



MATHEMATIQUES EN PREMIERES STT

« Fondamentales pour le développement intellectuel, les mathématiques aident à être logiques, à raisonner de manière signée et à se préparer à la pensée critique et l'abstraction »

Mathématiques Générales

NGOUANFOUO JUNIOR

PCETP – Fabrication Mécanique

Mathématiques Appliquées

MONEBOULOU MICHEL

PLETP – Sciences des Techniques Economiques

« Ce qui compte, chez un homme ce n'est pas la couleur de sa peau ou la texture de sa chevelure mais la texture et la qualité de son âme.... »

Martin Luther King





Cet ouvrage réalisé sous la coordination de Monsieur MONEBOULOU MICHEL, PLETP – STE et lauréat de la 38ème Promotion de l'ENSET de DOUALA et Monsieur NGOUANFOUO JUNIOR, PCETP – FM, lauréat de la 40ème Promotion de l'ENSET de DOUALA permettra aux élèves des classes de Premières en Sciences des Techniques du Tertiaire du Cameroun de mieux appréhender les notions partiellement difficiles et non contiguës en Mathématiques Générales et Appliquées.



Avant-propos

Le problème qui se pose à l'heure actuelle pour beaucoup de pays est celui d'assurer la fourniture des livres scolaires à l'ensemble de leur système d'enseignement compte tenu de la complexité des différentes opérations que suppose la production et distribution des manuels.



VERS L'année scolaire





Introduction

Ce document est destiné en priorité aux professeurs qui enseignent l'option obligatoire mathématiques de la classe de première STT ou la spécialité mathématiques. Il est explicite et détaille les intentions du programme en proposant des démarches et des exemples destinés à guider chaque apprenant dans la compréhension du cours. L'accent a également été mis sur des points précis du programme qui offrent des conditions favorables à l'acquisition des compétences propres aux domaines transversaux, tels la logique dans certaines démonstrations ou l'algorithmique dans le recours aux technologies (calculatrice, ordinateur). Mais ce document a également pour ambition d'être utile aux professeurs de mathématiques des autres séries, qui pourront y trouver – en les adaptant au besoin – des idées d'activités. Sont aussi fournies, grâce tout particulièrement au travail proposé en logique, des pistes de remédiation à des problèmes qui font classiquement obstacle à la compréhension des élèves. Ils pourront aussi comparer les approches d'une même notion dans les diverses séries et, en évaluant leurs avantages et leurs inconvénients, se faire une meilleure idée de la spécificité de chacune d'elles, ce qui leur permettra d'appréhender de façon plus globale l'enseignement des mathématiques au lycée.





Première partie : Mathématiques Générales

Table des matières

Avant-propos.....	2
Introduction.....	3
Première partie : Mathématiques Générales.....	4
Deuxième partie : Mathématiques Appliquées	5
Première partie : Mathématiques Générales	6
Thème 1 : Equations, Inéquations et Systèmes	6
Titre de la leçon : Equations et Inéquations associées aux fonctions homographiques.....	6
I- Equations	6
II- Résolution d'une inéquation dans l'ensemble des nombres réels	9
III- Résolution des systèmes d'équations	10
Thème 2 : Limites et continuités	13
I. Les limites.....	13
A. Limites des fonctions de référence	13
B. Opérations sur les limites	13
B.1 Limites d'une somme de fonction	13
B.2 Limites d'un produit de fonction	13
B.3 Limites d'un quotient.....	14
C. Limites par composée et par comparaison	15
C.1 Limite d'une fonction composée	15
C.2 Limite d'une fonction par comparaison.....	15
II. Continuité.....	15
1- Définition	15
2- Théorème des valeurs intermédiaires	16
4- Cas d'une fonction continue et strictement monotone	16
Thème 3 : Généralités sur les fonctions et études des fonctions	18
Thème 4 : Suites Numériques.....	23
I - généralités	23
1- Définition	23
2- Mode de détermination d'une suite	23
3- Représentation graphique.....	23
II- Etude d'une suite	24
III-Nature d'une suite	25
Thème 5 : Dénombrement	27





