f(x) = \frac{x+4}{3x+4}$; $k(x) = -2|-x+3| - 4x - 1$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
2. Déterminer la limite de f en $-\frac{3}{4}$.
3. Ecrire $k(x)$ sans valeur absolue dans des intervalles appropriés.
4. Déterminer les limites à gauche et à droite de k en -3 . Que peut-on conclure ?

LECON 3 : Limites de fonctions usuelles-opérations sur les limites

DURÉE : 100 minutes.

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES:

- Assimiler quelques limites de référence ;
- Utiliser des opérations sur les fonctions pour calculer des limites ;
- Utiliser des comparaisons de fonctions pour calculer des limites.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

RESUME :

1. Propriétés (limites usuelles):

- $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} c = c$. Où c est une constante réelle.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (ax + b) = ax_0 + b$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} (ax + b) = \begin{cases} -\infty, & \text{si } a > 0 \\ +\infty, & \text{si } a < 0 \end{cases}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (ax + b) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } a > 0 \\ -\infty, & \text{si } a < 0 \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$ si $x_0 > 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{si } n \text{ pair} \\ -\infty, & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{ax+b} = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\frac{b}{a}} \frac{1}{ax+b}$; Dépend du signe de $ax + b$

2. Propriétés

Soient f et g deux fonctions.

- $\lim(f + g) = \lim f + \lim g$
- $\lim(f \times g) = (\lim f) \times (\lim g)$
- $\lim\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\lim f}{\lim g}$. En particulier, $\lim\left(\frac{1}{g}\right) = \frac{1}{\lim g}$

3. Conséquences

- Addition

$\lim f$	l	l	∞	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	l'	∞	l'	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim(f + g)$	$l + l'$	∞	∞	$-\infty$	$+\infty$	$F.I$	

- Multiplication

$\lim f$	l	$l > 0$		$l < 0$		$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	∞	0
$\lim g$	l'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0	∞
$\lim f \times g$	$l \times l'$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$F.I$	

- Division

$\lim f$	l	l	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$l < 0$		$l > 0$		0	∞
$\lim g$	$l' \neq 0$	∞	$l' < 0$		$l' > 0$		0^-	0^+	0^-	0^+	0	∞
$\lim\left(\frac{f}{g}\right)$	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$F.I$	

- Composition de fonctions

LIMITES ET CONTINUITÉ

A, B et C désignent chacun un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = B$ et $\lim_{x \rightarrow B} g(x) = C$, alors $\lim_{x \rightarrow A} g \circ f(x) = C$

NB : $F.I$ signifie « Forme indéterminée » et cela nécessite une transformation d'écriture pour obtenir le résultat.

4. Propriétés

A désigne un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

- Si $f < g$ et $\lim_{x \rightarrow A} g = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow A} f = -\infty$.
- Si $f < g$ et $\lim_{x \rightarrow A} f = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow A} g = +\infty$.
- Si $f < h < g$ $\lim_{x \rightarrow A} f = l$ et $\lim_{x \rightarrow A} g = l$ alors $\lim_{x \rightarrow A} h = l$. Cette propriété est connue sous le nom de théorème des gendarmes.

5. Remarques

- La limite en l'infini d'une fonction polynôme est égale à la limite à l'infini de son monôme de plus haut degré.
- La limite en l'infini d'une fraction rationnelle est égale à la limite à l'infini du quotient des monômes de plus haut degré.

EXERCICES D'APPLICATIONS :

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right); \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} \right); \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} \right); \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 - x - 6); \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^3 + 5x^2 - 4}{3x^2 + x};$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{-x + 2}; \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{x - 6}{-3x + 2}; \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x});$$

2^{ème} PARTIE : CONTINUITE

LECON 1 : Continuité en un point

DUREÉ: 50 minutes.

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES:

- Montrer qu'une fonction est continue en un réel ;
- Reconnaître sur un graphique si une fonction est continue ou non en un réel donné.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

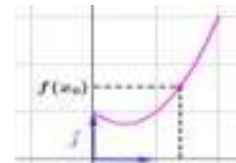
Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x^2-2x}{x^3-1} \text{ si } x \neq 1 \\ f(1) = \frac{2}{3} \end{cases}$$

1. Comparer $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ et $f(1)$.
2. Que peut-on en conclure

RESUME :

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 .

On dit que f est continue en x_0 si : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.



Remarque : Dire que f est continue en x_0 signifie que sa courbe représentative (C_f) ne présente aucun saut au point $M(x_0; f(x_0))$.

Exemples :

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x + 2 \text{ si } x \neq 4 \\ f(4) = 6 \end{cases}$

f est continue en 4. En effet :

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} x + 2 = 6 \text{ et } f(4) = 6.$$

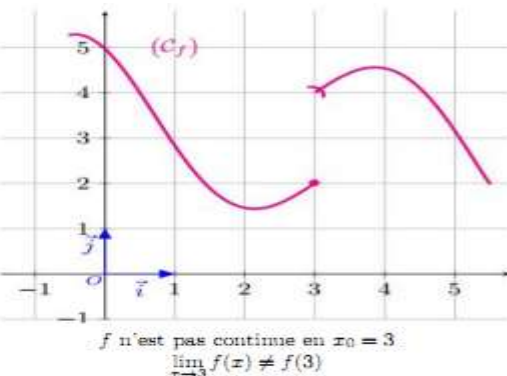
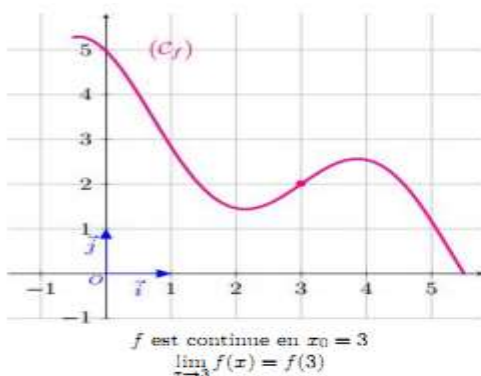
Donc, $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4)$.

g est définie par : $\begin{cases} g(x) = x^2 - 1 \text{ si } x \neq -1 \\ g(-1) = 3 \end{cases}$

g n'est pas continue en -1. En effet :

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} x^2 - 1 = 0 \text{ et } g(-1) = 3.$$

Donc, $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) \neq g(-1)$.



EXERCICES D'APPLICATIONS :

1. Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{-2x^2-x+1}{x+1} \text{ si } x \neq -1 \\ f(-1) = 1 \end{cases}$. Etudier la continuité de f en -1.

2. g est définie par : $\begin{cases} g(x) = \frac{x^2 - \alpha x}{1-x} \text{ si } x \neq 1 \\ g(-1) = 1 \end{cases}$. Déterminer α pour que g soit continue en -1 .

LECON 2 : CONTINUITÉ À GAUCHE-CONTINUITÉ À DROITE

DUREE: 50 minutes.

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES:

- Montrer qu'une fonction est continue à gauche en un réel ;
- Montrer qu'une fonction est continue à droite en un réel ;
- Reconnaître sur un graphique si une fonction est continue ou non à gauche en un réel donné.
- Reconnaître sur un graphique si une fonction est continue ou non à droite en un réel donné.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x-1} \text{ si } x > 1 \\ f(x) = 2 + \sqrt{5-x} \text{ si } x \leq 1 \end{cases}$

1. Comparer $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $f(1)$. Conclure.
2. Comparer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et $f(1)$. Conclure.
3. Est-ce que f est continue en 1.

RESUME :

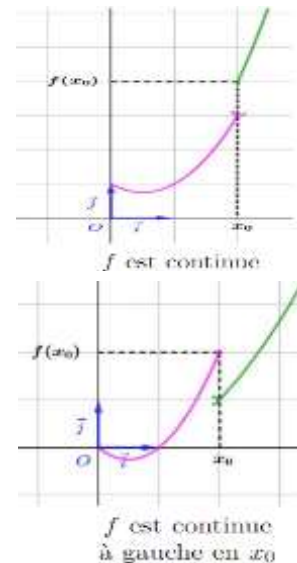
Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[x_0; x_0 + r[$ où $r > 0$. On dit que f est continue à droite en x_0 si : $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]x_0 - r; x_0]$ où $r > 0$. On dit que f est continue à gauche en x_0 si : $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

Propriété : Une fonction f est continue en x_0 si, et seulement si elle est continue à gauche et à droite.

Autrement dit :

f est continue en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$



EXERCICES D'APPLICATIONS :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x-1} \text{ si } x \geq 1 \\ f(x) = x^3 - 1 \text{ si } x < 1 \end{cases}$.

1. Etudier la continuité de f à droite en 1.
2. Etudier la continuité de f à gauche en 1.
3. Etudier la continuité de f en 1.

LECON 3 : Continuité d'une fonction sur un intervalle**DURÉE: 50 minutes.****OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES:**

- Montrer qu'une fonction est continue sur intervalle de $\mathbb{R}$;

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = -x - 2 ; x < -1 \\ f(x) = x + 4 ; -1 \leq x < 2 \\ f(x) = -2x + 6 ; x \geq 2 \end{cases}$$

1. Tracer $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$
2. Etudier la continuité de f en -1 et 2 .
3. f est-elle continue en tout point de $] - 2; 2[$?

RESUME :

Définition : On dit que f est continue sur l'intervalle $]a; b[$ si elle est continue en tout point de $]a; b[$.

On dit que f est continue sur l'intervalle $[a; b]$ si elle est continue sur $]a; b[$ à droite en a , et à gauche en b .

De façon analogue, on définit la continuité d'une fonction sur les intervalles $[a; b[$, $]a; b]$, $[a; +\infty[$ et $]-\infty; a]$.

Propriétés :

- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$
- Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle de leur domaine de définition ;
- Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont continues sur $\mathbb{R}$
- La fonction $\tan$ est continue sur tout intervalle de son domaine de définition ;
- La fonction $x \rightarrow \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$

Exemples :

- La fonction $x \mapsto x^4 - 2x^3 - 5$ est continue sur $\mathbb{R}$, car elle est polynôme.
- La fonction $\frac{x^2+x+1}{x-1}$ est continue sur tout intervalle de $\mathbb{R} - \{1\}$.

Propriétés : Soient f et g deux fonctions **continues** sur un intervalle I et α un réel.

- Les fonctions $f + g$, $f \times g$, αf sont continues sur I .
- Si f ne s'annule pas sur I , alors les fonctions $\frac{1}{f}$, $\frac{g}{f}$ ne s'annule pas sur I .

Exemples :

- La fonction $x \mapsto x^4 - 2x^3 - 5$ est continue sur $\mathbb{R}$, car elle est polynôme.
- La fonction $\frac{x^2+x+1}{x-1}$ est continue sur tout intervalle de $\mathbb{R} - \{1\}$.

EXERCICES D'APPLICATIONS :

Etudier la continuité de f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

1. $f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$; $I = [2; +\infty[$
2. $f(x) = (x^3 - x)\sqrt{x}$; $I = [0; +\infty[$

CHAPITRE 4: FONCTIONS DERIVEES

MOTIVATION : LE BUT DE CE CHAPITRE EST DE RESOUDRE LES PROBLEMES D'OPTIMISATIONS (bénéfice maximal, perte minimal etc...)

LECON 1 : NOMBRE DERIVE – FONCTIONS DERIVEES

DURÉE 50min.

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES:

- Montrer qu'une fonction est dérivable en un point de son Df
- Calculer la dérivée d'une fonction polynôme
- Calculer la dérivée d'une fonction rationnelle
- Ecrire l'équation de la tangente

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

On considère la fonction de $f : [0 ; 5] \rightarrow \mathbb{R}$

$$t \mapsto 2t^2$$

- 1) Montrer que pour tout $t \in [0 ; 5]$, $f(t) - f(2) = 2(t^2 - 4)$
- 2) Factorise l'expression $f(t) - f(2)$.
- 3) Simplifier la fraction rationnelle $\frac{f(t)-f(2)}{t-2}$
- 4) En Déduire $\lim_{t \rightarrow 2} \frac{f(t)-f(2)}{t-2}$

Soit $x \in [0 ; 5]$. Notons $g(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$

- 5) En Déduire $g(2)$

Résolution :

- 1) Montrons que : $f(t) - f(2) = 2t^2 - 8 = 2t^2 - 2 \times 4 = 2(t^2 - 4)$
- 2) Factorisons $f(t) - f(2) = 2(t^2 - 4) = 2(t^2 - 2^2) = 2(t - 2)(t + 2)$
- 3) Simplifions la fraction rationnelle $\frac{f(t)-f(2)}{t-2} = \frac{2(t-2)(t+2)}{t-2} = 2(t + 2)$
- 4) Dédution $\lim_{t \rightarrow 2} \frac{f(t)-f(2)}{t-2} = \lim_{t \rightarrow 2} 2(t + 2) = 2(2 + 2) = 8$
- 5) En déduire $g(2)$

$$g(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \frac{2t^2 - 2x^2}{t-x} = \frac{2(t^2 - x^2)}{t-x} = \frac{2(t-x)(t+x)}{t-x} = 2(t + x) = 2(x + x) = 4x$$

$$\text{donc } g(2) = 4 \times 2 = 8$$

RESUME :

- 1) Nombre dérivée fonction dérivée et tangente

Définition 1 : Soit f une fonction définie en x_0 , f est dérivable en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l$

(où $l \in \mathbb{R}$)

Cette limite s'appelle nombre dérivé de f en x_0 et se note $f'(x_0)$.

FONCTIONS USUELLES

Définition 2 ; Soit f une fonction, (C) sa courbe représentative et A un point de (C) ayant pour abscisse x_0 lorsque f est dérivable en x_0 , l'équation réduite de la tangente (T) au point A est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ où $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de (T) .

Définition 3 ; On dit qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle K (où $K \subset D_f$) si f est dérivable en tout élément de K . La fonction notée f' et définie par : $x \mapsto f'(x)$ est appelée dérivée de f ou encore fonction dérivée de f .

2) Dérivée des fonctions

a) Dérivées des fonctions élémentaires

Fonction $f(x)$	Dérivée $f'(x)$	Ensemble de dérivabilité
$a \quad (a \in \mathbb{R})$	0	$\mathbb{R}$
ax	a	$\mathbb{R}$
$x^n \quad (n \in \mathbb{N} - \{0; 1\})$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

EXEMPLE 1

1- La fonction $f : x \mapsto -2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $f' : x \mapsto 0$

2- La fonction $g : x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction $g' : x \mapsto 3x^2$

b) Dérivées et opérations sur les fonctions

On considère les fonctions u et v dérivables sur un intervalle K .

Dérivée de la somme	$(u + v)' = u' + v'$
Dérivée du produit par un scalaire (nombre)	$(\lambda u) = \lambda u' \quad (\lambda \in \mathbb{R})$
Dérivée du produit	$(uv)' = u'v + v'u$
Dérivée du quotient	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - vu'}{v^2}$ où v est non nulle sur K
Dérivée de la puissance	$(u^n)' = nu'u^{n-1} \quad (n > 1)$
Dérivée de l'inverse	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ où u est non nulle sur K
Dérivée de la fonction homographique	$\left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$ Avec $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$

EXEMPLE 2 :

Soient f et g deux fonctions d'une variable réelle définies sur $[-4; 4]$ respectivement par :

$$f(x) = x^2 + 4x - 3 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{2x-3}{x-1}$$

FONCTIONS USUELLES

- 1) Calculer la dérivée de chacune des fonctions f et g
- 2) Ecrire l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x_0 = 1$

SOLUTION :

- 1) La fonction f est dérivable sur $[-4 ; 4]$ car fonction polynôme et sa dérivée est : $f'(x) = 2x + 4$

Et la fonction g est dérivable sur $[-4 ; 1[\cup]1 ; 4]$ car fonction rationnelle et sa dérivée est :

$$g'(x) = \frac{2(x-1)-1(2x-3)}{(x-1)^2} = \frac{2x-2-2x+3}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2}$$

- 2) Ecrivons l'équation de la tangente

$$(T) : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

Calculons $f'(1)$ et $f(1)$ on a : $f'(1) = 2(1) + 4 = 6$ et $f(1) = (1)^2 + 4(1) - 3 = 1 + 4 - 3 = 5 - 3 = 2$

$$(T) : y = 6(x-1) + 2$$

$$(T) : y = 6x - 6 + 2$$

$$(T) : y = 6x - 4$$

Remarque :

Les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles sont dérivables sur leurs ensembles de définition.

EXERCICES D'APPLICATIONS :

- 1) Dans chacun des cas suivants, après avoir précisé l'ensemble de définition, déterminer la dérivée de la fonction f :
 - a) $f(x) = -4x^2 + 3x + 7$
 - b) $f(x) = 5x^3 - 4x^2 + 6x - 3$
 - c) $f(x) = \frac{3x+2}{2x-1}$
- 2) calculer de deux façons différentes la dérivée des fonctions suivantes
$$f(x) = (2x + 3)^2 ; g(x) = \frac{1}{3x-2}$$

LECON 2 : SENS DE VARIATION

DUREÉ 50min.

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES: L'apprenant devra être capable de :

- déterminer le sens de variation d'une fonction polynôme ou homographique définie sur un ensemble borné à partir du signe de sa fonction dérivée ;
- déterminer un extremum relatif d'une fonction polynôme en un réel x_0 d'un ensemble borné ;

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

Soit f la fonction d'une variable réelle définie sur $[-4 ; 4]$ par : $f(x) = x^2 + 4x - 3$

- 1) Montrer que $f(x) = (x + 2)^2 - 7$
- 2) Montrer que pour tout $x \in [-4 ; 4]$ que $f(x) \geq -7$
- 3) Montrer que f est décroissante sur $[-4 ; -2]$ et croissante sur $[-2 ; 4]$

Résolution :

- 1) Montrons que $f(x) = (x + 2)^2 - 7$

FONCTIONS USUELLES

En effet $f(x) = x^2 + 4x - 3$

$$= \left(x + \frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 - 3$$

$$= (x + 2)^2 - (2)^2 - 3$$

$$= (x + 2)^2 - 4 - 3$$

$$= (x + 2)^2 - 7$$

2) Montrons que pour tout $x \in [-4 ; 4]$ que $f(x) \geq -7$

En effet pour $x \in [-4 ; 4]$ $(x + 2)^2 \geq 0$

$$\Rightarrow (x + 2)^2 - 7 \geq -7$$

$$\Rightarrow f(x) \geq -7$$

3) Montrons que f est décroissante sur $[-4 ; -2]$; soient u et v deux éléments de $[-4 ; -2]$ tel que $u \leq v$

En effet, $u \leq v \Rightarrow u + 2 \leq v + 2$ (*negatif*)

$$\Rightarrow (u + 2)^2 \geq (v + 2)^2$$

$$\Rightarrow (u + 2)^2 - 7 \geq (v + 2)^2 - 7$$

$$\Rightarrow f(u) \geq f(v)$$

Pour tous u et v éléments de $[-4 ; -2]$ tel que $u \leq v$ on a $f(u) \geq f(v)$ donc f est décroissante sur $[-4 ; -2]$

Montrons que f est croissante sur $[-2 ; 4]$

soient u et v deux éléments de $[-2 ; 4]$ tel que $u \leq v$

En effet, $u \leq v \Rightarrow u + 2 \leq v + 2$ (*positif*)

$$\Rightarrow (u + 2)^2 \leq (v + 2)^2$$

$$\Rightarrow (u + 2)^2 - 7 \leq (v + 2)^2 - 7$$

$$\Rightarrow f(u) \leq f(v)$$

Pour tous u et v éléments de $[-2 ; 4]$ tel que $u \leq v$ on a $f(u) \leq f(v)$ donc f est croissante sur $[-2 ; 4]$

RESUME :

A - Sens de variation

Théorème 1 : Soit f une fonction dérivable et f' sa fonction dérivée sur un intervalle borné K .

- Si f' est strictement positive sur K , alors f est strictement croissante sur K ;
- Si f' est strictement négative sur K , alors f est strictement décroissante sur K ;
- Si f' est nulle sur K , alors f est constante sur K .

Remarque 1 : Pour étudier les variations d'une fonction sur un intervalle K , il suffit de déterminer le signe de la fonction dérivée sur K .

Définition 1 : Le *tableau de variation* est un tableau comportant trois lignes :

- La première ligne indique les nombres clés (les bornes) de l'ensemble de définition, ainsi que les nombres qui annulent la dérivée ;
- La deuxième ligne indique le signe de la dérivée sur l'ensemble de définition ;
- La troisième ligne indique par des flèches « vers le haut » (respectivement « vers le bas ») si la fonction est strictement croissante (respectivement strictement décroissante). On y indique aussi les limites aux bornes de l'ensemble de définition, ainsi que quelques valeurs particulières (essentiellement aux points où la fonction dérivée s'annule).

B – Extrémum

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I et x_0 un réel appartenant à I .

Définition 2 : x_0 est un **extrémum (local)** de f si :

- $f'(x_0) = 0$;
- f' change de signe en x_0 .

Remarque 2 : Un extrémum est soit un maximum, soit un minimum.

Définition 3 :

- x_0 est un **maximum (local)** de f si : f' est positive **juste avant** x_0 (f est croissante) puis négative **juste après** x_0 (f est décroissante).
- x_0 est un **minimum (local)** de f si : f' est négative **juste avant** x_0 (f est décroissante) puis positive **juste après** x_0 (f est croissante).

Définition 4 :

- x_0 est un **maximum (local)** de f si : f' est positive **juste avant** x_0 (f est croissante) puis négative **juste après** x_0 (f est décroissante).
- x_0 est un **minimum (local)** de f si : f' est négative **juste avant** x_0 (f est décroissante) puis positive **juste après** x_0 (f est croissante).

EXEMPLE

Soit f la fonction d'une variable réelle définie sur $[-4 ; 4]$ par : $f(x) = x^2 + 4x - 3$

- 1) Calculer la dérivée f' de f .
- 2) Etudier le sens de variation de f

SOLUTION

- 1) $f'(x) = 2x + 4$
- 2) signe de la dérivée

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$$

x	-4	-2	4
f'(x)	-	+	

Sens de variation

$\forall x \in [-4 ; -2]$ f est décroissante

$\forall x \in [-2 ; 4]$ f est croissante

EXERCICES D'APPLICATIONS :

Exercice 1 : soit f la fonction définie sur $[-4 ; 4]$ par $f(x) = x^2 - 2x + 2$

- i. Calculer $f(-4)$, $f(1)$ et $f(5)$
- ii. Calculer $f'(x)$
- iii. Ecrire une équation de la tangente à la courbe représentative de f aux points d'abscisses -2 ; 1 ; et 0 .

Exercice 2 : soit f la fonction définie sur $[-4 ; -1[\cup]-1 ; 2]$ par $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$

- i. Calculer $f(-4)$ et $f(2)$
- ii. Calculer les limites de f en -1
- iii. Calculer $f'(x)$
- iv. Ecrire une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 .

CHAPITRE 5: FONCTIONS USUELLES

INTERET : présenter une situation telle que l'évolution d'une maladie pendant une période donnée.

LECON 2 : représentation graphique des fonctions : $x \mapsto f(x) = x^2$; $x \mapsto f(x - a)$; $x \mapsto f(x) + b$; $x \mapsto |f(x)|$; $a, b \in \mathbb{R}$

DUREE : 50 min

MOTIVATION : Déduire la représentation graphique d'une courbe à partir d'une autre sans faire de calcul littéral.

PRE-REQUIS :

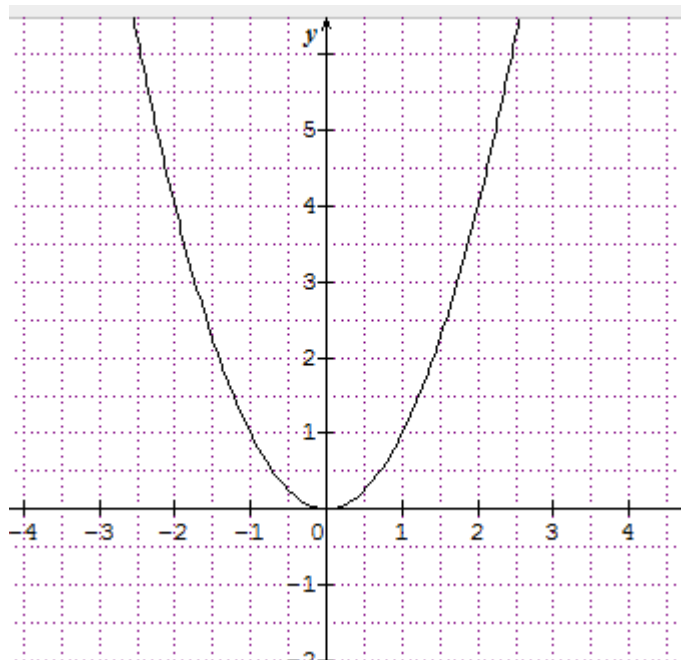
Lire et placer les coordonnées d'un point dans un repère du plan.

COMPETENCES A ACQUERIR PAR LES ELEVES :

- Reconnaître l'expression d'une fonction polynôme du second degré.
- Résoudre graphiquement une équation du second degré utilisant à partir de ces courbes représentatives.

SITUATION PROBLEME :

Voici la courbe représentative de la fonction $f: x \mapsto f(x) = x^2$ dans un repère orthonormé (O, I, J) . en utilisant la courbe représentative de la fonction f et sans faire de calculs, comment déduire celles des fonctions : $g: x \mapsto f(x - 3)$; $h: x \mapsto f(x) + 2$; $l: x \mapsto |f(x)|$?



Activité d'apprentissage

Reproduire la figure ci-dessus dans un repère orthonormé (O, I, J) .

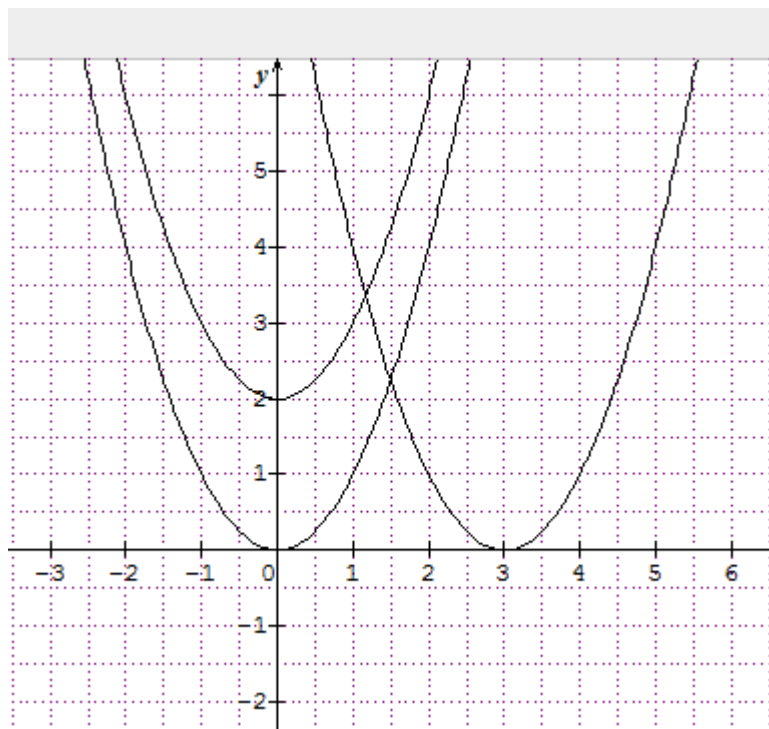
- 1- Donner cinq points par lesquels passent la courbe de f .

FONCTIONS USUELLES

- 2- Donner les coordonnées des points obtenus en 1-) en augmentant de 3 leur abscisse puis relier les. Que constatez-vous ?
- 3- Donner les coordonnées des points obtenus en 1-) en augmentant de 2 leur ordonnée puis relier les. Que constatez-vous ?
- 4- Quelle sont les parties de la courbe de f qui sont en dessous de l'axe des abscisses ? conclure.

Solution

- 1- $(-2; 4); (-1; 1); (0; 0); (1; 1); (2; 4)$
- 2- $(1; 4); (2; 1); (2; 0); (4; 1); (5; 4)$. La courbe de f a été déplacé de 3 unités suivant l'axe des abscisses ; c'est celle de la fonction $x \mapsto f(x - 3)$
- 3- $(-2; 6); (-1; 3); (0; 2); (1; 3); (2; 6)$
- 4- Aucune toutes les parties sont au-dessus de l'axe des abscisses ; on dit dans ce cas que la courbe de la fonction $x \mapsto |f(x)|$ est la même que celle de la fonction $x \mapsto f(x)$



Résumé :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) , f une fonction numérique de la variable réelle et C_f sa courbe représentative.

- La fonction $x \mapsto f(x - a)$; $a \in \mathbb{R}$ se déduit de celle de f en augmentant de a unité l'abscisse de tous les points de C_f .
- La fonction $x \mapsto f(x) + b$; $b \in \mathbb{R}$ se déduit de celle de f en augmentant de b unité l'ordonnée de tous les points de C_f .
- La fonction $x \mapsto |f(x)|$; se déduit de celle de f en prenant l'opposé de l'ordonnée de tous les points de C_f .

Exercice d'application

Construire dans un repère orthonormé (O, I, J) la courbe représentative de la fonction $f: x \mapsto x^3$ puis déduire celle des fonctions $x \mapsto f(x - 2)$; $x \mapsto f(x) + 3$; $x \mapsto |f(x)|$

LECON 2 : fonction polynôme du second degré

DUREE : 50 min**MOTIVATION :** la détermination d'un taux de remise ou d'inflation nécessite souvent l'utilisation des polynômes du second degré.**PRE-REQUIS :**

Résoudre une équation du second degré

Reconnaître un polynôme et son degré.

Objectifs pédagogiques :

- Reconnaître l'expression d'une fonction polynôme du second degré.
- Représenter graphiquement une fonction polynôme du second degré.
- Résoudre graphiquement une équation du second degré à partir de ces courbes représentatives.

SITUATION PROBLEME :

Une ballerine coute 2000 frs dans une boutique de la place. Après deux baisses consécutives de $x\%$ elle coute maintenant 1680 frs. Déterminer le taux de la remise après les deux baisses.

Activité d'apprentissage :

Une ballerine coute 2000 frs dans une boutique de la place. Après deux baisses consécutives de $x\%$ elle coute maintenant 1680 frs.

- 1- Déterminer en fonction de x le prix P de la chaussure après la première réduction.
- 2- Déterminer en fonction de x le prix P' de la réduction après deux baisses successives.
- 3- Déterminer x et résoudre la situation problème.
- 4- Représenter graphiquement la fonction $x \mapsto x^2 - 100x + 1600$ dans un repère orthogonal

Solution :

$$1- P = 2000 - 2000 \times \frac{x}{100} = 2000 - 20x$$

$$2- P' = (2000 - 20x) \times \frac{x}{100} = 20x - \frac{20}{100}x^2 = 20x - \frac{1}{5}x^2$$

$$3- 2000 - 20x + \frac{1}{5}x^2 = 1680 \Leftrightarrow 320 - 20x + \frac{1}{5}x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 100x + 1600 = 0$$

$$\text{Calcul du discriminant } \Delta = 100^2 - 4 \times 1600 = 3600 > 0.$$

$$x_1 = \frac{100-60}{2} = \frac{40}{2} = 20 \text{ et } x_2 = \frac{100+60}{2} = \frac{160}{2} = 80. \text{ Seule la valeur } x = 80 \text{ vérifie les données de l'exercice.}$$

4-



Resume:

- On appelle fonction polynôme du second degré, toute fonction $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$.
- Soit f une fonction polynômes du second degré et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
Pour résoudre graphiquement les équations de la forme $f(x) = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$ on procède comme suit :
 - Tracer la droite d'équation $y = \lambda$.
 - Repérer tous les points de rencontre entre cette droite et la courbe C_f
 - L'ensemble solution de cette équation est l'ensemble des abscisses des points de rencontre entre la droite et la courbe.
- Pour résoudre l'une des inéquations $f(x) > \lambda$; $f(x) \leq \lambda$; $f(x) < \lambda$; $f(x) \geq \lambda$, on trace la d'équation $y = \lambda$ et on prend l'ensemble des valeurs de x pour lesquels l'une des inégalités ci-dessus est vérifiée.

Exercice d'application :

Dans un repère orthonormé (O, I, J) , représenter la courbe de la fonction $f: x \mapsto x^2 - 2$ puis donner par lecture graphique les solutions des équations suivantes : $f(x) = -2$; $f(x) = 0$; $f(x) = 2$; $f(x) = -3$; $f(x) \leq 2$; $f(x) > -3$.

LECON 2 : fonction homographique $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} (x \neq -\frac{c}{d})$

DUREE : 50 min

MOTIVATION : certaines fonctions ont leur particularité au niveau de leur représentation graphique.

PRE-REQUIS :

Division euclidienne de deux polynômes.

Objectifs pédagogiques :

- Reconnaître l'expression d'une fonction homographique.
- Représenter graphiquement une fonction homographique
- Ecrire l'expression d'une fonction homographique sous la forme $\alpha + \frac{\beta}{cx+d}$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

SITUATION PROBLEME :

Une fonction numérique f est définie par pour tout réel $x \neq -2$, $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$. Comment l'écrire sous la forme $\alpha + \frac{\beta}{x+2}$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Activité d'apprentissage :

On considère la fonction $f: x \mapsto \frac{2x+3}{x+2}$. C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) .

1- Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

x	-5	-6	-3	0	-1	1
f(x)						

2- Placer ces points dans un repère orthonormé et relier les.

3- Effectuer la division euclidienne de $2x + 3$ par $x + 2$ en précisant le quotient et le reste de cette division.

4- Résoudre la situation problème.

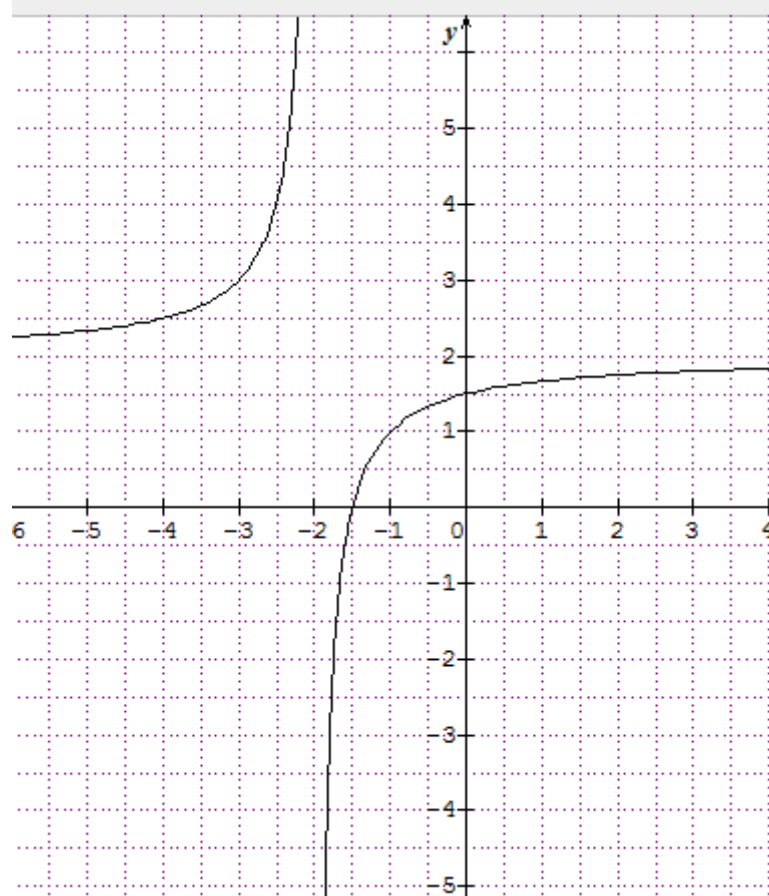
Solution :

1-

X	-5	-6	-3	0	-1	1
f(x)	$\frac{7}{3}$	$\frac{9}{4}$	3	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{5}{3}$

2-

FONCTIONS USUELLES



- 3- La division euclidienne de $2x + 3$ par $x + 2$ a pour quotient 2 et pour reste -1.
- 4- En utilisant 3-) on peut écrire $2x + 3 = 2(x + 2) - 1$; d'où $f(x) = 2 + \frac{-1}{x+2}$.

Resumé :

- On appelle fonction homographique, toute fonction numérique $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ ($x \neq \frac{-c}{d}$)
- on appelle écriture simplifiée d'une fonction homographique toute écriture de la forme $\alpha + \frac{\beta}{x+2}$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Exercice d'application :

Donner la représentation graphique et l'écriture simplifiée de chacune des fonctions suivantes :

$$f: x \mapsto \frac{3x+4}{2x+1} ; g: x \mapsto \frac{5x+2}{x+3}.$$

✚ ENTRAINE-TOI

EXERCICE 1 :

- 1) Quand dit-on qu'une fonction f est dérivable en x_0 ?
- 2) Interpréter graphiquement ce résultat
- 3) Quand dit-on qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle K ?
- 4) Donner l'équation réduite de la tangente en (C) courbe représentative d'une fonction f au point d'abscisse a

EXERCICE 2 :

FONCTIONS USUELLES

Soient les fonctions suivantes : $a(x) = x^5 + x^3 + 5$; $b(x) = -3x^2 + 2x + 1$; $c(x) = 4x^3 + 8x^2 - 5x + 1$; $d(x) = (x + 1)(-3x^2 + 2x + 1)$; $e(x) = \frac{-3x+2}{-x+2}$; $f(x) = \frac{2x+1}{x-5}$; $g(x) = \frac{1}{x-1}$ et $h(x) = -1 + \frac{2}{3x-5}$

- 1) Après avoir déterminé leurs domaines de définitions, calculer la dérivée de toutes les fonctions ci-dessus.
- 2) A- Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T_1) à la courbe de c au point d'abscisse -2
B- Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T_2) à la courbe de e au point d'abscisse 0
C- Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T_3) à la courbe de g au point d'abscisse 2

EXERCICE 3 :

Soit f la fonction définie sur $[-5;4]$ par $f(x) = -2x^2 - 5x + 3$. On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J) .

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$
- 2) Déterminer la dérivée f' de f et dresser le tableau de variation de f
- 3) Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 3
- 4) Construire dans le même repère (T) et (C_f)
- 5) On pose $g(x) = -f(x)$ et (C_g) sa courbe représentative. Construire (C_g) dans le repère précédent.

EXERCICE 4 :

Soit f la fonction définie sur $[-1;3]$ par $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$. On note (C_f) sa représentation graphique dans un repère (O, I, J) du plan.

- 1) Calculer $f(-2)$ et $f(5)$
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$
- 3) Calculer $f'(x)$ pour tout x appartenant à $[-2;4]$
- 4) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation
- 5) Ecrire une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 2
- 6) Construire (T) et (C_f) dans le même repère
- 7) On pose $g(x) = |f(x)|$ et (C_g) sa courbe représentative. Construire (C_g) dans le repère précédent.

EXERCICE 5 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + 3$ dont voici le tableau de variation

x	-2	1	4
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	11	2	11

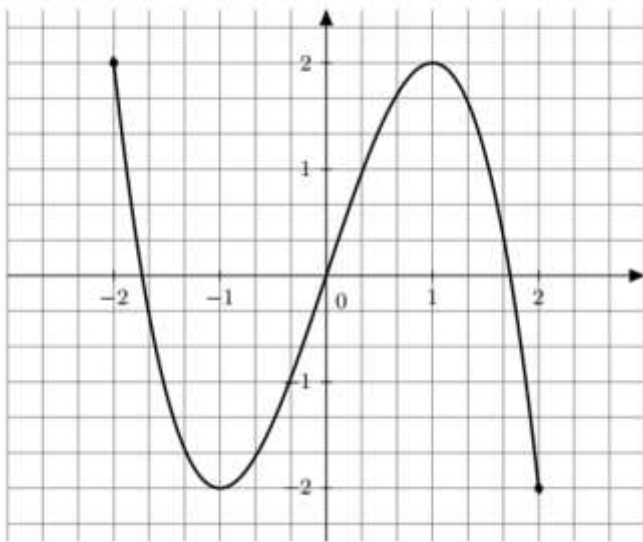
- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f
- 2) Déterminer les valeurs de $f(-2)$, $f(4)$ et $f'(1)$
- 3) Calculer pour tout réel x de $[-2;4]$, $f'(x)$ en fonction de a et b

FONCTIONS USUELLES

- 4) a) En utilisant les questions précédentes, montrer que **a** et **b** vérifient le système $\begin{cases} 2a - b = 4 \\ 2a + b = 0 \end{cases}$
 b) Déterminer les réels **a** et **b** et déduire l'expression explicite de f
 5) Construire la courbe (C) de f dans un repère orthogonal (O, I, J)

EXERCICE 6 :

- 1) On considère la courbe d'une fonction f représentée dans un repère d'unité 1cm



- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f
- 2) Déterminer l'image par f de $-1 ; 1$ et 2
- 3) Déterminer les antécédents éventuels par f de -2 et 2
- 4) La fonction f est-elle continue sur son domaine de définition ? justifie
- 5) On suppose que $f(x) = ax^3 + bx$. En utilisant la question 2, déterminer les réels a et b et déduire l'expression explicite de f

EXERCICE 7 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x-6}{2-x}$ et (C_f) sa courbe représentative

- 1) Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f sous forme d'intervalles
- 2) Calculer les limites de f aux bornes de D_f
- 3) Déduire une équation d'une asymptote (D) à la courbe (C_f) de f
- 4) Déterminer les réels a et b tel que $f(x) = a + \frac{b}{2-x}$
- 5) Calculer la dérivée de f et dresser son tableau de variation
- 6) Déterminer les coordonnées des points de rencontre de (C_f) avec l'axe des ordonnées puis avec l'axe des abscisses.
- 7) Tracer (D) et (C_f) dans un même repère orthonormé.

EXERCICE 8 :

On considère la fonction numérique définie sur l'intervalle $]-3;7]$ par $f(x) = \frac{3x-2}{x+3}$, (C_f) désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J) d'unité 2cm sur les axes

- 1) Montrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = a + \frac{b}{x+3}$ où a et b sont des nombres réels que l'on déterminera
- 2) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f dans l'intervalle $]-3;7]$
- 3) On considère la fonction g définie sur $]-3;7]$ par $g(x) = |f(x)|$; (C_g) désigne la courbe représentative de g
 - a) Expliquer comment on déduit la courbe (C_g) en fonction de (C_f)
 - b) Représenter dans le même repère (C_f) et (C_g)

EXERCICE 9 :

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $D = [-5; 1[\cup]1; 5]$ par $f(x) = \frac{x-2}{1-x}$ et (C_f) désigne la courbe représentative de f dans un repère (O, I, J)

- 1) Calculer les limites de f aux bornes de D et déduire l'équation d'une asymptote à (C_f)
- 2) Calculer $f'(x)$
- 3) Donner le sens de variation de f et donner son tableau de variation
- 4) Donner les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère
- 5) Ecrire une équation cartésienne de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0
- 6) Construire dans le même repère (T) , (C_f) et son asymptote
- 7) On pose $g(x) = \frac{|x|-2}{1-|x|}$ sur $D = [-5; 1[\cup]1; 5]$ et (C_g) sa courbe représentative. Construire (C_g) dans le même repère que (C_f)

CHAPITRE 6: DENOMBREMENT

MOTIVATION : De nombreux problèmes dans la vie ; tels que les jeux au hasard font appels aux nombres de possibilités. Ce chapitre nous donne les différents outils pour dénombrer.