Thème 6 : Statistiques	33
Thème 7 : Sujets d'examens.....	34

Deuxième partie : Mathématiques Appliquées





Première partie : Mathématiques Générales

Thème 1 : Equations, Inéquations et Systèmes

Titre de la leçon : Equations et Inéquations associées aux fonctions homographiques

Contrôle des prés requis :

- a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $x - 3 = 2$; $2x + 1 = -x + 2$; $-3x + 2 = -1$.
- b) Etudier le signe sur $\mathbb{R}$ des polynômes P et Q définis par : $P(x) = -2x + 1$ et $Q(x) = x + 2$.
- c) Déterminer le domaine de définition de l'équation rationnelle $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ et $\frac{Q(x)}{P(x)} = 0$.

Résumé :

Définition 1 : Une fraction rationnelle est une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des polynômes.

Définition 2 : On appelle fonction rationnelle une fonction réelle f de la forme $f(x) = \frac{n(x)}{d(x)}$, où $n(x)$ et $d(x)$ sont des fonctions polynomiales.

Remarque 1 : Lorsque $n(x)$ et $d(x)$ sont des fonctions polynomiales de degré 1, on dit que f est une fonction homographique.

Exemple 1 : La fonction f de l'activité d'apprentissage est une fonction homographique.

Exercice d'application :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et Inéquations suivantes $P(x) = 0$, $P(x) \geq 0$, $Q(x) = 0$, $Q(x) \geq 0$

I- Equations

1.1 Equations polynomiales

Définition 1.1. Une équation polynomiale d'inconnue x est une équation de la forme $P(x) = 0$, où P est un polynôme de degré $1 \leq n$. Le degré de l'équation polynomiale est par définition le degré du polynôme P . Une solution de l'équation $P(x) = 0$ est appelée racine du polynôme P .

Retenons : résoudre l'équation $P(x) = 0$ revient à rechercher les racines du polynôme P .

Définition 1.2. Un polynôme du premier degré en x est tout polynôme de la forme $f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$.





Exemple 1.1: $f(x) = -4x + 5$; $g(x) = x - 1$ $h(x) = 1/3 x + 12$

Définition 1.3. Un polynôme du second degré en x est tout polynôme $f(x)$ de la forme : $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

Exemple 1.2: $f(x) = -x^2 - 6x + 7$; $g(x) = 5x^2 - 3x$ $h(x) = 1/3 x^2 + 2$

- La valeur numérique d'un polynôme est fonction de la valeur de la variable x et peut être positive, négative ou nulle ;
- Les coefficients a , b et c sont des nombres réels connus.

Définition 1.4. Une équation du second degré en x est toute équation de la forme : $ax^2 + bx + c = 0$

Exemple 1.3: $-x^2 - 6x + 7 = 0$; $5x^2 - 2x + 1 = 0$; $x^2 + 2 = 0$; $4x^2 - 7x = 0$

1.2 Equations se ramenant au premier degré

- L'équation $A \times B = 0$ équivaut à $A = 0$ ou $B = 0$

Exemple 1.4 : L'équation $(2x + 5)(x - 4) = 0 \leftrightarrow (2x + 5) = 0$ ou $(x - 4) = 0$.

- Toutes équations de la forme $A^2 - B^2 = 0$ s'écrit : $(A - B)(A + B) = 0$ et est équivalent à $A - B = 0$ ou $A + B = 0$.