LECON 1 : Premiers outils de Dénombrement

DURÉE : 3 heures

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES:

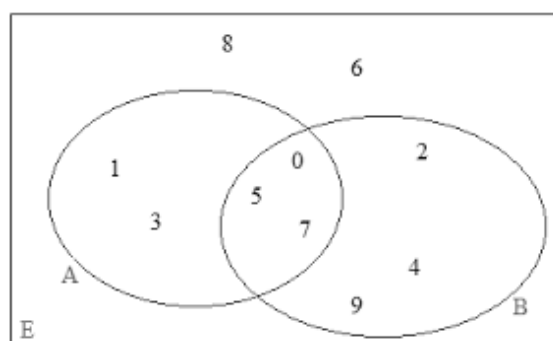
A la fin de cette leçon l'élève doit être capable de dénombrer en utilisant :

- ✓ Les diagrammes
- ✓ Les produits cartésiens
- ✓ Les arbres de choix, les tableaux à double entrée

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

On donne le diagramme ci-contre qui représente un ensemble $E = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ et deux parties A et B de E.

- 1- Combien d'éléments compte l'ensemble E ?
- 2- a) Combien d'éléments compte A ? B ?
 b) Combien d'éléments sont à la fois dans A et dans B ? Combien sont dans A ou dans B ?
 c) Combien d'éléments sont dans A et pas dans B ?
 d) Combien d'éléments ne sont ni dans A, ni dans B ?



Résolution :

- 1- 10 éléments. (*notion de cardinal*)
- 2- a) A : 5 éléments ; B : 6 éléments.
 b) Dans A et B : 3 éléments (*notion d'intersection*) ; Dans A ou B : 8 éléments (*notion de réunion*)
 c) Dans A et pas B : 2 éléments (*notion de différence*)
 d) Ni dans A, ni dans B : 2 éléments

RESUME :

1) Les diagrammes

Un ensemble E est dit fini lorsqu'on peut compter le nombre de ses éléments; ce nombre noté $\text{Card}(E)$ est appelé cardinal de E. lorsqu'un ensemble n'est pas fini on dit qu'il est infini.

Soit E un ensemble fini non vide, A et B deux parties de E.

On appelle réunion de A et B noté $A \cup B$ l'ensemble constitué des éléments appartenant à A ou à B.

On appelle intersection de A et B noté $A \cap B$ l'ensemble constitué des éléments appartenant à la fois à A et à B.

On appelle différence de A et B noté $A \setminus B$ l'ensemble constitué des éléments appartenant uniquement à A et pas à B.

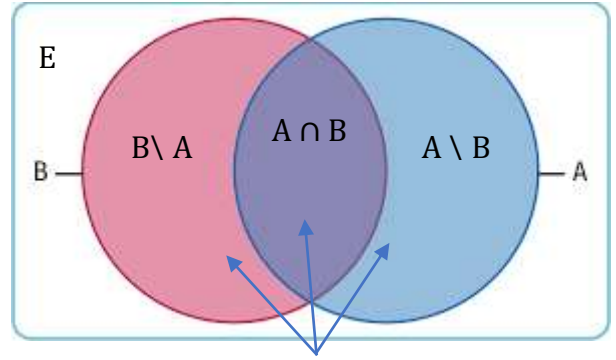
On appelle complémentaire de A dans E l'ensemble noté $\bar{A}$ ou C_E^A constitué des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.

Toutes ces définitions peuvent être résumées dans un diagramme appelé diagramme de VENN

Propriété :

Soit E un ensemble fini non vide, A et B deux parties de E

- $\text{Card } A \cup B = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card } A \cap B$
- $\text{Card } A \setminus B = \text{Card } A - \text{Card } A \cap B$
- $\text{Card } \bar{A} = \text{Card } C_E^A = \text{Card } E - \text{Card } A$



Exemple : Un sondage auprès de 150 personnes a donné les résultats suivant: $A \cup B$

A la question «Consommez-vous régulièrement du café ?», 50 personnes répondent oui.

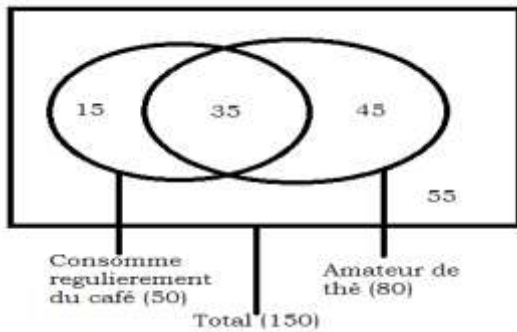
A la question «Êtes-vous amateur de thé ?», 80 personnes répondent oui.

A la question «Êtes-vous un amateur de thé consommant régulièrement du café ?», 35 personnes répondent oui.

- a) Représenter ces données par un diagramme.
- b) Combien de personnes sont des amateurs de thé ne consommant pas régulièrement du café ?
- c) Combien de personnes consomment régulièrement du café et ne sont pas amateurs de thé ?
- d) Combien de personnes ne sont pas amateurs de thé et ne consomment pas régulièrement du café ?

Résolution :

- a) Diagramme.



- b) Nombre de personnes amateurs de thé ne consommant pas régulièrement du café : 45
- c) Nombre de personnes consomment régulièrement du café pas amateurs de thé : 15
- d) Nombre de personnes non amateurs de thé et ne consommant pas régulièrement du café : 55

2) Tableau cartésien

Définition: Etant donné deux ensembles finis E et F , on appelle **produit cartésien** de E par F , noté $E \times F$ (se lit E croix F) l'ensemble des couples $(a; b)$ tel que $a \in E$ et $b \in F$. On peut, dans un tableau à double entrée, écrire tous les éléments de $E \times F$.

Exemple : Soit $E = \{1; 2; 3; 4\}$ et $F = \{a; b; c\}$.

Déterminer tous les éléments de l'ensemble $E \times F$

et en déduire le nombre d'éléments de $E \times F$.

Solution : Dans un tableau à double entrée. Nous avons les éléments de $E \times F$ le nombre d'éléments est donc 12.

E \ F	a	b	c
1	(1 ; a)	(1 ; b)	(1 ; c)
2	(2 ; a)	(2 ; b)	(2 ; c)
3	(3 ; a)	(3 ; b)	(3 ; c)
4	(4 ; a)	(4 ; b)	(4 ; c)

Propriété :

Si E et F sont des ensembles finis, le nombre d'éléments de $E \times F$ est égal au nombre d'éléments de E multiplié par le nombre d'éléments de F .

C'est-à-dire que l'on a : $\text{Card } (E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$

L'ensemble $E \times E$ est noté E^2 et on a $\text{card}(E^2) = [\text{card}(E)]^2$

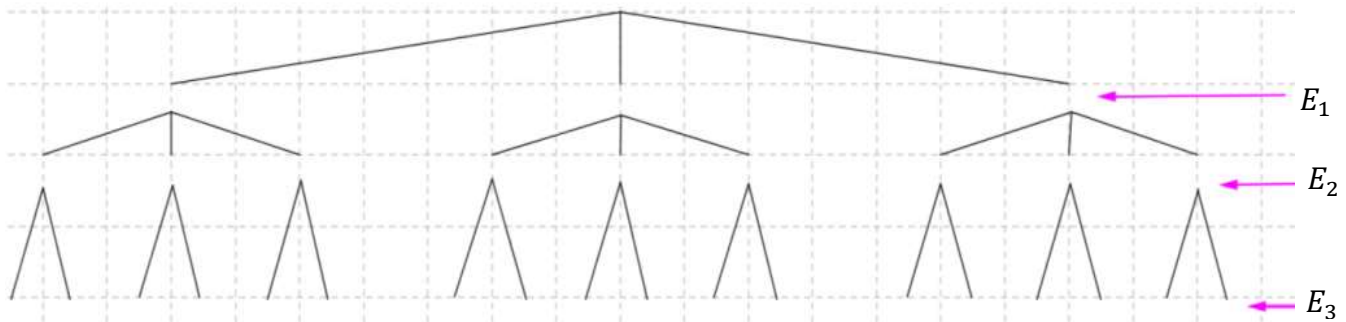
3) Arbre de choix

On peut généraliser le produit cartésien à plus de deux ensembles, soient $E_1, E_2, \dots, E_n$, n ensembles finis. On appelle produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ l'ensemble des éléments sous la forme $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ tels que $a_1 \in E_1$; $a_2 \in E_2 \dots$; $a_n \in E_n$. Et on a: $\text{card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n) = \text{card}(E_1) \times \text{card}(E_2) \times \dots \times \text{card}(E_n)$.

Si les ensembles E_1 ; $E_2 \dots E_p$ sont tous égaux à un même ensemble E , alors on note :

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p = E^p \text{ et on a } \text{card}(E^p) = [\text{card}(E)]^p$$

On peut utiliser une disposition en forme d'arbre pour retrouver tous les éléments d'un produit cartésien de manière générale.



Exemple : Un restaurant propose à ses clients un menu qui se compose :

- ✓ d'une entrée à choisir parmi trois entrées possibles notées : E_1, E_2, E_3 ,
 - ✓ d'un plat à choisir parmi quatre plats possibles : P_1, P_2, P_3, P_4 ,
 - ✓ d'un dessert à choisir parmi quatre desserts possibles : D_1, D_2, D_3, D_4 .
- a) Combien un client peut-il composer de menus différents ?
 b) Combien un client peut-il composer de menus comportant le plat P_2 ?

Résolution :

- a) Nombre de menus différents que peut composer un client : $3 \times 4 \times 4 = 48$ menus
 b) Nombre de menus comportant le plat P_2 : $3 \times 1 \times 4 = 12$ menus

EXERCICES D'APPLICATIONS :

Exercice 1 :

Une femme a dans sa garde-robe 4 jupes, 5 chemisiers et 3 vestes. Elle choisit au hasard une jupe, un chemisier et une veste. De combien de façons différentes peut-elle s'habiller ?

Exercice 2 :

Chacun des 80 élèves d'une classe de première d'un établissement étudie l'Espagnol ou l'Allemand. On sait que 70 étudient l'allemand et 50 l'espagnol.

- 1- Déterminer le nombre d'élèves qui étudient les deux langues.
- 2- Déterminer le nombre d'élèves qui étudient uniquement l'espagnol puis nombre d'élèves qui étudient uniquement l'allemand
- 3- En déduire le nombre d'élèves qui étudient une et une seule langue.

LECON 2 : AUTRES OUTILS DE DENOMBREMENTS

DURÉE : 50 min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES:

A la fin de cette leçon l'élève doit être capable de dénombrer en utilisant :

- ✓ Déterminer le nombre de p -uplets d'arrangements et de combinaisons d'un ensemble fini

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

Un sac contient 3 jetons indiscernables au touché contenant les lettres A ; B et C. on tire deux jetons de ce sac.

- 1- Enumérer toute les possibilités si on tire le 1^{er} jeton puis on le remet dans le sac avant de tirer le 2^e.
- 2- Enumérer toute les possibilités si on tire le 1^{er} jeton puis sans remettre dans le sac, on tire le 2^e.
- 3- Enumérer toute les possibilités si on tire les 2 jetons à la fois.

Résolution :

- 1- On tire le 1^{er} jeton puis on le remet dans le sac avant de tirer le 2^e :
(A; A) ; (A; B) ; (A; C) ; (B; A) ; (B; B) ; (B; C) ; (C; A) ; (C; B) ; (C; C). On a 9 possibilités au total.
- 2- On tire le 1^{er} jeton puis sans remettre dans le sac, on tire le 2^e :
(A; B) ; (A; C) ; (B; A) ; (B; C) ; (C; A) ; (C; B) . On a 6 possibilités au total
- 3- On tire les 2 jetons à la fois :
{A; B} ; {A; C} ; {B; C}. On a trois possibilités au total

RESUME :

1- Notion de p -uplets ou p -liste

Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel quelconque non nul.

On appelle p – *uplet* ou p – *liste* d'éléments de E tout classement ordonné avec ou sans répétition de p élément de E. Le nombre de p – *uplet* de E est n^p .

Remarque : On utilise les p – *uplet* lorsqu'on choisit p éléments parmi n **en tenant compte de l'ordre et avec répétitions des éléments**.

Exemple : Le code d'ouverture d'un coffre-fort est composé de 4 chiffres choisi parmi les 10 que compte la numération décimale.

- a) Combien de codes possibles peut-on former ?
- b) Combien de codes constitués uniquement de chiffre pairs peut-on former ?

Solution Nombre de code : a) 10^4 ; b) 5^4

2- Notion de d'Arrangements et de Permutations

Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel quelconque non nul plus petit que n . On appelle arrangement de p éléments de E tout classement ordonné sans répétition de p élément de E. c'est aussi tout p – *uplet* formés d'éléments 2 à 2 distincts. Le nombre d'arrangements de p éléments de E est $A_n^p = \underbrace{n(n-1)(n-2) \dots (n-p+1)}_{p \text{ facteurs}}$.

Exemple : Calculer A_8^2 ; A_{10}^3

Solution : $A_8^2 = 8 \times 7 = 56$; $A_{10}^3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$

DENOMBREMENT

Remarque : On utilise les arrangements lorsqu'on choisit p éléments parmi n **en tenant compte de l'ordre mais sans répétitions des éléments.**

➤ Notion de factoriel

On appelle factoriel n le nombre noté $n!$ et défini par :
$$\begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1 \text{ si } n \neq 0 \end{cases}$$

Propriétés :

- $n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)!$
- $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
- $A_n^0 = 1$; $A_n^1 = n$; $A_n^n = n!$

Exemple : Une classe de 30 élèves de première veut mettre sur pied un bureau composé d'un président, d'un secrétaire et d'un trésorier pour organiser la fête de fin d'année. Déterminer le nombre de bureaux possibles sachant que le cumul de poste est interdit.

Solution : $A_{30}^3 = \frac{30!}{(30-3)!} = \frac{30!}{27!} = 24360$

➤ Notion de permutation

Soit E un ensemble fini de cardinal n .

On appelle permutation d'éléments de E tout arrangement de n éléments de E . Le nombre de permutation de E est $A_n^n = n!$

Exemple : On appelle anagramme d'un mot le mot (ayant un sens ou non) obtenu en permutant uniquement les lettres du mot initiale. Déterminer le nombre d'anagramme du mot AFRIQUE.

Solution Le nombre d'anagramme du mot AFRIQUE est $7! = 5040$

Remarque : Si dans un mot à n lettres, une lettre se répète p fois, une autre q fois, alors le nombre d'anagramme de ce mot est $\frac{n!}{p! \times q!}$

Exemple : le nombre d'anagramme d'Ananas est : $\frac{6!}{3! \times 2!} = 60$

Notion de combinaisons

Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel quelconque non nul plus petit que n .

- On appelle combinaison de p éléments de E toutes dispositions non ordonné sans répétition de p élément de E . C'est aussi une partie de l'ensemble E ayant p élément. Le nombre de combinaison de p éléments de E est $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Remarque : On utilise les combinaisons lorsqu'on choisit p éléments parmi n **de manières simultanées.**

Propriété : $C_n^1 = n$; $C_n^0 = C_n^n = 1$

Exemple : Dans une classe de 30 élèves de première on veut mettre sur pied une équipes de 3 élèves pour représenter la classe à un match des incollables.

- 1- Déterminer le nombre d'équipes possibles.

DENOMBREMENT

2- Déterminer le nombre d'équipes possibles si l'élève Abena en fait partir.

Solution :

$$1- C_{30}^3 = \frac{30!}{3!27!} = 4060$$

$$2- 1 \times C_{29}^2 = 1 \times \frac{29!}{2!27!} = 1 \times 406 = 406$$

EXERCICES D'APPLICATIONS :

- 1- Une urne contient 12 boules dont 3 rouges, 4 vertes et 5 jaunes. On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne. Déterminer :
 - a) Le nombre de tirages possibles.
 - b) Le nombre de tirages unicolores.
 - c) Le nombre de tirages tricolores.
- 2- Un tournoi sportif compte 8 équipes engagées. Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres une seule fois. Combien doit-on organiser de matchs ?

ENTRAINE-TOI

EXERCICE 1 :

- 1) Lors d'un concours d'entrée dans une école professionnelle, on propose trois sujets de mathématiques et cinq sujets de physique. Un candidat doit choisir un sujet en chaque matière. Combien a-t-il de choix possibles ?
- 2) Une femme a dans sa penderie quatre jupes, deux chemises et un veston. De combien de façons différentes peut-elle s'habiller ? (NB : elle doit porter une jupe, une chemise et un veston)
- 3) Un tournoi de football se joue entre deux quartiers A et B. Chacune des quatre équipes du quartier A (A_1 ; A_2 ; A_3 ; A_4) devra rencontrer chacune des deux équipes du quartier B (B_1 et B_2) pour une seule rencontre. À l'aide d'un arbre de choix ou d'un tableau à double entrée, déterminer le nombre total de ce tournoi ?
- 4) Quatre amis vont à une soirée et devraient être accompagné chacun de son épouse. A la dernière minute, une épouse est indisponible et ne peut accompagner son mari. A l'ouverture de la soirée dansante, les quatre amis forment des couples (composé d'un homme et d'une femme).
 - a) Combien de couples peut-on former (on pourra utiliser un arbre de choix ou un tableau à double entrée afin d'énumérer tous les couples possibles)
 - b) Combien de couples peut-on former tels qu'un homme ne danse pas avec sa femme

EXERCICE 2 :

Lors d'une cérémonie d'anniversaire, le buffet est composé comme suit :

- Compléments : Manioc ; plantain mur ; igname et miondo
- Sauces : Ndolè ; haché de viande et poisson braisé.
- Boissons : Jus, 33 export, Castel, Petite Guinness, Ice, Kadji et Smooth

Un plat est composé d'un complément, d'une sauce et d'une boisson

- 1) Combien y-a-t-il de façons de servir un plat ?
- 2) M. Robert arrive au buffet et ne trouve pas son goût de boisson. Il décide alors de ne pas en prendre. De combien de façons possibles peut-il se servir ?

DENOMBREMENT

EXERCICE 3 :

- 1) Combien de nombre de quatre chiffres peut-on former avec les chiffres 1, 2 et 3 ?
- 2) On désire former des codes à quatre chiffres (distincts ou non) pris parmi les chiffres de la numérotation décimale (0, 1, 2, ..., 9)
 - a) Combien de codes peut-on former ?
 - b) Combien de codes commençant par 2 peut-on former ?
- 3) De combien de façons peut-on classer 5 livres dans 3 tiroirs numérotés de 1 à 3 sachant qu'un tiroir peut prendre de 0 à 5 livres

EXERCICE 4 :

- 1) De combien de façons peut-on ranger 5 voitures dans un parking à 10 places numéroté de 1 à 10
- 2) Le téléphone de votre papa se déverrouille avec un code de 4 lettres) pris dans l'ensemble {a, e, i, o, u, y} Combien avez-vous de possibilités pour déverrouiller ce téléphone si une lettre ne doit se répéter
- 3) De combien de façon peut-on faire assoir 4 élèves sur un banc de 4 places numérotés de 1 à 4 ?
- 4) Déterminer le nombre d'anagramme du mot « AFRIQUE »
- 5) Déterminer le nombre d'anagramme du mot « PROBATOIRE »

EXERCICE 5 :

- 1) Une urne contient 3 boules noires, 4 boules rouges et 2 boules blanches. On tire successivement et sans remise deux boules
 - a) Déterminer le nombre de tirages possible
 - b) Déterminer le nombre de tirage formé uniquement de boules rouges
 - c) Déduire le nombre de tirage formé de boules unicolore
- 2) Une classe de première compte 24 filles et 16 garçons. Pour participer à un concours, on veut former une équipe de 3 élèves
 - a) Combien d'équipes peut-on former ?
 - b) Combien d'équipes composé uniquement de filles peut-on former

EXERCICE 6 :

- 1) Dans une classe de première comportant 20 filles et 15 garçons, on souhaite former une équipe de 5 élèves pour participer au concours de littérature dans leur école
 - a) Combien d'équipes peut-on former ?
 - b) Combien d'équipes ne comprenant aucun garçon peut-on former ?
- 2) Une urne contient 3 boules vertes, 7 boules rouges et 5 boules jaunes. On tire simultanément et sans remise 3 boules de cette urne
 - a) Déterminer le nombre de tirage possible
 - b) Déterminer le nombre de tirages formé uniquement de boules jaunes
- 3) Dans un laboratoire contenant 256 médicaments on veut tester la compatibilité entre un groupe de 4 médicaments. Combien de groupes de médicaments peut-on former ?

CHAPITRE 7 : STATISTIQUES

MOTIVATION : comment gérer au quotidien le petit budget familial ?

Une bonne maîtrise des statistiques situées est un atout majeur dans l'interprétation des données à caractères économique et social.

LECON 1 : SERIES STATISTIQUES NON GROUPEES

DUREÉ : 50min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES:

- Déterminer les caractéristiques de position (mode, médiane, moyenne).
- Déterminer les caractéristiques de dispersion (variance, écart-type)
- Représentation graphique

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

Voici en vrac les scores obtenues par 30 candidats lors d'un jeu radiophonique, noté sur 5 points.

1 4 2 1 4 4 3 4 2 3 3 3 3 2 5
5 1 2 3 2 1 4 3 4 1 3 2 1 4 1

1. Présenter ces données dans un tableau ou figurera pour chaque note de 1 à 5 l'effectif correspondant.
2. Calculer le score moyen de ces candidats.
3. a. Donner la variance de cette série sous la forme d'une fraction irréductible.
b. Donner la valeur arrondie au 100^e de son écart-type.
4. Tracer le diagramme en bâton représentant cette série.

Résolution :

1. Présentation des données dans un tableau.

Note (x_i)	1	2	3	4	5
Effectif (n_i)	7	6	8	7	2
$n_i \times x_i^2$	7	24	72	112	50

2. Calculons le score moyen de ces candidats

$$\bar{x} = \frac{1 \times 7 + 2 \times 6 + 3 \times 8 + 4 \times 7 + 5 \times 2}{30} = \frac{7 + 12 + 24 + 28 + 10}{30} = \frac{81}{30} = \frac{27}{10}$$

$$\bar{x} = \frac{27}{10}$$

3. a. Donnons la variance de cette série statistique sous forme de fraction irréductible

$$V = \frac{\sum_{i=1}^n n_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{265}{30} - \left(\frac{81}{30}\right)^2 = \frac{265 \times 30}{30 \times 30} - \frac{81^2}{30^2}$$

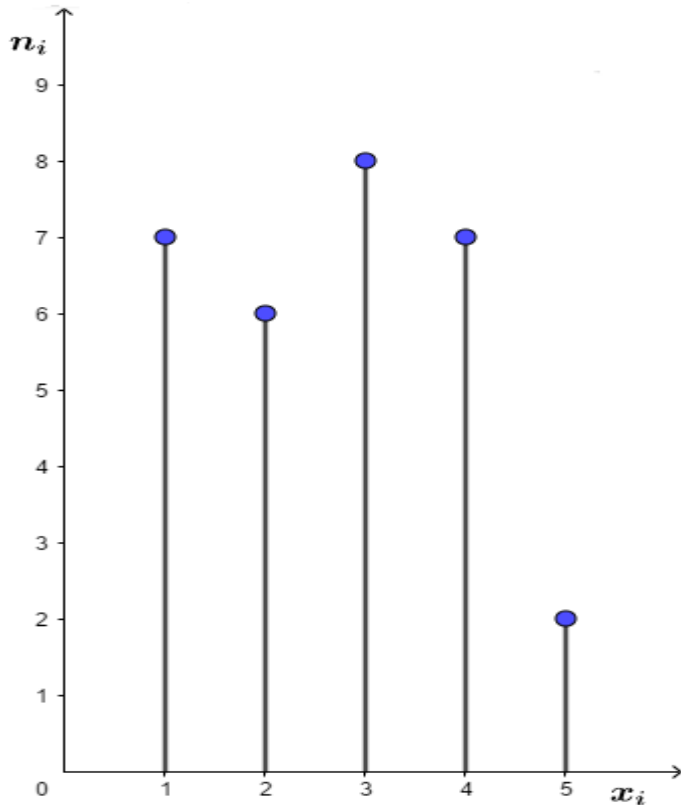
$$\text{STATISTIQUE}$$

$$= \frac{265-81^2}{30^2} = \frac{463}{300} \quad \text{Donc } V = \frac{463}{300}.$$

b) donnons la valeur arrondie au 100^e de son écart-type

$$\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{\frac{463}{300}} \approx 1,24 \quad \text{Ainsi } \sigma \approx 1,24$$

4. Diagramme en bâton représentant cette série



RESUME :

Dans toute cette leçon, on considère une série statistique représenté par le tableau :

Valeurs	x_1	x_2		x_p	Total
Effectifs	n_1	n_2		n_p	N
Fréquences	f_1	f_2		f_p	1

1. Paramètres de position

Définition (la moyenne):

La moyenne de cette série statistique est le réel, noté $\bar{x}$ tel que :

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1+n_2x_2+\dots+n_px_p}{N}. \text{ Avec } N = n_1 + n_2 + \dots + n_p$$

Ou en utilisant les fréquences :

$$\bar{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + \dots + f_px_p. \text{ Avec } f_i = \frac{n_i}{N}$$

STATISTIQUE

Exemple 1:

Soit la série statistique répertoriant la taille en mètres de 100 requins blancs.

Taille (en m)	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	Total
Effectifs	8	10	25	32	19	4	2	100
Fréquence	0.08	0.1	0.25	0.32	0.19	0.04	0.02	1

La moyenne des âges vaut :

$$\bar{x} = \frac{1}{100} (8 \times 1.5 + 10 \times 2 + 25 \times 2.5 + 32 \times 3 + 19 \times 3.5 + 4 \times 4 + 2 \times 4.5)$$

$$\bar{x} = \frac{282}{100} = 2,82$$

En utilisant les fréquences on a

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 0.08 \times 1.5 + 0.1 \times 2 + 0.25 \times 2.5 + 0.32 \times 3 + 0.19 \times 3.5 + 0.04 \times 4 + 0.02 \times 4.5 \\ &= 2.82\end{aligned}$$

Propriétés :

- Si on ajoute le même nombre k à toutes les valeurs (modalités) de la série statistique, la moyenne augmente de k .
- Si on multiplie toutes les valeurs de la série statistique par un même nombre k , la moyenne est multiplié par k .

Définition (mode) :

C'est la ou les modalités ayant le plus grand effectif.

Exemple 2: Dans l'exemple précédent le mode de cette série statistique est 3. Car son effectif est 32 est c'est le plus grande effectif du tableau statistique.

Définition (médiane) :

La médiane d'une série statistique est la valeur du caractère qui partage la population en deux classes de même effectif.

Remarque :

En pratique pour trouver la médiane d'une série statistique d'effectif global N :

- On ordonne les valeurs du caractère dans l'ordre croissant.
- Si N est pair, la médiane sera la moyenne des valeurs du terme de rang $\frac{N}{2}$ et du terme de rang $\frac{N}{2} + 1$
- Si N est impair, la médiane sera la valeur du terme de rang $\frac{N+1}{2}$
- Lorsque l'effectif global est élevé, il est souvent utile de calculer les effectifs cumulés pour trouver cette valeur.

Exemple 3: On lance 10 fois un dé de six faces. Les résultats obtenus sont :

1 ; 5 ; 6 ; 6 ; 3 ; 2 ; 3 ; 1 ; 4 ; 1

On trie ces valeurs par ordre croissant : 1 ; 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 6

STATISTIQUE

$N = 10$ Étant pair on effectue la moyenne du cinquième et du sixième terme (3 et 3) et on obtient donc 3. Donc $M_e = 3$

Exemple : Dans une classe, on a relevé les notes obtenues à une évaluation de mathématiques et on a récapitulé les résultats comme suit.

Note sur 20	8	9	10	12	15
Nombre d'élèves	7	4	6	2	4
ECC	7	11	17	19	23

$N = 23$. Qui est un nombre impair alors la médiane sera la valeur du terme de rang $\frac{N+1}{2} = \frac{23+1}{2} = 12$

En regardant le tableau des effectifs cumulés croissant, la médiane est $M_e = 10$

2. Paramètres de dispersion

Définition (variance et l'écart-type) :

La **variance** d'une série statistique est le nombre

$$V = \frac{1}{N} (n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_p(x_p - \bar{x})^2)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^n n_k(x_k - \bar{x})^2$$

L'**écart-type** est la racine carrée de la variance :

$$\sigma = \sqrt{V}$$

La variance et l'écart-type permettent de mesurer la **dispersion** des valeurs de la série autour de la moyenne. Si les valeurs de la série possèdent une unité, l'écart type s'exprime dans la même unité.

Autre formule pour calculer la variance :

$$V = \frac{1}{N} [n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + \dots + n_px_p^2] - (\bar{x})^2$$

Exemple :

Soit la série statistique répertoriant la taille en mètres de 100 requins blancs.

Taille (en m)	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	Total
Effectifs	8	10	25	32	19	4	2	100

$$V = \frac{1.5^2 \times 8 + 2^2 \times 10 + 2.5^2 \times 25 + 3^2 \times 32 + 3.5^2 \times 19 + 4^2 \times 4 + 4.5^2 \times 2}{100} - 2.82^2$$

$$V = 8.395 - 7.9524 = 0.4426 \quad \text{et} \quad \sigma = \sqrt{0.4426} = 0.665 \text{ m}$$

STATISTIQUE

Propriétés :

- Si on ajoute le même nombre k à toutes les valeurs de la série statistique, la variance et l'écart type ne changent pas.
- Si on multiplie toutes les valeurs de la série statistique par un même nombre k , la variance est multiplié par k^2 et l'écart type est multiplié par $|k|$

Définitions (quartile, décile) :

- Le **premier quartile** Q_1 d'une série statistique est la plus petite valeur de termes de la série pour laquelle au moins un quart des données sont inférieures ou égales à Q_1 .
- Le **Troisième quartile** Q_3 d'une série statistique est la plus petite valeur des termes de la série pour laquelle au moins trois quarts des données sont inférieures ou égales à Q_3 .
- Le **premier décile** D_1 d'une série statistique est la plus petite valeur des termes de la série pour laquelle au moins 10% des données sont inférieures ou égales à D_1 .
- Le **neuvième décile** D_9 d'une série statistique est la plus petite valeur des termes de la série pour laquelle au moins 90% des données sont inférieures ou égales à D_9 .

Remarque : le deuxième quartile Q_2 n'est rien d'autre que la médiane.

Définition (L'écart interquartile) :

L'écart interquartile est la différence entre le troisième et le premier quartile $Q_3 - Q_1$.

Remarque :

L'écart interquartile mesure la dispersion autour de la médiane.

3. Représentation graphique

Diagrammes en bâtons : également nommé diagramme des fréquences, est une représentation graphique d'une série statistique de variable quantitative discrète. Pour chacune des valeurs, on associe un segment vertical ou rectangle dont la hauteur est proportionnelle à la valeur (effectif ou fréquence) connue.

EXERCICES D'APPLICATIONS :

Deux classes de première ESF (P1 et P2) comparent leurs résultats du trimestre et déclarent : « nos classes ont le même profil puisque dans les deux cas la médiane est 10 ».

notes	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Effectifs P1	0	3	4	4	5	7	3	4	2	1	0	0
ECC	0	3	7	11	16	23	26	30	32	33	33	33
Effectifs P2	2	4	3	3	3	4	3	2	2	3	1	2
ECC	2	6	9	12	15	19	22	24	26	29	30	32

Vérifier que les deux médianes valent 10, déterminer les quartiles de chaque série et déduire l'écart interquartile.

Solution :

STATISTIQUE

Pour la classe P1 : L'effectif total est $N = 0 + 3 + 4 + 4 + \dots + 1 + 0 + 0 = 33$ comme N est impair, la médiane est le $\frac{1}{2}(33 + 1) = 17^{\text{ème}}$ terme de la série : $M_e = 10$

$\frac{1}{4} \times 33 = 8.25$. Donc le 1^{er} quartile est le $9^{\text{ème}}$ terme de la série : $Q_1 = 8$

$\frac{3}{4} \times 33 = 24.75$. Donc le $3^{\text{ème}}$ quartile est le $25^{\text{ème}}$ terme de la série : $Q_3 = 11$

L'écart interquartile est donc $Q_3 - Q_1 = 11 - 8 = 3$

Pour la classe P2 : L'effectif total est $N = 2 + 4 + 3 + 3 + \dots + 1 + 2 = 32$; $\frac{1}{2}(32 + 1) = 16.5$

Donc la médiane est la moyenne des $16^{\text{ème}}$ et $17^{\text{ème}}$ terme de la série : $M_e = 10$

$\frac{1}{4} \times 32 = 8$. Donc le 1^{er} quartile est le $8^{\text{ème}}$ terme de la série : $Q_1 = 7$

$\frac{3}{4} \times 32 = 24$. Donc le $3^{\text{ème}}$ quartile est le $24^{\text{ème}}$ terme de la série : $Q_3 = 12$

L'écart interquartile est donc $Q_3 - Q_1 = 12 - 7 = 5$

EXERCICES A FAIRE A LA MAISON :

Exercice 1 :

Soit la série suivante :

12	18	14	8	9	10	7	20	15	16	4
14	15	15	1	7	4	6	11	10	8	1
15	7	19	10	16	8	7	12	14	9	11

1. Déterminer la moyenne et l'écart-type de cette série.
2. Dessiner le diagramme en bâton de cette série statistique.
3. Déterminer l'écart interquartile de cette série.

Exercice 2 :

On donne dans le tableau suivant la taille en cm des 20 nourrissons nés dans une maternité au cours d'une semaine.

Taille (x_i)	46	48	49	50	51
Nombre	2	4	6	5	3

Pour les questions qui suivent, on n'utilisera pas le mode statistique de la calculatrice et on détaillera les calculs.

- 1) Calculer la moyenne, le mode, et la médiane de la série.
- 2) Calculer la variance, en déduire l'écart-type.

Exercice 3 :

Le tableau suivant donne le nombre d'abonnés à une société de distribution de gaz en fonction du montant de la dernière facture (en milliers de francs CFA) dans le village.

STATISTIQUE

Montant (x_i)	80	100	120	140	160
Nombre	27	38	19	11	5

On donne la moyenne de la série en milliers de francs CFA : $\bar{x} = 105800 \text{ fcfa}$. Suite à la hausse du prix du pétrole, le distributeur de gaz souhaite augmenter ses tarifs. Il est décidé que tous les tarifs augmentés de 10%, mais qu'une baisse forfaitaire de 10000fcfa sera appliquée à chaque facture.

- 1) Soit x le montant d'une ancienne facture. Exprimer le nouveau montant z suite à l'augmentation de 10%.
- 2) Exprimer, en fonction de x , le montant y de la nouvelle facture après l'augmentation de 10% et la baisse de 10000fcfa.
- 3) Sans faire le calcul des nouveaux montants des factures, déterminer la nouvelle moyenne du montant des factures. En moyenne, pour les habitants de ce village, la facture augmente-t-elle ou diminue-t-elle ?
- 4) Calculer le nouveau montant de la facture d'un villageois qui payait avant 80000fcfa, puis pour une ancienne facture de 160000fcfa.

LECON 2 : SERIES STATISTIQUES GROUPEES

DURÉE : 50min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES:

- Déterminer les caractéristiques de position (mode, médiane, moyenne).
- Déterminer les caractéristiques de dispersion (variance, écart-type)
- Représentation graphique

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

Le tableau ci-dessous donne les tailles des élèves d'une classe de première IH en cm.

158 167 164 161 163 162 165 158 154 160
 157 165 149 162 163 161 166 171 163 160
 162 164 175 173 163 172 165 159 163 169
 169 150 159 155 161 157 152 176 162 161
 162 162 164 157 166 156 168 156 172 160

- 1) Regrouper ces tailles dans les classes suivantes :
 $[149, 159[$, $[159, 164[$, $[164, 169[$ et $[169, 177[$
 Dresser un tableau dans lequel on fera figurer les centres des classes, les effectifs et les fréquences, les densités et les amplitudes.

Résolution :

Classes	$[149, 159[$	$[159, 164[$	$[164, 169[$	$[169, 177[$
Amplitude	10	5	5	8
Centres	154	161.5	166.5	173

STATISTIQUE

Effectifs	12	18	12	8
Fréquences	24%	36%	24%	16%
Densités	1.2	3.6	2.4	1

RESUME :

Une série statistique groupée en classes est caractérisé par les centres des classes, l'amplitude des classes, l'effectif des classes, leur fréquence.

1. Vocabulaire

- Une classe est un intervalle semi-fermé $[a, b[$
- Le centre c_i d'une classe $[a, b[$ est le réel $\frac{a+b}{2}$
- L'amplitude ou l'étendu d'une classe $[a, b[$ est le nombre $b - a$
- L'effectif d'une classe $[a, b[$ est le nombre d'individus de la population étudiée dont les modalités appartiennent à l'intervalle $[a, b[$
- La fréquence d'une classe est le quotient de son effectif par l'effectif total.
- La densité d'une classe est le quotient de son effectif par son amplitude.
- Effectif cumulé croissant c'est la somme des effectifs de la classe et celles qui la précèdent.
- Effectif cumulé décroissant c'est la somme des effectifs de la classe et celles qui la succèdent.
- Fréquence cumulée croissante c'est le quotient de l'effectif cumulé croissante par l'effectif total.
- Fréquence cumulée décroissante c'est le quotient de l'effectif cumulé décroissante par l'effectif total.

2. Paramètres de position

a. Moyenne

La moyenne d'une série statistique groupée est le nombre réel noté $\bar{x}$ tel que :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^p n_i c_i}{N} = \frac{n_1 c_1 + n_2 c_2 + \dots + n_p c_p}{N} \quad (P = \text{nombre de classes, } N = \text{effectif total})$$

b. Classe modale

C'est la classe présentant un effectif ou une fréquence maximale.

c. Mode

C'est le centre de toute classe effectif maximal.

NB : Si les classes ont des amplitudes différentes, alors le mode sera le centre de toute classe de densité maximale.

Exemple :

Dans une coopérative, les titulaires d'un compte d'épargne ont été répartis comme suit, d'après leur dépôt en milliers de francs CFA.

STATISTIQUE

Masse	[100, 120[	[120, 140[	[140, 160[	[160, 180[	[180, 200[	[200, 220[
Effectif	16	33	44	55	38	14
centres	110	130	150	170	190	210
$n_i \times c_i$	1760	4290	6600	9350	7220	2940

1. Quelle est la classe modale et le mode
2. Dresser le tableau des centres des classes associées à la série précédente.
3. Calculer le dépôt moyen d'un compte dans cette coopérative.

Solution :

1. La classe modale de cette série statistique est [160, 180[car c'est elle qui a le plus grand effectif.

Le mode est $\frac{160+180}{2} = 170$

2. Dressons le tableau des centres des classes associées à la série précédente.
3. Calcul du dépôt moyen d'un compte dans cette coopérative.

$$\bar{x} = \frac{16 \times 110 + 33 \times 130 + 44 \times 150 + 55 \times 170 + 38 \times 190 + 14 \times 210}{200} = \frac{32160}{200} = 160.8$$

Le dépôt moyen est de **160 800 FCFA**

3. Paramètres de dispersion

a. La variance et écart type

La variance d'une série statistique groupée notée V est égale à :

$$V = \frac{\sum n_i (\bar{x} - c_i)^2}{N} = \frac{n_1 (\bar{x} - c_1)^2 + n_2 (\bar{x} - c_2)^2 + \dots + n_p (\bar{x} - c_p)^2}{N}$$

NB : On remarquera que les formules de la moyenne et de la variance dans le cas de la série statistique groupée sont similaires à celles illustrées dans la série statistique non groupée, à la différence que les modalités x_i sont substituées dans ce cas par les centres c_i des classes.

L'écart type est la racine carrée de la variance et se note donc $\sigma = \sqrt{V}$

Exemple :

Reprenons l'exemple précédent et calculons la variance et l'écart type de cette série statistique.

$$V = \frac{5320000}{200} = 26600 \text{ Donc } \sigma = \sqrt{26600} = 163.09$$

4. Représentations graphique

a. Histogramme

C'est un ensemble de rectangle juxtaposés, **la largeur** étant proportionnelle à **l'amplitude de la classe**, **la hauteur** proportionnelle à la **densité de la classe**.

STATISTIQUE

(NB : Lorsque les classes sont de même amplitude, alors la hauteur est proportionnelle à l'effectif. Dans ce cas, l'histogramme est confondu au diagramme en bandes.)

b. Diagrammes en bandes

Les bandes qui composent ce diagramme sont des petits rectangles dont les bases ont mêmes, longueurs et les hauteurs sont proportionnelles à l'effectif des modalités.

c. Polygones des effectifs cumulés croissants

Le polygone des effectifs cumulés croissants est représenté de la manière suivante.

- Placer le premier point d'abscisse la borne inférieure de la première classe d'ordonnée 0.
- Placer les autres points d'abscisse les bornes supérieures des classes et d'ordonnées les effectifs cumulés croissants correspondants.
- Joindre ces points par des segments.

d. Polygones des effectifs cumulés décroissants

Le polygone des effectifs cumulés décroissants s'obtient en construisant les points dont les abscisses sont les bornes inférieures des classes (sauf le dernier point ou la borne est supérieure) et dont les ordonnées sont les effectifs cumulés décroissants correspondant (sauf le dernier point ou l'ordonnée est 0).

Remarque : soit N l'effectif total, le polygone des effectifs cumulés croissants et décroissants se coupent au **point d'ordonnée $\frac{N}{2}$** .

NB : On construit de manière analogue les polygones des fréquences cumulées croissantes et décroissantes.

e. Médiane

Pour déterminer graphiquement la médiane, deux méthodes sont utilisées :

Première méthode :

Tracer le polygone des fréquences cumulées croissantes. La médiane sera l'abscisse du point du polygone dont l'ordonnée est **0.5 ou 50%**

Deuxième méthode :

Tracer les polygones des effectifs cumulés croissants et décroissants. La médiane sera l'abscisse du point d'intersection des deux polygones.

EXERCICES D'APPLICATIONS :

EXERCICE 1 :

Dans un parc automobile constitué de 50 taxis de ville, on a relevé sur les tableaux de bord, le nombre de kilomètres parcouru par chaque taxi et les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous.

STATISTIQUE

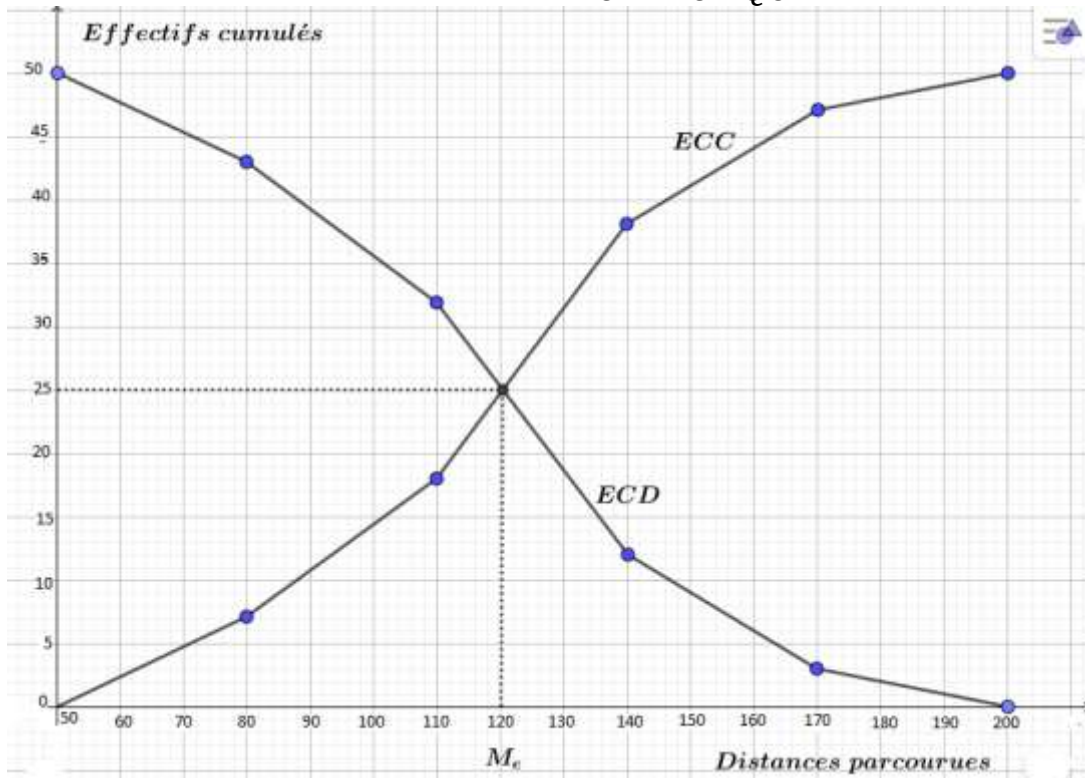
Distances parcourues (en milliers de kilomètres)	[50,80[	[80,110[	[110,140[	[140,170[	[170,200[	Total
Nombre de taxis ou effectif	7	11	20	9	3	50
Centres	65	95	125	155	185	-----
ECC	7	18	38	47	50	-----
ECD	50	43	32	12	3	

- Combien de taxis de ce parc ont parcourue moins de 140.000 km ?
- Calculer la distance moyenne parcourue par les taxis de ce parc.
- Donner la classe modale de cette série statistique.
- Construire le polygone des effectifs cumulés croissants et décroissants, puis en déduire une valeur approchée de la médiane.