Exemple 1.5 : l'équation $(2x + 3)^2 - (x - 6)^2 = 0$ s'écrit :

$$[(2x + 3) - (x - 6)][(2x + 3) + (x - 6)] = 0 \leftrightarrow (2x + 3 - x + 6)(2x + 3 + x - 6) = 0$$

1.3 Résolution d'une équation dans l'ensemble des nombres réels

1.3.1 Résolution de l'équation type : $ax^2 + bx = 0$

Cette équation équivaut à $x(ax + b) = 0 \leftrightarrow x = 0$ ou $ax + b = 0$ et admet deux solutions, soient

$$x = 0 \text{ et } x = -\frac{b}{a}$$

Exemple 1.6 :

$$\blacksquare \quad 3x^2 - 15x = 0 \leftrightarrow x(3x - 15) = 0 \leftrightarrow x = 0 \text{ ou } 3x - 15 = 0 \leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{15}{3} = 5$$

La solution est $S = \{0; 5\}$

Application : résolvez les équations suivantes dans $\mathbb{R}$

a) $169x^2 - 361 = 0$

c) $P(x) = 36x^2 - 48x = 0$

b) $17x^2 - 6x = 0$

d) $x^2 - x = 0$





1.3.2 Résolution de l'équation type : $ax^2 + bx + c = 0$

A- Forme canonique d'un trinôme

Pour tous réels x , la forme canonique du polynôme s'écrit : $ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right)$

En posant $\Delta = b^2 - 4ac$ qui est le discriminant du polynôme.

Exemple 1.7 :

$2x^2 - x + 3$ a pour discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3$ et pour forme canonique

$-x^2 + 5x + 6$ a pour discriminant $\Delta =$ et pour forme canonique

$x^2 - 2x + 1$ a pour discriminant $\Delta =$ et pour forme canonique

On doit chercher à factoriser cette expression, en faisant apparaître si possible une différence de deux carrés.

Trois cas sont à envisager :

$\Delta > 0$ on peut écrire

$$\begin{aligned} a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right) &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \right) \\ &= a \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \\ &= a(x - x_1)(x - x_2) \end{aligned}$$

Avec

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Le polynôme se factorise en

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ équivaut alors à l'équation $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ soit à $x = x_1$ ou $x = x_2$ (deux solutions).

$\Delta = 0$

$$\text{On a : } a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$$

Nous avons immédiatement une forme factorisée et l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ équivaut à

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0 \text{ soit à } x = x_0 = -\frac{b}{2a} \text{ (une solution) et la factorisation de } f \text{ est : } f(x) = a(x - x_0)^2.$$

$\Delta < 0$

L'équation équivaut à $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$, soit à $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$, ce qui est impossible car un carré ne peut pas être égal à un nombre strictement négatif (pas de solution).





Par ailleurs $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ est une somme de deux nombres positifs, et ne peut donc plus être factorisé comme différence de deux carrés.

Exemple 1.8 :

Résoudre les équations suivantes $2x^2 + 5x - 1 = 0$; $3x^2 - 2x - 4 = 0$; $2x^2 + 10\sqrt{2}x + 25 = 0$.

B- Résolution par le discriminant

Pour toutes fonctions de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ on calcule juste le discriminant,

Si $\Delta < 0$	Si $\Delta = 0$	Si $\Delta > 0$
L'équation n'admet pas de solutions	L'équation admet une solution unique :	L'équation admet deux solutions :
	$x = \frac{-b}{2a}$	$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

Et selon la valeur de Delta on en déduit la forme de la solution.

Exemple 1.9 : Résoudre dans R les équations suivantes

a) $7x^2 - 9x + 3 = 0$

c) $5(x-6)^2 = 7x-8$

b) $64x^2 - 48x + 9 = 0$

d) $x^2 - \frac{1}{2} = \sqrt{2}x$

Application : Afin d'orienter ses investissements une chaîne d'hôtels réalise une analyse sur le taux d'occupation des chambres. L'analyse montre que le bénéfice $B(x)$, FCFA en fonction du taux d'occupation x en pourcentage peut s'exprimer par : $B(x) = -x^2 + 160x - 3900$

On appelle seuil de rentabilité le taux d'occupation x pour lequel le bénéfice est nul, calculer ce seuil de rentabilité.