Solution :

- Déterminons le nombre de taxis de ce parc qui ont parcouru moins de 140 000 km.
Soit n , le nombre de taxis de ce parc ayant parcouru moins de 140000 km. On a :
 $n = 7 + 11 + 20 = 38$. Soit **$n = 38$ taxis**
- Calculons la distance moyenne parcourue par les taxis de ce parc.
Soit d_m la distance moyenne en milliers de kilomètres parcourue par les taxis de ce parc.
On a : $d_m = \frac{7 \times 65 + 11 \times 95 + 20 \times 125 + 9 \times 155 + 3 \times 185}{50} = \frac{5950}{50} = 119$
Donc **la distance moyenne parcourue par les taxis de ce parc est égale à 119 000 km.**
- Donnons la classe modale de cette série statistique.
La classe modale de cette série statistique est la classe **[110, 140[**
- Construisons le polygone des effectifs cumulés croissants et décroissants, puis déduisons-en une valeur approchée de la médiane.

STATISTIQUE



Déduction : les deux polygones de coupent en point dont l'abscisse est proche de 120.5. Donc une valeur approchée de la médiane est **120500 km**.

EXERCICE 2:

Monsieur Moussa est enseignant de Mathématiques au lycée technique de Dschang. Après la correction du probatoire blanc dans sa classe, il relève les notes ainsi que qu'il suit :

2 ; 5 ; 8,5 ; 12 ; 1,5 ; 6 ; 9 ; 13 ; 2 ; 7 ; 8,5 ; 14 ; 4 ; 8 ; 8,5 ; 14 ; 6,5 ; 10 ; 4 ; 5 ; 10 ; 3 ; 10,5 ; 11 ; 11,5.

On rappelle que si $[x_i, x_{i+1}[$ désigne une classe, son centre est $c_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$

1. Remplir le tableau suivant :

Classe	[1,5; 5[	[5; 8,5[	[8,5; 12[	[12; 15,5[	Total
Effectif					
Fréquence (%)					
Centre					

- Déterminer la classe modale de cette série statistique.
- Quelle est la nature du caractère de cette série ?
- Déterminer la moyenne de cette série.

STATISTIQUE

Solution :

1. Remplissons le tableau suivant :

Classe	[1,5; 5[	[5; 8,5[	[8,5; 12[	[12; 15,5[	Total
Effectif (n_i)	6	6	9	4	25
Fréquence (%)	24	24	36	16	100
Centre (c_i)	3,25	6,75	10,25	13,75	34
$n_i \times c_i$	19,5	40,5	92,25	55	207,25

2. [8, 5; 12[est la classe modale de cette série statique.
 3. Le caractère de cette série est **quantitatif**.
 4. Moyenne de cette série statistique notée $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i c_i}{N} = \frac{207,25}{25} = 8,29 \quad \text{Donc } \bar{x} = 8,29$$

EXERCICE 3:

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases} 5a + 9b = 102 \\ a + b = 18 \end{cases}$
 2. Les notes obtenues en mathématiques par 35 candidats d'un centre d'examen à un probatoire IH sont regroupées en classes dans le tableau suivant.

Notes	[0; 4[	[4; 8[	[8; 12[	[12; 16[	[16; 20[
Effectifs	3	9	x	5	y

Déterminer x et y sachant que la moyenne arithmétique de cette série est $\frac{334}{35}$

Solution :

1. Résolution du système dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} 5a + 9b = 102 & (1) \\ a + b = 18 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow a = 18 - b$$

$$(2) \text{ dans } (1) \text{ donne } \Leftrightarrow 5(18 - b) + 9b = 102 \Leftrightarrow 4b + 90 = 102 \Leftrightarrow b = 3$$

$$\text{Ainsi on a } a = 18 - 3 = 15$$

$$\text{Donc } S = \{(15; 3)\}$$

2. Déterminons x et y

$$\bar{x} = \frac{334}{35}$$

$$\bar{x} = \frac{2 \times 3 + 9 \times 6 + 10x + 14 \times 5 + 18y}{35} = \frac{6 + 54 + 10x + 70 + 18y}{35}$$

$$\text{STATISTIQUE}$$

$$= \frac{10x+18y+130}{35}$$

On a alors : $\frac{10x+18y+130}{35} = \frac{334}{35}$ Soit $10x + 18y + 130 = 334$
 $\Leftrightarrow 5x + 9y + 65 = 167 \Leftrightarrow 5x + 9y = 102$.

L'effectif total est $3 + 9 + x + 5 + y = 35$, soit $x + y = 18$

On obtient alors le système : $\begin{cases} 5x + 9y = 102 \\ x + y = 18 \end{cases}$

On en déduit alors à l'aide du système précédent que $x = 15$ et $y = 3$.

EXERCICE A FAIRE A LA MAISON :

Afin de centrer les lunettes en face des pupilles, les opticiens mesurent "l'écartement inter pupillaire". L'unité de mesure habituellement utilisé est le millimètre (mm). On a mesuré cet écartement, noté e , pour cinquante individus. Les résultats sont regroupés par classes dans le tableau ci-dessous.

$e(mm)$	[55; 57[	[57; 59[	[59; 61[	[61; 63[	[63; 65[	[65; 67[	[67; 69[	[69; 71[
Nombre	3	6	11	9	7	7	5	2

1. Donner la moyenne et l'écart-type de cette série statistique.
2. Tracer le polygone des effectifs cumulés décroissants puis déduire la médiane de cette série statistique.
3. Donner les premier et troisième quartiles de la série.
4. En expliquant brièvement déterminer "manuellement" les premier et neuvième déciles.
5. Calculer le pourcentage d'individu ayant un écartement inter pupillaire supérieur ou égale à 63mm

ENTRAINE-TOI

EXERCICE 1 :

Le tableau ci-dessous présente les notes (sur 20) en mathématiques obtenues par 60 élèves de première lors d'une évaluation

Notes	02	05	08	10	12	13	15	18
Effectifs	8	15	12	2	7	9	3	4

- 1) Déterminer le mode et la moyenne de cette série statistique
- 2) Calculer l'écart moyen de cette série statistique
- 3) Calculer la médiane de cette série statistique
- 4) a) Déterminer la variance de cette série statistique

STATISTIQUE

- b) Déduire son écart type
- 5) a) Déterminer le premier quartile Q_1 et le troisième quartile Q_3 de cette série
- b) Déduire son écart interquartile
- 6) a) Calculer la première décile D_1 et la neuvième décile D_9 de cette série
- b) Déduire son écart interdécile

EXERCICE 2 :

On repartit les pointures d'un stock de 60 chaussures dans le tableau ci-dessous

Pointures	38	39	40	41	42	43	44
Effectifs	6	8	3	13	11	12	7

- 1) Déterminer le mode de cette série statistique
- 2) a) Dresser le tableau des effectifs cumulés croissant de cette série
- b) Quel est le nombre de chaussures dont la pointure est supérieure à 41
- c) Quel est le nombre de chaussures dont la pointure est comprise strictement entre 39 et 43
- d) Déterminer la médiane de cette série statistique
- 3) Calculer la pointure moyenne de ce stock de chaussures
- 4) Calculer la variance et l'écart type de cette série statistique
- 5) a) Déterminer le premier quartile Q_1 et le troisième quartile Q_3 de cette série
- b) Déduire son écart interquartile
- 6) a) Calculer la première décile D_1 et la neuvième décile D_9 de cette série
- c) Déduire son écart interdécile

EXERCICE 3 :

Une étude statistique a portée sur la taille (en cm) des élèves d'une classe de première et les résultats ont été regroupés en classe et placés dans le tableau ci-dessous

Classes	[145;155[	[155;165[	[165;175[	[175;185[	Total
Effectif	10	20	15	5	
Centre					
Effectif cumulé croissant (ECC)					

- 1) Recopie et complète le tableau ci-dessus
- 2) a) Quelle est la classe modale de cette série statistique
- b) Quel est le nombre de d'élèves ayant une taille inférieure à 165cm ?
- d) Quel est le nombre d'élèves ayant une taille supérieure à 175 cm ?
- 3) Calculer la moyenne, la variance et l'écart type de cette série statistique ?
- 4) Construire l'histogramme représentant cette série
- 5) a) Construire le polygone des effectifs cumulés croissant de cette série statistique
- b) Déterminer graphiquement la médiane

EXERCICE 4 :

Après une évaluation, les notes de mathématiques de 60 élèves d'une classe de 1^{ère} ont été regroupées dans le tableau ci-dessous

STATISTIQUE

Notes	[0 ;4[	[4 ;8[	[8 ;12[	[12 ;16[	[16 ;20[
Effectifs		12	15		3
Fréquences (en %)	30				
Fréquences cumulées croissantes		50			

- 1) Recopie et complète le tableau ci-dessus
- 2) Calculer le pourcentage des élèves ayant une note supérieure ou égal à 12/20
- 3) a) Construire le polygone des fréquences cumulées croissantes
c) Déterminer graphiquement la médiane
- 4) Quelle est la note moyenne de ces élèves en mathématique ?

EXERCICE 5 :

- 1) Dire clairement ce qu'on entend par série chronologique
- 2) Donner le principal objectif de l'étude d'une série chronologique
- 3) Donner et décrivez un exemple précis de série chronologique et donner une raison valable de l'étude de cette série

CHAPITRE 8 : SUITES NUMERIQUES

MOTIVATION : Dans la vie de nos jours, nous sommes souvent emmenés à déterminer l'évolution d'un compte dans une banque ou l'évolution des dossiers d'une entreprise. Ce chapitre nous permettra de mieux appréhender ces différentes situations.

LECON 1 : GENERALITES

DUREE : 50 minutes

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES:

- Reconnaître une suite numérique
- Représenter graphiquement les termes d'une suite numérique.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

M.Dydé a 150.000F dans son compte d'épargne le 1^{er} janvier 2021. Il en ajoute 20000 f chaque mois. En quel moment pourra-t'il s'offrir un téléphone portable de marque tecno qui coûte 310.000 f ?

On désigne respectivement par u_0, u_1, u_2, u_3 les comptes respectifs de M.Dydé en janvier, février, mars et avril 2021.

1. Déterminer u_0, u_1, u_2 et u_3 .
2. On note par u_n la valeur de son compte dans n mois.
 - a) Exprimer u_n en fonction de n.
 - b) Calculer u_8 et répondre à la question posée.

Résolution :

1. On a $u_0 = 150.000$ en janvier,

$u_1 = 150.000 + 20.000 = 170.000$ f en février,

$u_2 = 170.000 + 20.000 = 190.000$ f en mars,

$u_3 = 190.000 + 20.000 = 210.000$ f en avril.

2.a) $u_0 = 150.000 + 20.000 \times 0$,

$u_1 = 150.000 + 20.000 \times 1$, $u_2 = 150.000 + 20.000 \times 2$, $u_3 = 150.000 + 20.000 \times 3$,

Ainsi de suite, on obtient $u_n = 150.000 + 20.000 \times n$.

b) On a $u_8 = 150.000 + 20.000 \times 8 = 310.000$ f.

M.Dydé pourra s'offrir son téléphone 8 mois plus tard c'est-à-dire en septembre 2021.

RESUME :

1. Définitions

- Une suite u est une fonction dont l'ensemble de départ est $\mathbb{N}$ et l'ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$. Elle associe à chaque nombre entier naturel un nombre réel et un seul.

On note : la suite u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ qui à n associe u_n ou simplement (u_n) .

- L'ensemble de départ peut aussi être $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$ ou toute autre partie de $\mathbb{N}$.
- On dit que u_n est le terme de rang n .

Exemple 1 : Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{n}{n+1}$. Calculons les 4 premiers termes.

On a : $u_0 = \frac{0}{0+1} = 0$, $u_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$, $u_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$.

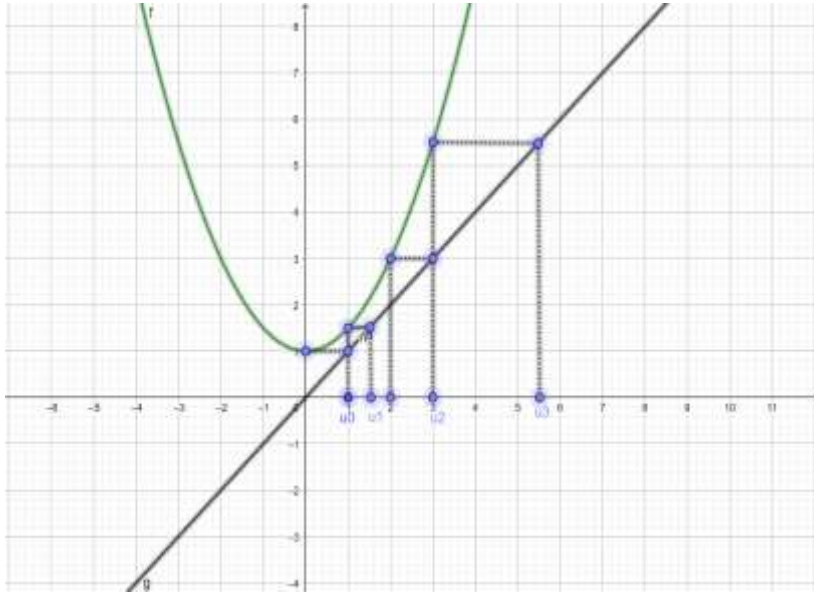
SUITES NUMERIQUES

Exemple 2 : (v_n) est la suite définie par : $v_{n+1} = 2v_n - 1$ et $v_0 = 3$. Calculons les 4 premiers termes. On a $v_0 = 3$, $v_1 = 2v_0 - 1 = 2 \times 3 - 1 = 5$, $v_2 = 2v_1 - 1 = 2 \times 5 - 1 = 9$, $v_3 = 2v_2 - 1 = 2 \times 9 - 1 = 17$.

2. Représentations graphique :

Exemple 1 : Représentation graphique du type $u_n = f(n)$.

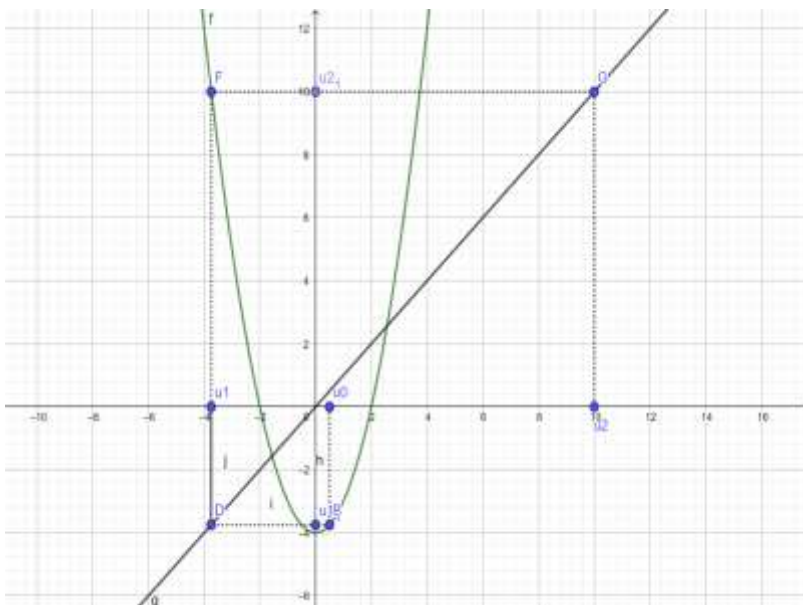
Voici le tracé de la courbe d'une fonction numérique f . On a représenté graphiquement sur l'axe des abscisses les termes u_0, u_1, u_2 et u_3 de la suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$.



Méthode : On trace la droite (D) : $y=x$. $u_0 = f(0)$ est repéré sur l'axe des ordonnées, est projeté horizontalement sur la droite (D) et enfin projeté verticalement sur l'axe des abscisses. De la même façon, on représente les autres termes sur l'axe des abscisses

Exemple 2 : Représentation graphique du type $u_{n+1} = f(u_n)$

Voici le tracé de la courbe d'une fonction numérique f . On a représenté graphiquement sur l'axe des abscisses les termes u_0, u_1, u_2 et u_3 de la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = \frac{1}{2}$



Méthode : On trace la droite d'équation (D) ; $y=x$ (première bissectrice). On place le premier terme u_0 sur l'axe des abscisses et on place son image u_1 sur l'axe des ordonnées. On projette u_1 parallèlement à l'axe des abscisses sur (D) et on projette le point obtenu sur l'axe des abscisses ; on vient d'obtenir u_1 sur l'axe des abscisses. De façon analogue on place les autres termes de la suite.

EXERCICES D'APPLICATIONS :

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite de terme général u_n :

SUTES NUMERIQUES

a) $u_n = \sin \frac{n\pi}{4}$, b) $u_n = \frac{2n^2-3}{n}$, c) $u_n = \sqrt{n-1}$, d) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n} \end{cases}$

2.a) Etudier la fonction f définie par : $f(x) = x + \frac{1}{x}$ et tracer sa courbe représentative.

b) Représenter alors sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite (u_n) de terme général : $u_n = n + \frac{1}{n}$ pour tout entier $n > 0$.

LECON 2 : SUITES ARITHMETIQUES

DUREE : 50 mi

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES:

- Montrer qu'une suite numérique est arithmétique
- Déterminer le terme général d'une suite arithmétique
- Calculer la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique.

GENERALITES

DUREE : 50 mi

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

Observe attentivement la suite de nombres suivants et dire ce que tu constates dans chacun des cas suivants :

- a) $-7 ; -4 ; -1 ; 2 ; 5 ; 8 ; \dots$
b) $12,4 ; 14,1 ; 15,8 ; 17,5 ; \dots$

Résolution :

- a) On a une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme -7 car on passe d'un terme au terme suivant en ajoutant 3.
b) On a une suite arithmétique de raison 1,7 et de premier terme 12,4 car on passe d'un terme au terme suivant en ajoutant 1,7.

RESUME :

Définitions

Une suite numérique (u_n) est une suite **arithmétique** si et seulement si une des conditions suivantes est vérifiée :

- **On passe d'un terme au terme suivant en ajoutant** toujours le **même nombre** r appelé raison de la suite. C'est-à-dire $u_{n+1} = u_n + r$, pour toute valeur n de $\mathbb{N}$.

(Cette égalité est appelée formule de récurrence).

- La différence entre deux termes consécutifs quelconques est constante et égale à un nombre r , c'est à dire $u_{n+1} - u_n = r$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Exemple : Soit $u_n = 2n + 8$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a $u_{n+1} - u_n = 2(n+1) + 8 - (2n+8) = 2n+2+8-2n-8 = 2 = \text{constante}$.

Donc (u_n) est une suite arithmétique de raison $r=2$.

Propriété1 :

- Si la suite (u_n) est arithmétique de premier terme u_0 et de raison r alors on a : $u_n = u_0 + nr =$ 1^{er} terme + $r \times$ écart entre 0 et n .
➤ De façon générale, $u_n = u_k + (n-k)r$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Exemple :

SUTES NUMERIQUES

(u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 10$ et de raison $r=3$.

On a $u_n = 10 + 3(n - 1) = 3n + 7$.

Propriété2

- Si la suite (u_n) est arithmétique de 1^{er} terme u_0 et de raison r ,
Alors on a : $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$.
- Si la suite (u_n) est arithmétique de 1^{er} terme u_1 et de raison r ,
Alors on a : $u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$.
- Dans tous les cas on a : Somme des 1^{er} termes = $\frac{\text{nombre des termes}}{2}(\text{1er terme} + \text{dernier terme})$.

Exemple :

(u_n) est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r=10$.

Alors $u_0 + u_1 + \dots + u_{100} = \frac{101}{2}(u_0 + u_{100}) = \frac{101}{2}(5 + (5 + 5 \times 100)) = 25755$.

EXERCICES D'APPLICATIONS :

Exercice1 :

Soient les 3 premiers termes d'une suite arithmétique (u_n) : 2,3 ; 5,2 ; 8,1 ;

1. Justifier pourquoi cette suite est arithmétique et exprimer u_{n+1} en fonction de u_n
2. Donner le terme suivant.
3. Donner le 1^{er} terme noté u_0 et exprimer u_n en fonction de n .

Exercice2 :

Soit $u_n = 10 - 4n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_0, u_1, u_{10}
2. Démontrer que la suite (u_n) est arithmétique.
3. Déterminer son 1^{er} terme et sa raison.

Exercice3 :

(u_n) est une suite arithmétique avec $u_0 = 100$ et $r = 25$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_{10}
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis u_n en fonction de n .
3. Calculer la somme $A=u_0 + u_1 + \dots + u_{19}$ et $B=u_1 + u_2 + \dots + u_{12}$

LECON 3 : SUITES GEOMETRIQUES

DUREE : 50 minutes

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES:

- Montrer qu'une suite numérique est géométrique.
- Déterminer le terme général d'une suite géométrique
- Calculer la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE

Observe attentivement la suite de nombres suivants et dire ce que tu constates dans chacun des cas suivants :

- a) 10 ; 12 ; 14,4 ;
- b) 100 ; 50 ; 25 ; 12,5 ;

SUTES NUMERIQUES

Résolution :

- a) On a une suite géométrique de raison 1,2 et de premier terme 10 car on passe d'un terme au terme suivant en multipliant par 1,2.
- b) On a une suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme 100 car on passe d'un terme au terme suivant en multipliant par 0,5.

RESUME :

Définitions

Une suite (u_n) est **géométrique** si et seulement si une des conditions suivantes est vérifiée :

- **On passe d'un terme au terme suivant en multipliant** toujours par le même nombre q appelé raison de la suite . C'est-à-dire $u_{n+1} = u_n \times q$ pour $n \in \mathbb{N}$.

(Cette égalité est appelée formule de récurrence).

- Le quotient de deux termes consécutifs est constant et égal à un nombre q ,

C'est-à-dire $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Exemple

Soit $u_n = 2 \times 5^n$ pour tout entier naturel n . Alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2 \times 5^{n+1}}{2 \times 5^n} = \frac{5^{n+1}}{5^n} = 5 = \text{constante}$.

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $q=5$.

Propriété 1 :

- Si la suite (u_n) est géométrique de 1^{er} terme u_0 et de raison q , alors
On a : $u_n = u_0 \times q^n = \text{1er terme} \times (q \text{ à la puissance l'écart entre 0 et } n)$.
- Si la suite (u_n) est géométrique de 1^{er} terme u_1 et de raison q , alors
On a : $u_n = u_1 \times q^{n-1} = \text{1er terme} \times (q \text{ à la puissance l'écart entre 1 et } n)$.

Exemple :

Soit (u_n) une suite géométrique de 1^{er} terme $u_1 = 10$ et de raison 1,5.

$$u_n = 10 \times 1,5^{n-1}$$

Propriété 2

- Si la suite (u_n) est géométrique de 1^{er} terme u_0 et de raison $q \neq 1$ alors,
On a : $u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
- Si la suite (u_n) est géométrique de 1^{er} terme u_1 et de raison $q \neq 1$ alors,
On a : $u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$
- Dans tous les cas on a : **Somme des 1^{er} termes = 1er terme $\times \frac{1-q^{\text{nb termes}}}{1-q}$, $q \neq 1$.**

Exemple :

(u_n) est une suite géométrique de 1^{er} terme $u_0 = 5$ et de raison $q = 1,1$.

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{100} = 5 \times \frac{1 - 1,1^{101}}{1 - 1,1} = 757883,67$$

EXERCICES D'APPLICATION :

Exercice1 :

Soient les 3 premiers termes d'une suite géométrique (u_n) : 2,3 ; 2,76 ; 3,312 ;

1. Justifier pourquoi cette suite est géométrique et exprimer u_{n+1} en fonction de u_n

SUTES NUMERIQUES

- Donner le terme suivant.
- Donner le 1^{er} terme noté u_0 et exprimer u_n en fonction de n .

Exercice2 :

Soit $u_n = 10 \times 4^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Calculer u_0, u_1, u_{10}
- Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.
- Déterminer son 1^{er} terme et sa raison.

Exercice3 :

(u_n) est une suite géométrique avec $u_0 = 10$ et $q = 1,05$.

- Calculer u_1, u_2 et u_{10}
- Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis u_n en fonction de n .
- Calculer la somme $A = u_0 + u_1 + \dots + u_{19}$ et $B = u_1 + u_2 + \dots + u_{12}$



ENTRAINE-TOI

EXERCICE 1 :

Soit une suite définie par $u_n = 7 + 5n \forall n \in \mathbb{N}$

- Calculer u_1, u_2 et u_{14}
- Démontrer que cette suite est arithmétique (on donnera sa raison et son premier terme)
- On pose $A = u_0 + u_1 + \dots + u_{14}$ et $B = u_{21} + u_{22} + \dots + u_{40}$

Calculer les nombres A et B

EXERCICE 2 :

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5000$ et de raison $r = 200$

- Déterminer u_1, u_2 et u_{10}
- Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis u_n en fonction de n
- Calculer la somme $A = u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$

EXERCICE 3 :

Soit une suite définie par $u_n = 5 \times 2^n \forall n \in \mathbb{N}$

- Calculer u_1, u_2 et u_{14}
- Démontrer que cette suite est géométrique (on donnera sa raison et son premier terme)
- On pose $A = u_0 + u_1 + \dots + u_{14}$ et $B = u_{21} + u_{22} + \dots + u_{40}$

Calculer les nombres A et B

EXERCICE 4 :

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme $u_0 = 500$ et de raison $q = 1,03$

- Déterminer u_1, u_2 et u_{10}
- Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis u_n en fonction de n
- Calculer la somme $A = u_0 + u_1 + \dots + u_{10}$

SUTES NUMERIQUES

EXERCICE 5 :

On considère la suite numérique u définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = -3n + 2$

- 1) Calculer u_3 et u_{21}
- 2) Montrer que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n - 3$
- 3) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de u
- 4) Calculer la somme $A = u_3 + u_1 + \dots + u_{21}$

EXERCICE 6 :

Une entreprise propose à chacun de ses employés le contrat suivant pour leur rémunération : 2 500 000 FCFA la première année et une augmentation de 300 000 FCA par an. On note u_n le salaire d'un employé au bout de n années de service

- 1) Calculer u_1, u_2 et u_3
- 2) Exprimer pour tout entier naturel n u_{n+1} en fonction de u_n
- 3) Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n = 300\,000n + 2\,500\,000$
- 4) Déduire le salaire annuel d'un employé au bout de 10 ans de service
- 5) Au bout de combien d'années le salaire d'un employé sera égal à 6 700 000 FCFA
- 6) Monsieur NGUEKAM employé dans cette entreprise pendant 30 ans ne vivait que de ses avantages de service et gardait son salaire dans un compte pour lancer une activité à sa retraite. Combien M NGUEKAM dispose-t-il pour son activité ?

EXERCICE 7 :

Sur un bulletin de solde de certains employés d'une entreprise de la place figure un nombre appelé « indice » on s'intéresse aux bulletins de solde des employés **BABA** et **ALI**.

En 2010, l'indice de BABA est noté u_0 et celui de ALI est noté v_0 . On suppose que $u_0 = v_0 = 500$. Chaque année, l'indice de BABA augmente de 75 points tandis que celui de ALI augmente de 15%.

On note u_n l'indice de BABA pour l'année 2010+n et v_n l'indice de ALI la même année

- 1) Calculer u_1, u_2, v_1 et v_2
- 2) a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis v_{n+1} en fonction de v_n
b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de chacune des suites (u_n) et (v_n)
c) Justifier que pour tout entier naturel n , $u_n = 500 + 75n$ et $v_n = 500(1,15)^n$
d) En déduire l'indice de BABA et celui de ALI en 2022 (on donnera la valeur arrondie à l'unité supérieure)
- 3) En quelle année BABA aura un indice égal à 2000 ?

EXERCICE 8 :

Monsieur NGUEKAM veut garder une somme de 500 000 FCFA dans une banque le 01/01/2022. Une banque A propose un **taux d'intérêt annuel simple de 10%** tandis qu'une banque B propose un **taux d'intérêt annuel composé de 6%**

I. DANS LA BANQUE A

- 1) Déterminer la somme qu'aura M. NGUEKAM le 01/01/2023 et le 01/01/2024

On note u_n la somme qu'aura M. NGUEKAM le 01/01/2022+n

- 2) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis déduire la nature et les éléments caractéristiques de la suite (u_n)
- 3) Donner l'expression de u_n en fonction de n

SUTES NUMERIQUES

4) Déduire la somme totale qu'aura M. NGUEKAM le 01/01/2043

II. DANS LA BANQUE B

1) Déterminer la somme qu'aura M. NGUEKAM le 01/01/2023 et le 01/01/2024

On note v_n la somme qu'aura M. NGUEKAM le 01/01/2022+n

2) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n puis déduire la nature et les éléments caractéristiques de la suite (v_n)

3) Donner l'expression de v_n en fonction de n

4) Déduire la somme totale qu'aura M. NGUEKAM le 01/01/2043

III. Quelle est la meilleure banque pour M. NGUEKAM s'il veut enlever son argent le 01/01/2043 ?

CHAPITRE 9 : TRANSFORMATIONS DU PLAN

MOTIVATION : Au quotidien, il nous arrive de nous interroger sur le lien qui existe entre les parties du motif d'un page, d'une œuvre d'art. Il nous arrive aussi de nous interroger sur les phénomènes physiques qui se produisent dans les miroirs, les loupes, les lunettes astronomiques entre autres.

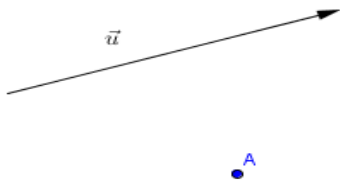
LECON 1 : TRANSLATION

DURÉE : 50 min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES: A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de mobiliser les propriétés de la translation pour résoudre des problèmes de construction.

PRÉ-REQUIS

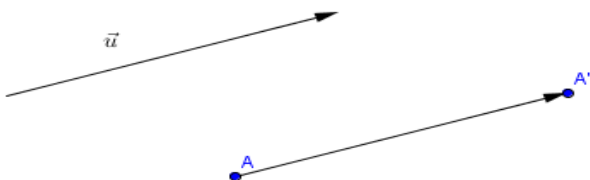
On considère un point A et un vecteur $\vec{u}$ du plan.



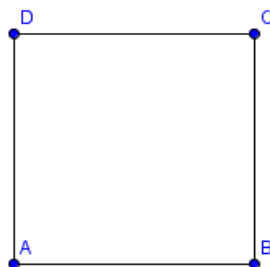
- Construire le point A' tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AA'}$.
- Quelle application dépendant de $\vec{u}$ transforme A en A' ?

Solution :

- C'est la translation de vecteur $\vec{u}$.

**ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :**

Activité 1 : On considère le carré ABCD de côté 3 centimètres.

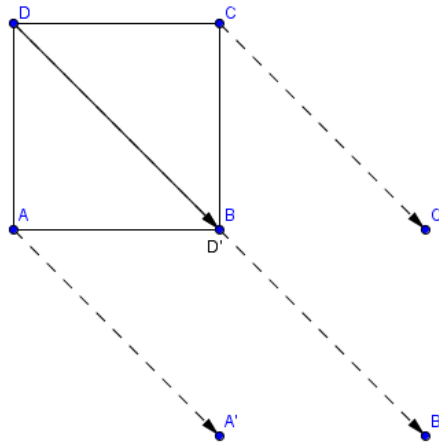


TRANSFORMATIONS DU PLAN

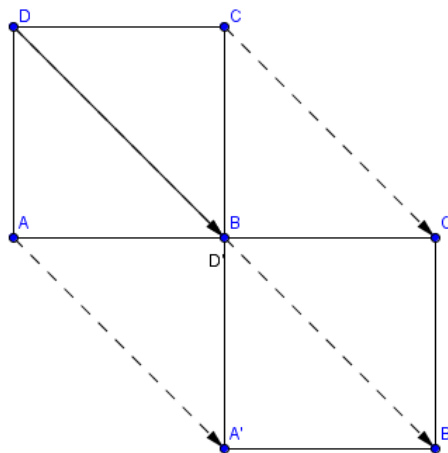
- a) Construis les images A', B', C' et D' respectivement des points A, B, C et D par la translation de vecteur $\overrightarrow{DB}$.
- b) Comparer les propriétés géométriques de $ABCD$ et $A'B'C'D'$ (la nature, les distances, les aires ,le sens des angles orientés)

Résolution :

a)



b)



On constate que $A'B'C'D'$ est un carré de côté 3 centimètres ; par conséquent on peut dire qu'il a les mêmes propriétés géométriques que $ABCD$.

Activité 2 : Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit t une translation de vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du plan et $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ son image par t .

- a) Quelle relation existe entre M, M' et $\vec{u}$?
- b) Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{MM'}$ dans ce repère.
- c) Exprimer x' en fonction de x et a ; exprimer y' en fonction de y et b .

Résolution :

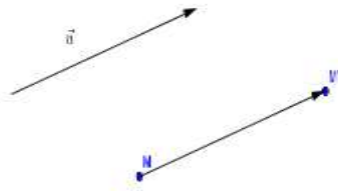
- a) $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.
- b) $\overrightarrow{MM'} \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix}$.

TRANSFORMATIONS DU PLAN

- c) $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ équivaut à dire que $\begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ainsi $\begin{cases} x' - x = a \\ y' - y = b \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$, cette expression est appelée **expression analytique** de t .

RÉSUMÉ :

Définition : Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. On appelle **translation de vecteur $\vec{u}$** notée $t_{\vec{u}}$ toute application du plan dans lui-même qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.



Propriétés :

- La translation de vecteur nul est l'application identité Id (qui transforme tout point en lui-même).
- Les translations conservent : les distances, le sens des angles orientés, les aires, les barycentres...

Propriété : Caractérisation d'une translation

Soit f est une application du plan dans lui-même.

f est une **translation** si et seulement si, pour tous points M et N d'images respectives M' et N' , on a

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$$

Propriété : (Composée de deux translations)

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

La composée $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}}$ des translations de vecteurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

$$\text{On a } t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u} + \vec{v}}$$

– Expression analytique d'une translation

Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $t_{\vec{u}}$ une translation de vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du plan et $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ son image par $t_{\vec{u}}$.

L'expression analytique de la translation de vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est $\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$.

EXERCICE D'APPLICATION :

Exercice d'application 1 :

1. Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ un vecteur du plan.

(a) Ecrire l'expression analytique de la translation de vecteur $\vec{u}$.

(b) Quelles sont les coordonnées de l'image N' du point $N \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ par cette translation ?

2. Quelle est la nature et les éléments caractéristiques de la transformation qui a pour expression analytique

$$\begin{cases} x' = x + 6 \\ y' = y - 9 \end{cases}$$

Exercice d'application 2 :

Soit ABCD un parallélogramme.

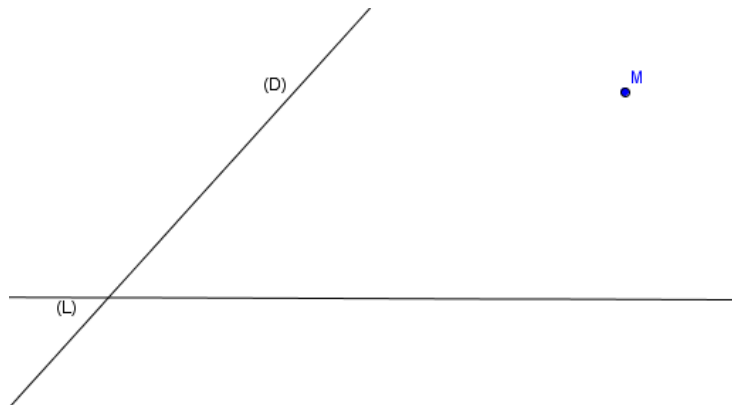
Montrer que $t_{\overline{AC}} \circ t_{\overline{BD}} = t_{\overline{AD}} \circ t_{\overline{BC}}$

LECON 2 : PROJECTION

DUREÉ : 50 min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES: A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de mobiliser les propriétés des projections pour résoudre des problèmes de construction.

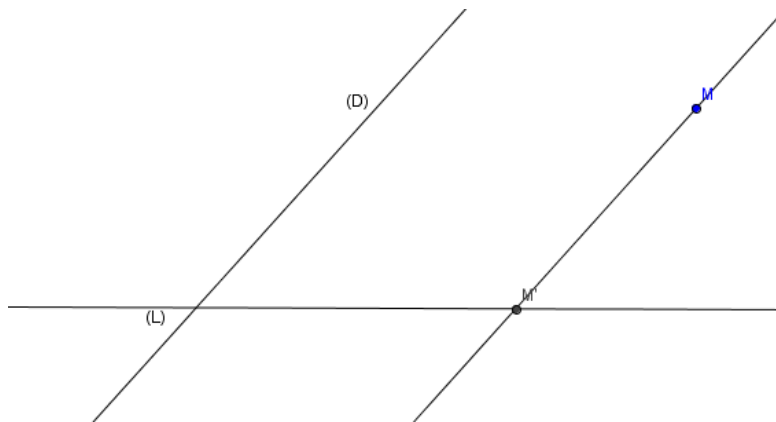
PRÉ-REQUIS : On considère la figure ci-dessous :



- Construire la droite (D') parallèle à (L) passant par M.
- Marque M', point d'intersection de (D') et de (D).

Solution :

a)



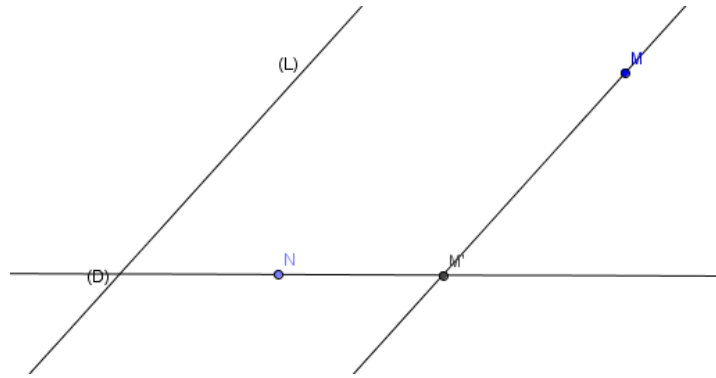
- Le point M' point est appelé **projeté sur la droite (L) parallèlement à la droite (D)** du point M.

ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE : Soient deux droites sécantes (D) et (L), P la projection sur la droite (D) parallèlement à la droite (L) et le point M', image du point M par la projection P. Soit $N \in (D)$.

- Déterminer $P(N)$.
- Déterminer $P(P(M))$.

Résolution :

TRANSFORMATIONS DU PLAN



- a) Comme $N \in (D)$, on conclut que $P(N)=N$.
- b) On sait que $M' = P(M) \in (D)$ par conséquent $P(P(M)) = P(M)$.

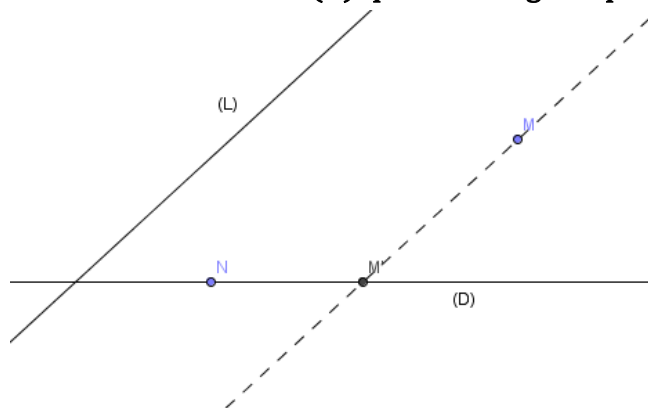
RESUME :

- Définition

Soient (D) et (L) deux droites sécantes.

On appelle **projection sur (D) parallèlement à la droite (L)** la transformation du plan dans le plan qui, à chaque point M associe M' , point commun à la droite (D) et à la droite parallèle à (L) passant par M .

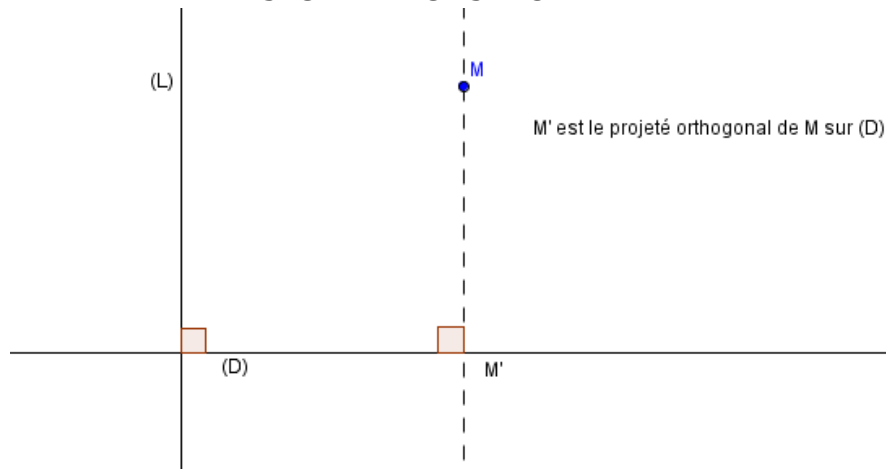
Pour construire l'image d'un point M par la **projection sur (D) parallèlement à la droite (L)** , on construit d'abord la droite parallèle à (L) passant par le point M ; enfin on identifie le point d'intersection de la droite construite et la droite (D) qui est l'image du point M , M' .



- $M' \in (D)$ et $(MM') \parallel (L)$.
Le point M' est appelé **projeté** de M .
- $N \in (D)$
 N est son propre projeté.

Remarque : Lorsque les droites (D) et (L) sont perpendiculaires, la projection sur (D) parallèlement à la droite (L) est appelé projection orthogonale sur (D) .

TRANSFORMATIONS DU PLAN



Propriété : Soit P une application du plan dans lui-même.

P est une projection si et seulement si pour tout point M , on a $P(P(M)) = P(M)$.

Remarque : Si le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$; $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du plan et $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ son image par la projection sur (D) parallèlement à la droite (L) , P .

On peut déterminer l'expression analytique (exprimer x' en fonction de x et de y et exprimer y' en fonction de x et de y) de P à partir des informations suivantes : $\begin{cases} (MM') // (L) \\ M' \in (D) \end{cases}$

EXERCICE D'APPLICATION :

Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer l'expression analytique de la projection P sur la droite (D) d'équation

$-x + y + 5 = 0$, parallèlement à la droite (L) d'équation $2x + 3y - 4 = 0$.

Solution :

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point du plan et $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ son image par la projection sur (D) parallèlement à la droite (L) ,

P . Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de (L) .

On a $\begin{cases} (MM') // (L) \\ M' \in (D) \end{cases}$ ce qui entraîne que $\begin{cases} \overrightarrow{MM'} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires.} \\ M' \in (D) \end{cases}$

On a $2(x - x') - (-3)(y - y') = 0$ et $-x' + y' + 5 = 0$ et par suite on a :

$$\begin{cases} x' = \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y + 3 \\ y' = \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y - 2 \end{cases}$$

LECON 3 : SYMÉTRIE ORTHOGONALE

DURÉE : 50 min

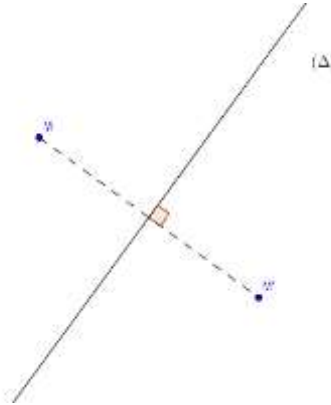
OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES : A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de mobiliser les propriétés de la symétrie orthogonale pour résoudre des problèmes de construction.

PRÉ-REQUIS : Soit un point et (Δ) une droite du plan.

- Qu'appelle-t-on médiatrice d'un segment ?
- Construis le point M' tel que (Δ) soit la médiatrice de $[MM']$

Solution :

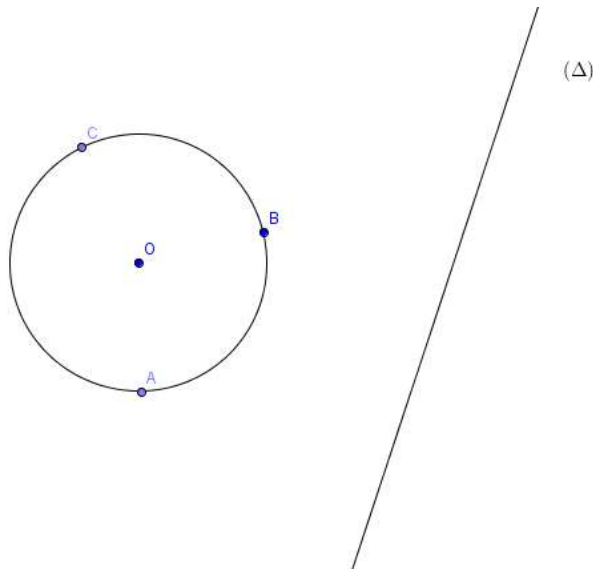
- La médiatrice d'un segment est la droite qui passe le milieu de ce segment en formant un angle droit.
-



ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

Activité 1 : On considère le cercle de centre O , (C) ; trois points A , B et C appartenant à ce cercle et la droite

(Δ) .

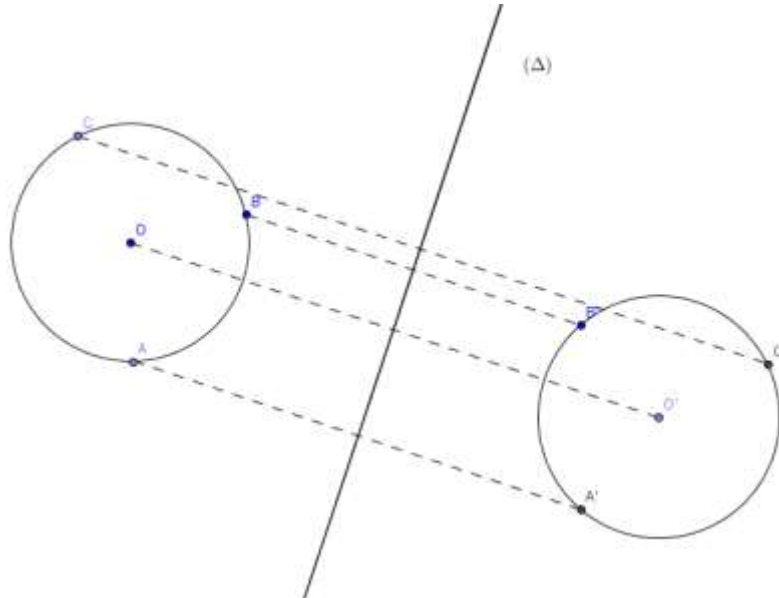


- Construis les symétriques A' , B' , C' et O' respectifs des points A , B , C et O par rapport à (Δ) .
- Comparer les propriétés géométriques de (C) et (C') , cercle de centre O' et passant par A' .

Résolution :

a)

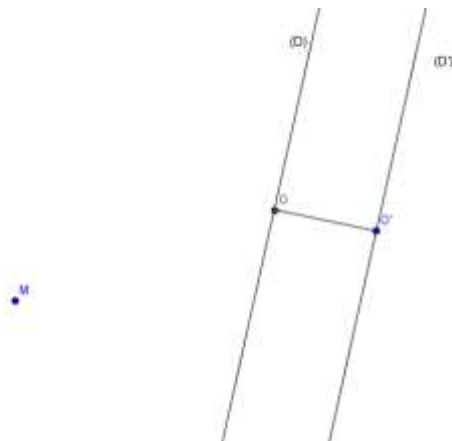
TRANSFORMATIONS DU PLAN



- b)** On constate que (C) et (C') sont des cercles de rayon 3 cm ; cependant on remarque les sens des angles orientés ont été inversés par exemple $\text{Mes}(\widehat{AOB}) = -\text{Mes}(\widehat{A'O'B'})$.

Activité 2 :

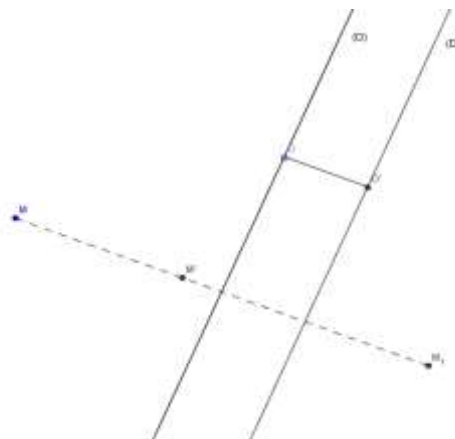
Soient (D') et (D) deux droites parallèles, O est un point de (D) et O' un point de (D') tel que $(OO') \perp (D)$.



1. Construis $M_1 = S_{(D)}(M)$ et $M' = S_{(D')}(M_1)$.
2. Donne une relation entre $S_{(D)}$, $S_{(D')}$, M et M'.
3. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ en fonction de $\overrightarrow{OO'}$.
4. Quelle transformation (non composée) fait passer M à M'?
5. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $S_{(D')} \circ S_{(D)}$.

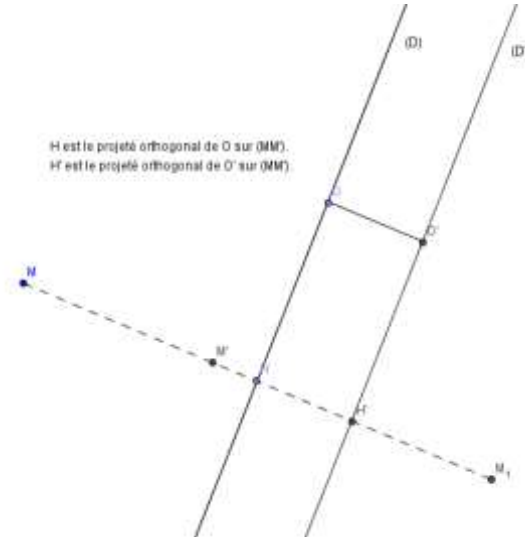
Résolution :

- 1.



2. $M' = S_{(D')} (S_{(D)}(M))$.

3.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{MM'} &= \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HM_1} + \overrightarrow{M_1H'} + \overrightarrow{H'M'} \\ &= 2\overrightarrow{HM_1} + 2\overrightarrow{M_1H'} \text{ car } \overrightarrow{MH} = \overrightarrow{HM_1} \text{ et } \overrightarrow{M_1H'} = \overrightarrow{H'M'}. \\ &= 2\overrightarrow{HH'} \\ &= 2\overrightarrow{OO'}\end{aligned}$$

4. C'est une translation.

5. $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{OO'}$.

RÉSUMÉ :

– **Définition :** Soit (D) une droite du plan.

On appelle **symétrie orthogonale d'axe (D)** notée $S_{(D)}$, l'application du plan dans lui-même qui à tout point M du plan associe le point M' tel que (D) est la médiatrice de [MM']; (D) est l'axe de symétrie, c'est aussi l'ensemble des points invariants par la symétrie.

On a l'écriture suivante :

$$S_{(D)}(M) = M' \text{ signifie } \begin{cases} (MM') \perp (D) \\ I \in (D) \end{cases} ; I \text{ est milieu } [MM']$$

Remarque : $S_{(D)}(S_{(D)}(M)) = M$

– **Propriété :** Les symétries orthogonales

- conservent les distances, la nature des figures, le barycentre, les aires et les volumes.
- inversent le sens des angles orientés.

– **Propriété :** Soient (D) et (D') deux droites parallèles et $O \in (D)$, $O' \in (D')$ tels que $(OO') \perp (D)$.

Alors la composée $S_{(D')} \circ S_{(D)}$ est la **translation de vecteur $2\overrightarrow{OO'}$** .

Remarque : Il faut tenir compte du sens de la composée. En effet, $S_{(D')} \circ S_{(D)} = t_{2\overrightarrow{OO'}}$ mais $S_{(D)} \circ S_{(D')} = t_{2\overrightarrow{O'O}}$.

– **Expression analytique**

Si le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$; $M \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right)$ un point du plan et $M' \left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix} \right)$ son image par la **symétrie orthogonale d'axe (D)**, $S_{(D)}$.

On peut déterminer l'expression analytique (exprimer x' en fonction de x et de y et exprimer y' en fonction de x et de y) de $S_{(D)}$ à partir des informations suivantes : $\begin{cases} (MM') \perp (D) \\ I \in (D) \end{cases} ; I \text{ est milieu } [MM']$.

EXERCICES D'APPLICATIONS :

Exercice d'application 1 :

Soit ABCD un carré direct de centre O ; I et J sont les milieux respectifs des côtés [AD] et [BC].

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $S_{(IJ)} \circ S_{(AB)}$.

Exercice d'application 2 : Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer dans chacun des cas suivants l'expression analytique de la symétrie d'axe (D) :

- a) (D) : $-x + 2y + 3 = 0$.
- b) (D) passant par A(2;-1) et dirigée par $\vec{u}(4;7)$.

Solution exercice d'application 2 :

- a) Soit $M(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix})$ un point du plan et $M'(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix})$ son image par la symétrie orthogonale d'axe (D) de vecteur directeur $\vec{u}$, d'équation

$$-x + 2y + 3 = 0. \text{ on a } \begin{cases} \overrightarrow{MM'}(x' - x, y' - y) \perp \vec{u}(-2, -1) \\ I(\frac{x+x'}{2}; \frac{y+y'}{2}) \in (D) \end{cases} ; I \text{ est milieu } [MM'] \text{ et par suite on a}$$

$$\begin{cases} -2(x' - x) - (y' - y) = 0 \\ -(\frac{x+x'}{2}) + 2(\frac{y+y'}{2}) + 3 = 0 \end{cases} \text{ d'où l'expression analytique de cette symétrie axiale est :}$$

$$\begin{cases} x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + \frac{6}{5} \\ y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - \frac{12}{5} \end{cases}$$

LECON 4 : HOMOTHETIE

DUREÉ : 50 min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES: A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de mobiliser les propriétés des homothéties pour résoudre des problèmes de construction.

PRÉ-REQUIS : On considère les points M et O du plan.



- Construire le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = -2\overrightarrow{OM}$.
- Quelle application dépendant du point O et -2 transforme M en M' ?

Solution :

a)



- C'est l'homothétie de centre O et de rapport -2.
On rappelle que si k un réel non nul et O un point du plan, on appelle homothétie de centre O et de rapport k l'application du plan dans lui-même qui à tout point M du plan associe le point M' du plan tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.
 - Si $k = 1$, c'est l'application identité.
 - Si $k = -1$, c'est la symétrie centrale de centre O.
 - Si $k \neq 1$, O est le seul point invariant.
 Généralement, on note $h_{(O,k)}$ l'homothétie de centre O et de rapport k .

ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE :

Activité d'apprentissage 1 :

Soit h homothétie de centre O de rapport de k , M' et N' les images respectives par des points M et N.

- Quelle relation existe entre $\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{OM}$?
- Exprimer $\overrightarrow{M'N'}$ en fonction de $\overrightarrow{MN}$.

Solution :

- $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.
- $$\begin{aligned}\overrightarrow{M'N'} &= \overrightarrow{M'O} + \overrightarrow{ON'} \\ &= k\overrightarrow{MO} + k\overrightarrow{ON} \quad \text{car } \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM} \text{ et } \overrightarrow{ON'} = k\overrightarrow{ON}. \\ &= k\overrightarrow{MN}\end{aligned}$$

Activité d'apprentissage 2 :

Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit h l'homothétie de centre $\Omega \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right)$ et de rapport k , $M \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right)$ un point du plan et $M' \left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix} \right)$ son image par $h_{(O,k)}$.

- Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{\Omega M'}$ et $\overrightarrow{\Omega M}$ dans ce repère.
- Exprimer x' en fonction de x et a ; exprimer y' en fonction de y et b .

Solution :

- $\overrightarrow{\Omega M'} \left(\begin{smallmatrix} x' - a \\ y' - b \end{smallmatrix} \right)$ et $\overrightarrow{\Omega M} \left(\begin{smallmatrix} x - a \\ y - b \end{smallmatrix} \right)$.
- $\overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$ entraîne que $\begin{cases} x' - a = k(x - a) \\ y' - b = k(y - b) \end{cases}$ d'où $\begin{cases} x' = kx + (1 - k)a \\ y' = ky + (1 - k)b \end{cases}$; ces expressions constituent l'expression analytique de $h_{(O,k)}$.

RÉSUMÉ :

- Propriété :** Soit h l'homothétie de rapport k , M' et N' les images respectives par h des points M et N .
On a $\overrightarrow{M'N'} = k \overrightarrow{MN}$.
- Propriété :**
 - L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle.
 - L'image d'un segment de longueur l par une homothétie de rapport k est un segment de longueur $|k|l$.
 - L'image d'une demi-droite par une homothétie est une demi-droite.
 - L'image d'une figure d'aire A par une homothétie de rapport k est une figure d'aire $k^2 \times A$.
 - Toute homothétie conserve les angles orientés.
 - Toute homothétie de rapport k réduit une figure si $|k| < 1$ et agrandit une figure si $|k| > 1$.

Remarque : Toute homothétie transforme trois points alignés en trois points alignés.

- Expression analytique**
Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit h l'homothétie de centre $\Omega \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix} \right)$ et de rapport k , $M \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right)$ un point du plan et $M' \left(\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix} \right)$ son image par $h_{(O,k)}$.
L'expression analytique de $h_{(O,k)}$ est $\begin{cases} x' = kx + (1 - k)a \\ y' = ky + (1 - k)b \end{cases}$
De façon générale, lorsqu'on a une transformation du plan dans lui-même f d'expression analytique sous la forme : $\begin{cases} x' = kx + p \\ y' = ky + q \end{cases}$ avec $k \neq 0$ alors :
 - si $k = 1$, f est la translation de vecteur $\vec{u} \left(\begin{smallmatrix} p \\ q \end{smallmatrix} \right)$.
 - si $k = -1$, f est une symétrie centrale de centre $\Omega \left(\begin{smallmatrix} p \\ q \end{smallmatrix} \right)$.
 - si $k \neq 1$ et $k \neq -1$, alors f est une homothétie de rapport k et de centre $\Omega \left(\begin{smallmatrix} p \\ q \end{smallmatrix} \right)$.
- Propriété :**
Soient h et h' deux homothéties de rapports respectifs k et k' .
 - Si $kk' = 1$ alors $h \circ h'$ est une translation.
 - Si $kk' \neq 1$ alors $h \circ h'$ est une homothétie de rapport kk' .

Remarque : Si h et h' ont le même centre alors

- Si $kk' = 1$ alors $h \circ h'$ est l'application identité.
- Si $kk' \neq 1$ alors $h \circ h'$ est une homothétie de même centre et rapport kk' .

EXERCICE D'APPLICATION :

Exercice d'application 1 :

Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Déterminer l'expression analytique de l'homothétie de centre $O(-2; 1)$ et de rapport 2.
- 2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de chacune des applications du plan dans lui-même d'expression analytique :
 - a) $\begin{cases} x' = 4x + 5 \\ y' = 4y - 6 \end{cases}$
 - b) $\begin{cases} x' = x - 4 \\ y' = y - 2 \end{cases}$
 - c) $\begin{cases} x' = -x - 2 \\ y' = -y + 3 \end{cases}$

Exercice d'application 2 :

Le plan est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit h, h' et h'' trois homothéties d'expressions analytiques respectives :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{4}x + 5 \\ y' = \frac{1}{4}y - 6 \end{cases}, \begin{cases} x' = 2x - 4 \\ y' = 2y - 2 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x' = 4x - 2 \\ y' = 4y + 3 \end{cases}$$

Déterminer la nature de $h \circ h'$ et de $h \circ h''$.

LEÇON 5 : ROTATION

DURÉE : 50 Min

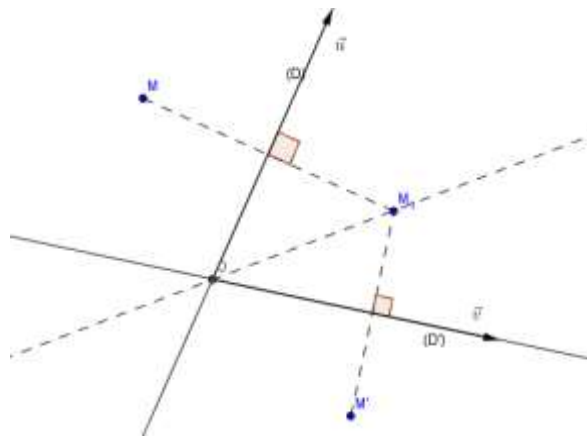
OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES: A la fin de cette leçon, l'élève doit être capable de mobiliser les propriétés des rotations pour résoudre des problèmes de construction.

PRÉ-REQUIS :

Symétries orthogonales et angles orientés

ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE :

Soient (D) et (D') deux droites sécantes en O de vecteurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Soit M un point du plan tel que $S_{(D)}(M) = M_1$ et $S_{(D')}(M_1) = M'$.



- a) Justifier que $OM = OM'$.
- b) Montrer que $(\widehat{OM, OM_1}) = 2(\widehat{u, OM_1})$.
- c) Montrer que $(\widehat{OM_1, OM'}) = 2(\widehat{OM_1, v})$.
- d) En déduire que $(\widehat{OM, OM'}) = 2(\widehat{u, v})$ si $M \neq O$.
- e) Que peut-on dire de la transformation du plan dans lui-même $S_{(D)} \circ S_{(D')}$.

Solution :

- a) Comme $S_{(D)}(M) = M_1$ et $S_{(D')}(M_1) = M'$, on a $OM = OM_1$ et $OM_1 = OM'$ et par suite, on conclut que $OM = OM'$.
- b) $(\widehat{OM, OM_1}) = (\widehat{OM, u}) + (\widehat{u, OM_1})$ or $(\widehat{OM, u}) = (\widehat{u, OM_1})$ car (OM_1) est la bissectrice de l'angle $(\widehat{u, v})$.

TRANSFORMATIONS DU PLAN

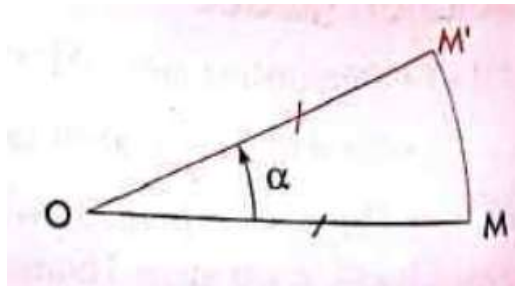
- c) $(\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM'}}) = (\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \vec{v}}) + (\widehat{\vec{v}, \overrightarrow{OM'}})$ or $(\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \vec{v}}) = (\widehat{\vec{v}, \overrightarrow{OM'}})$ car (D') est la bissectrice de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM'}})$.
- d) Si $M \neq O$, on a $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) = (\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1}}) + (\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM'}})$
 $= 2(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM_1}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \vec{v}})$
 $= 2(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}).$
- e) $S_{(D)} \circ S_{(D')}$ est la transformation du plan dans lui-même qui à tout M associe le point M' tel que :
- si $M = O$, alors $M' = M$
 - si $M \neq O$, alors $OM = OM'$ et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) = 2\text{Mes}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}).$

RÉSUMÉ :

- **Définition :** Soit O un point, α un nombre réel appartenant à l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

On appelle **rotation de centre O et d'angle α** l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M associe le point M' tel que :

- si $M = O$, alors $M' = M$.
- si $M \neq O$, alors $OM' = OM$ et $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) = \alpha$.



On note généralement $r(O, \alpha)$ la rotation de centre O et d'angle α .

- **Remarque :** Soit r la rotation de centre O et d'angle α .
 - si $\alpha = 0$ alors r est l'application identique.
 - si $\alpha = \pi$ alors r est une symétrie centrale de centre O .
- **Propriété :** Le seul point invariant d'une rotation d'angle non nul est le centre de cette rotation.
- **Propriété :** Soit f une application du plan dans lui-même et α un angle non nul.
 f est une rotation d'angle α si et seulement si, pour tous points M et N distincts d'images respectives M' et N' , on a $MN = M'N'$ et $(\widehat{\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}}) = \alpha$.
- **Propriété :** Soit (Δ) et (Δ') deux droites sécantes en un point O , de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$.
 La composée $S_{\Delta} \circ S_{\Delta'}$, des symétries orthogonales d'axes respectifs (Δ) et (Δ') est la rotation de centre O et d'angle $2(\widehat{\vec{u}', \vec{u}})$.
- **Propriété :** Soit r et r' deux rotations de centre O et d'angles respectifs α et α' .
 $r \circ r'$ est la rotation de centre O et d'angle $\alpha + \alpha'$.

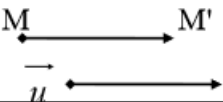
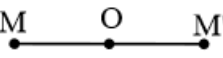
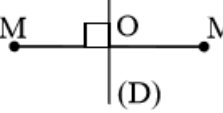
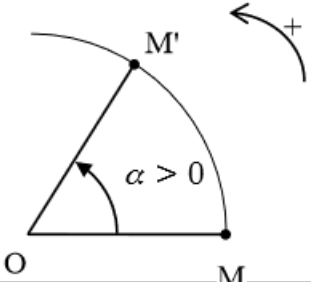
EXERCICE D'APPLICATION :

Soit $ABCD$ un carré de sens direct et de centre O . Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $S_{(AB)} \circ S_{(AC)}$ et $r(O; \frac{\pi}{4}) \circ r(O; -\frac{\pi}{3})$.

 ENTRAINE-TOI

RAPPEL

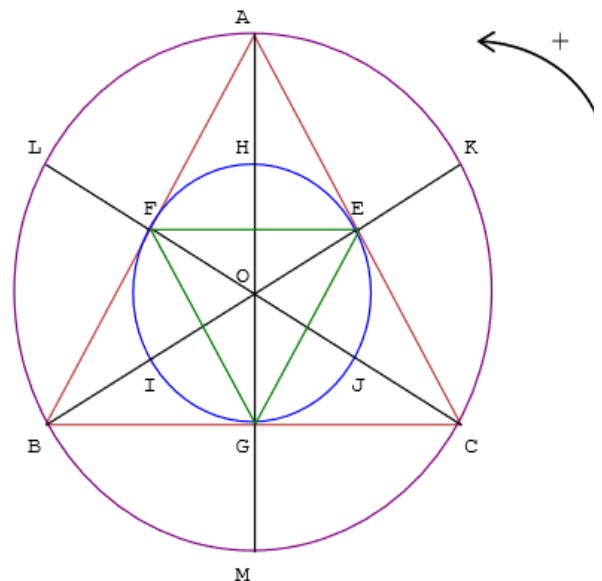
Quatre transformations à connaître.

Transformation	Pour la définir il faut :	Le point M' image de M est défini par :	Figure
Translation	un vecteur $\vec{u}$	$\vec{MM'} = \vec{u}$	
Symétrie centrale	un point (le centre) : O	O est le milieu de [M M']	
Réflexion (symétrie axiale)	une droite (l'axe) : (D)	(D) est la médiatrice de [M M']	
Rotation	un point O (le centre) et une mesure d'angle α . attention : le sens de rotation est donné par le signe de α	$OM = OM'$ et $\widehat{MOM'} = \alpha$.	

EXERCICE 1 :

Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle équilatéral de centre O. Compléter suivant la transformation proposée

- 1) a) Par la symétrie de centre O
 $A \rightarrow \dots$; $J \rightarrow \dots$; $\dots \rightarrow C$; $O \rightarrow \dots$
 b) Par la réflexion d'axe (AO)
 $B \rightarrow \dots$; $H \rightarrow \dots$; $A \rightarrow \dots$
 c) Par la translation de vecteur $\vec{FE}$
 $B \rightarrow \dots$; $F \rightarrow \dots$; $(BI) \rightarrow \dots$
 d) Par la réflexion d'axe (OC)
 $B \rightarrow \dots$; $E \rightarrow \dots$; $\dots \rightarrow L$
- 2) a) Par la rotation de centre O et d'angle 120°
 $C \rightarrow \dots$; $H \rightarrow \dots$; $\dots \rightarrow F$
 b) Par la rotation de centre O et d'angle 60°
 $B \rightarrow \dots$; $\dots \rightarrow E$; $O \rightarrow \dots$
 c) Par la rotation de centre O et d'angle -60° $C \rightarrow \dots$; ..



TRANSFORMATIONS DU PLAN

3) Suivant la transformation (symétrie centrale ou symétrie axiale), Compléter : ce qui est entre parenthèse après S correspond au centre ou à l'axe de symétrie et ce qui est entre parenthèse après R correspond au centre puis à l'angle de la rotation.

S (.....), $A \rightarrow C$; $O \rightarrow O$

S (.....), $E \rightarrow F$; $(FK) \rightarrow \dots\dots\dots$

S (.....), $[AF] \rightarrow [CG]$; $\dots\dots\dots \rightarrow [EH]$

S (.....), $F \rightarrow G$; $\dots\dots\dots \rightarrow [IC]$

R (B,.....), $C \rightarrow A$; $M \rightarrow \dots\dots\dots$

R (O,.....), $C \rightarrow B$; $G \rightarrow \dots\dots\dots$

R (E,.....), $G \rightarrow A$; $\dots\dots\dots \rightarrow F$

R (.....,.....), $E \rightarrow G$; $K \rightarrow O$

EXERCICE 2 :

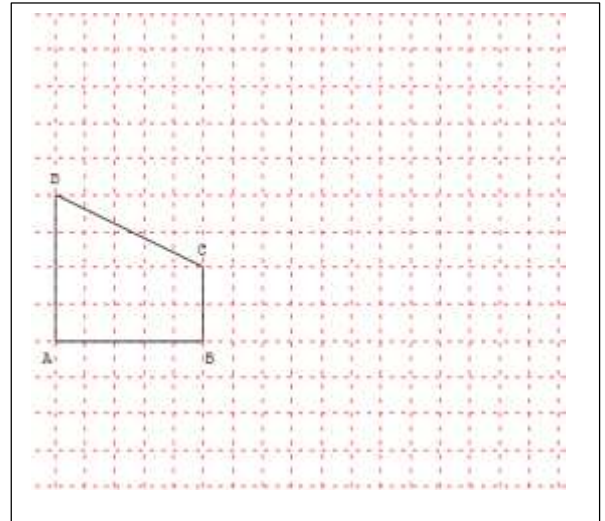
On considère le quadrilatère ABCD suivant.

1) Construire l'image de ce quadrilatère par La réflexion d'axe (CB)

2) Construire l'image de ce quadrilatère par La translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}$

3) Construire l'image de ce quadrilatère par La symétrie de centre le milieu du segment [DC]

4) Construire l'image de ce quadrilatère par La rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$



EXERCICE 3 :

Dans un repère (O, I, J), on considère les points A (2 ;6) ; B (7 ;11) et C (4 ;12)

1) Construire les points E, F et G images respectives de A, B et C par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$

2) Construire les H, K et L images respectives de A, B et C par la rotation de centre W (5 ;3) et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

EXERCICE 4 :

1) Soit ABCD un parallélogramme. Construire son image A'B'C'D' par l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{1}{2}$

2) Soit (C) un cercle de O et de rayon 3cm. Soit I un point tel que OI=6cm

a) Construire l'image (C') de (C) par l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{2}{3}$

b) Calculer l'aire de (C) et (C')

c) Calculer le rapport $A_{(C)}/A_{(C')}$ et mettre le résultat sous forme de fraction irréductible. Que peut-on conclure ?

CHAPITRE 10 : GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DU PLAN

MOTIVATION :

Nous sommes confrontés au quotidien aux problèmes de vie, donc la résolution passe par le repérage dans le plan et le calcul de distance. Le présent chapitre s'en va nous donner des outils mathématiques nécessaires pour mieux appréhender ce type de problème.

LEÇON 1 : Distance d'un point à une droite

DUREE : 50 min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES:

- Déterminer la distance entre deux points
- Déterminer la distance d'un point à une droite.

Prérequis

- ✓ Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sont les coordonnées de deux points A et B dans un repère orthonormé (O, I, J) , alors la distance AB est donnée par $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
- ✓ Si une droite (D) a pour équation $ax + by + c = 0$, alors un vecteur directeur de (D) est $\vec{u}(-b; a)$.
- ✓ Une droite (D) passant par un point $A(x_A; y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha; \beta)$ admet pour équation cartésienne $(D): \beta x - \alpha y + \gamma = 0$ où $\gamma = \alpha y_A - \beta x_A$.

ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE :

Dans un repère orthonormé (O, I, J) , considérons la droite $(D) : 3x+4y-10=0$; A et B deux points tels que : $A(5,5)$, et $B(2, 1)$.

- a) Vérifier que le point B appartient à la droite (D) .
- b) Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (D) , puis justifier que (AB) est perpendiculaire à (D) .
- c) Calculer la distance AB .
- d) La valeur de $d = \frac{|2x_A + y_A - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$ puis comparer d et AB .

Résolution :

- a) On a : $(D) : 2x+y-4=0$ et $B(2;1)$,
 $3(2) + 4(1) - 10 = 6 + 4 - 10 = 10 - 10 = 0$, donc le point B appartient à la droite (D) .
- b) Un vecteur directeur de la droite (D) est $\vec{u}(-4; 3)$ et $\vec{AB}(-3; -4)$,
 Étant donné que $(-4) \times (-3) + (3) \times (-4) = 12 - 12 = 0$, alors (AB) est perpendiculaire à (D)
- c) La distance AB est $AB = \sqrt{(2-5)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$; cette valeur représente la **distance du point A à la droite (D)**.
- d) La valeur de $d = \frac{|3x_A + 4y_A - 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$ est $d = \frac{|3(5) + 4(5) - 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|15 + 20 - 10|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|25|}{5} = \frac{25}{5} = 5$
 Ainsi $d = AB$, nous avons ainsi une autre façon de calculer la distance d'un point à une droite sachant l'équation de la droite et les coordonnées du point en question.

RESUME :

- ❖ Soit (D) une droite et A un point du plan. Soit H le projeté orthogonal de A sur (D) . On appelle distance de A à (D) et on note $d(A; (D))$ la longueur du segment $[AH]$.
- ❖ Dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan considérons, $(D) : ax + by + c = 0$ et $A(x_A; y_A)$, la distance du point A à la droite (D) notée $d(A, (D))$ est $d(A, (D)) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.



❖ Remarques

Pour tout point M appartenant à la droite (D) et pour tout point A du plan on a :

- $d(A, (D)) \geq 0$
- $d(A, (D)) \leq AM$
- $d(M, (D)) = 0$.

EXERCICES D'APPLICATIONS :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; I; J)$. On considère les points $A(1; 3)$, $B(2; -1)$ et $C(-3; 2)$ et la droite $(D) : 6x - 8y + 2 = 0$.

- a) Calculer les distances AB , BC et AC .
- b) Écrire une équation cartésienne de la droite (BC) puis calculer la distance du point A à la droite (BC) .
- c) Calculer les distances de chacun des points A , B et C à la droite (D) .

Solution

- a) On a : $AB = \sqrt{(2-1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{(1)^2 + (-4)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$
 $BC = \sqrt{(-3-2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (3)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$
 $AC = \sqrt{(-3-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$.
- b) On a : $\vec{BC}(-3-2; 2+1)$, d'où $\vec{BC}(-5; 3)$. L'équation cherchée est de la forme $3x + 5y + d$ où $d = -3(2) - 5(-1) = -6 + 5 = -1$. On obtient $(BC) : 3x + 5y - 1$ et
 $d(A, (BC)) = \frac{|3(1)+5(3)-1|}{\sqrt{3^2+5^2}} = \frac{|3+15-1|}{\sqrt{9+25}} = \frac{|17|}{\sqrt{34}} = \frac{17}{\sqrt{34}} = \frac{17\sqrt{34}}{34} = \frac{\sqrt{34}}{2}$.

- c) On a :

$$d(A, (D)) = \frac{|6(1)-8(3)+2|}{\sqrt{6^2+(-8)^2}} = \frac{|6-24+2|}{\sqrt{36+64}} = \frac{|-16|}{\sqrt{100}} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$

$$d(B, (D)) = \frac{|6(2)-8(-1)+2|}{\sqrt{6^2+(-8)^2}} = \frac{|12+8+2|}{\sqrt{36+64}} = \frac{|22|}{\sqrt{100}} = \frac{22}{10} = \frac{11}{5}$$

$$d(C, (D)) = \frac{|6(-3)-8(2)+2|}{\sqrt{6^2+(-8)^2}} = \frac{|-18-16+2|}{\sqrt{36+64}} = \frac{|-32|}{\sqrt{100}} = \frac{32}{10} = \frac{16}{5}$$

Devoir

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) , on considère la droite $(D) : 2x+y-4=0$ et les points A , B et C tels que : $A(7, 5)$, $B(1, 2)$ et $C(0, 4)$.

Calculer les distances de chacun des points A , B et C à la droite (D) en précisant dans chaque cas si le point est sur la droite (D) .

LEÇON 2 : Cercles du plan

DURÉE....100 min

OBJECTIFS PÉDAGOGIQUES:

- Écrire l'équation cartésienne d'un cercle
- Déterminer les éléments caractéristiques d'un cercle à partir de son équation cartésienne
- Déterminer une équation cartésienne d'une tangente en un point d'un cercle
- Déterminer une équation cartésienne d'une tangente à un cercle, passant par un point extérieur à ce cercle.

Prérequis

- ✓ Calculer la distance entre deux points dont on connaît les coordonnées.
- ✓ Écrire la forme canonique d'un polynôme du second degré.

ACTIVITÉ D'APPRENTISSAGE :

1- On considère le cercle (C) de centre $H(-2 ; 3)$ et de rayon $r = 2$ cm. Soit $M(x, y)$ un point du cercle (C).

a) Calculer la distance HM en fonction de x et y .

b) Montrer que $HM^2 = r^2$ est équivalent à $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$.

2- Soient (Γ) l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$, (D) la droite d'équation $3x - 4y - 5 = 0$ et le point $A(-2, 1)$

a) Montrer que $M(x, y)$ appartient à (Γ) équivaut à $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$.

b) En déduire que $M(x, y)$ appartient à (Γ) équivaut à $AM^2 = 9$ puis donne la nature et les éléments caractéristiques de (Γ) .

c) Calculer $d(A ; (D))$. que peut-on dire de la droite (D) et du cercle (Γ) .

Résolution :

1- a) On a $M(x, y)$ et $H(-2 ; 3)$. Ainsi $HM = \sqrt{(x + 2)^2 + (y - 3)^2}$

b) $HM^2 = r^2$ est équivalent à $(\sqrt{(x + 2)^2 + (y - 3)^2})^2 = 2^2$

équivalent à $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$,

équivalent à $x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 4$,

équivalent à $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$.

(cette dernière équation est appelée **équation cartésienne** du cercle (C).)

2- Soit (Γ) l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$ et $A(-2, 1)$

a) $M(x, y)$ appartient à (Γ) équivaut à $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$,

équivalent à $x^2 + 4x + y^2 - 2y - 4 = 0$

équivalent à $(x + 2)^2 - 4 + (y - 1)^2 - 1 - 4 = 0$

équivalent à $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$.

b) Comme $AM^2 = (x + 2)^2 + (y + 1)^2$ alors $M(x, y)$ appartient à (Γ) équivaut à $AM^2 = 9$, c'est-à-dire $AM = 3$. Donc (Γ) est le cercle de centre A et de rayon 3.

c) On a : $d(A, (D)) = \frac{|3(-2) - 4(1) - 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-6 - 4 - 5|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|-15|}{5} = \frac{15}{5} = 3$. Comme $d(A, (D))$ est égale au rayon de

(Γ) alors la droite (D) est tangente au cercle (Γ) .

RÉSUMÉ :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; I ; J)$.

Soit Ω un point du plan et r un nombre réel strictement positif. On appelle cercle de centre Ω et de rayon r l'ensemble des points M du plan tels que $\Omega M = r$.

❖ Soit (C) un cercle du plan, il existe des nombres réels a, b et c tels que pour tout point $M(x, y)$, M appartient (C) si et seulement si $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$.

Cette égalité est appelée équation cartésienne du cercle (C).

❖ Soit a, b, c des nombres réels.

L'ensemble (Γ) des points $M(x, y)$ tels que $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ peut se mettre sous la forme $(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 - c = 0$. Ainsi

- Si $a^2 + b^2 - c < 0$ alors (Γ) l'ensemble vide,

- Si $a^2 + b^2 - c = 0$ alors (Γ) est un point

- Si $a^2 + b^2 - c > 0$ alors (Γ) un cercle de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

❖ Soit (C) un cercle de centre $\Omega(a; b)$ et de rayon r .

Le système $\begin{cases} x = a + r \cos t \\ y = b + r \sin t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ est appelé représentation paramétrique du cercle (C).

❖ Soit (C) un cercle d'équation $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ et $A(x_A; y_A)$ un point du cercle (C). Il existe une unique droite passant par A et tangente au cercle (C) ayant pour équation :

(T): $xx_A + yy_A - a(x + x_A) - b(y + y_A) + c = 0$.

(On dit qu'on a obtenu l'équation de la tangente à partir de celle du cercle par dédoublement)

❖ Soit (C) un cercle et $B(x_B; y_B)$ un point extérieur au cercle, alors il existe deux droites passant par B et tangente à (C). Les équations de ces tangentes sont obtenues comme suit :

○ Considérer l'équation de la tangente au cercle (C) passant en un point $P(x_0; y_0)$ de (C) donnée par **(T): $xx_0 + yy_0 - a(x + x_0) - b(y + y_0) + c = 0$.**

○ Déterminer les différents $P(x_0; y_0); (P_1; P_2)$ pour lesquelles cette tangente passe par B.

○ Écrire les équations de ces deux tangentes.

EXERCICES D'APPLICATIONS :

1- On considère les points $A(2; -1)$ et $B(5; 3)$.

a) Trouver une équation cartésienne puis une représentation paramétrique du cercle (C_1) de centre A et de rayon $r = 3$.

b) Trouver une équation cartésienne du cercle (C_2) de centre B passant par A, puis déterminer une équation de la tangente à (C_2) passant par A.

2- Déterminer l'ensemble (Γ) des points $M(x; y)$ vérifiant les équations suivantes :

a) $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$, b) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 15 = 0$, c) $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$

Solution

1- On considère les points $A(2; -1)$ et $B(5; 3)$.

a) $M(x, y)$ est un point de (C_1) si et seulement si $AM = 3$, c'est-à-dire $\sqrt{(x - 2)^2 + (y + 1)^2} = 3$.

Ainsi $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$ ce qui équivaut à $x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 9$.

D'où (C_1) a pour équation cartésienne $(C_1): x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ et pour représentation

paramétrique $\begin{cases} x = 2 + 3 \cos t \\ y = -1 + 3 \sin t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

b) On a : $r = AB = \sqrt{(2 - 5)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

$M(x, y)$ est un point de (C_2) si et seulement si $BM = 5$, c'est-à-dire $\sqrt{(x - 5)^2 + (y - 3)^2} = 5$.

Ainsi $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 25$, ce qui équivaut à $x^2 - 10x + 25 + y^2 - 6y + 9 = 25$.

D'où (C_2) a pour équation cartésienne $(C_2): x^2 + y^2 - 10x - 6y + 9 = 0$.

Une équation cartésienne la tangente à (C_2) passant par A est

(T): $x(2) + y(-1) - 5(x + 2) - 3(y - 1) + 9 = 0$, c'est-à-dire

(T): $2x - y - 5x - 10 - 3y + 3 + 9 = 0$, donc (T): $-3x - 4y + 2 = 0$

2- Déterminons l'ensemble (Γ) des points $M(x; y)$ vérifiant les équations suivantes :

a) $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$, entraîne $(x - 3)^2 - 9 + (y - 2)^2 - 4 - 3 = 0$,

d'où $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$. L'ensemble (Γ) est le cercle de centre $\Omega(3; 2)$ et de rayon 4.

b) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 15 = 0$, entraîne $(x - 2)^2 - 4 + (y + 3)^2 - 9 + 15 = 0$,

d'où $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = -2$. L'ensemble (Γ) est vide.

c) $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$, entraîne $(x + 1)^2 - 1 + (y - 3)^2 - 9 - 15 = 0$,

d'où $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$. L'ensemble (Γ) est le cercle de centre $\Omega(-1; 3)$ et de rayon 5.

Devoir

1- Soit le cercle (C) : $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$

a) Vérifier que $A(1,1)$ appartient à (C).

b) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à (C) en A.

2- Soit le cercle (C) : $x^2 + y^2 - 10x + 15 = 0$

a) Vérifier que $B(0,5)$ n'appartient pas à (C).

b) Déterminer une équation cartésienne de chacune des tangentes au cercle

(C) passant par B.

⇒ ENTRAINE-TOI

EXERCICE 1 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité est le centimètre

1) Placer les points A (1 ; -2) ; B (2 ; 1) et C (5 ; 0) dans ce repère

2) a) Calculer les valeurs exactes de AB, BC et AC

b) Quelle est la nature du triangle ABC ?

c) Soit M le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Construire le point M et montrer que ses coordonnées sont M (3 ; -1)

d) Prouver que P (5 ; -2) appartient au cercle circonscrit au triangle ABC

3) Déterminer la distance entre le point A et la droite (D) d'équation $y = 2x + 1$

4) a) Ecrire l'équation du (C) cercle de la question 2)

b) Représenter la tangente à (C) passant par le point P

c) Placer le point D (5 ; 5) et tracer la tangente à (C) passant par le point D

EXERCICE 2 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On donne A (-2 ; 3) ; B (3 ; 1) et C (0 ; -2). L'unité est le centimètre

1) Calculer AB, AC et BC et déduire la nature du triangle ABC

2) a) Déterminer la distance entre le point A et la droite d'équation $3x - 3y - 2 = 0$

b) Déduire la surface du triangle ABC

3) a) Déterminer l'équation du cercle (C) de centre B et de rayon 2 cm

b) placer un point D sur ce cercle et représenter la tangente (T_1) à (C) passant par D

c) Représenter la tangente (T_2) à (C) passant par le point B

EXERCICE 3 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . On donne $A(-2 ; 1)$; $B(2 ; 3)$; $C(0 ; -2)$ et $D(-1 ; -2)$. L'unité est le centimètre

- 1) a) Calculer AB , BC , DC et DA
b) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Déterminer sa surface
- 2) a) Déterminer la distance entre le point C et la droite d'équation $y = 4x + 3$
b) Déterminer la distance entre le point D et la droite d'équation $12x + 5y - 9 = 0$
- 3) a) Ecrire l'équation du cercle (C) de centre A et de rayon 3 cm
b) Déterminer les coordonnées d'un point E appartenant à ce cercle
c) Placer tous les points précédents et le cercle (C) dans un repère
d) Représenter la tangente (T_1) à ce cercle et passant par le point E
e) Représenter la tangente (T_2) à ce cercle et passant par le point B