II- Résolution d'une inéquation dans l'ensemble des nombres réels

II.1 Résolution d'une inéquation du premier degré

Elle peut prendre une forme $(ax + b) \geq 0$, $(ax + b) < 0$, $(ax + b) > 0$ etc.....

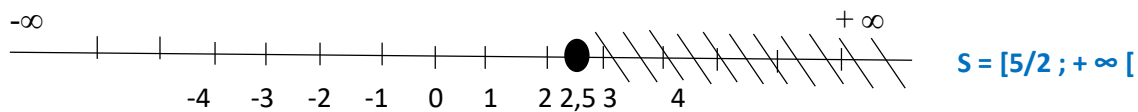
La résolution se fait comme la résolution d'une équation mais en remplaçant les égalités par les inégalités

Exemple 1.10 : Résoudre l'inéquation suivante : $(2x + 5) \geq 0$





Reviens à écrire $(2x + 5) \geq 0 \leftrightarrow 2x + 5 - 5 \geq -5 \leftrightarrow 2x \geq -5 \leftrightarrow x \geq \frac{5}{2}$ ensuite on en déduit la solution en hachurant la partie supérieure à 2,5 :



II.2 Résolution d'une inéquation du Second degré

En posant $\Delta = b^2 - 4ac$ qui est le discriminant du polynôme, nous avons toujours nos trois situations :

Si $\Delta > 0$, Le polynôme se factorise en $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ et On peut alors faire un tableau de signe

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
signe de $x - x_1$	-	0	+	+
signe de $x - x_2$	-	-	0	+
signe de a	+	+	+	+
signe de $f(x)$	+	0	-	+

Avec $a > 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
signe de $x - x_1$	-	0	+	+
signe de $x - x_2$	-	-	0	+
signe de a	-	-	-	-
signe de $f(x)$	-	0	+	-

Avec $a < 0$

Si $\Delta = 0$, Le polynôme se factorise en $f(x) = a(x - x_0)^2$ et sachant Un carré étant toujours positif, il est alors clair que le polynôme est du signe de a .

x	x_0	
Signe de $ax^2 + bx + c$	Signe de a	Signe de a

Si $\Delta < 0$, $ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right)$ or $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ est un réel strictement positif, donc le polynôme est du signe de a

Application : Résoudre les inéquations suivantes : $2x^2 + 5x - 3 < 0$; $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 \leq 0$; $-5x^2 + x - 3 < 0$; $-x^2 + 2x - 4 \geq 0$.

III- Résolution des systèmes d'équations

Un système d'équation est de la forme





$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases} \quad \text{Avec } a, b, c, a', b' \text{ et } c' \text{ des réels}$$

La résolution d'un tel système se fait de plusieurs méthodes :

III.1 Résolution graphique

Construire (D) et (D') d'équation respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$

Les coordonnées du point d'intersection de (D) et (D') est le couple solution du système.

III.2 Résolution par la combinaison linéaire (ou addition)

Nous présenterons un exemple :

Exemple 1.11 : Résolvons le système

$$(S) : \begin{cases} 3x + 4y = 4 \\ 5x + 7y = 6 \end{cases} \quad \text{Multiplions la première équation par 5 et la seconde par -3 on obtient :}$$

$$\begin{cases} 15x + 20y = 20 \\ -15x - 21y = -18 \end{cases} \quad \text{En additionnant membre à membre les deux équations, on obtient } -y = 2$$

d'où $y = -2$ En remplaçant y par sa valeur dans la première équation, on obtient : $3x + 4(-2) = 4$
 $3x - 8 = 4 \leftrightarrow 3x = 4 + 8 \leftrightarrow 3x = 12 \leftrightarrow x = \frac{12}{3} = 4$ la solution est donc $S = \{(4; -2)\}$

Application : Résoudre les systèmes suivants : $(S_1) : \begin{cases} 3x + 4y = 4 \\ 5x + 7y = 6 \end{cases} \quad (S_2) : \begin{cases} x - 3y + 3 \geq 0 \\ 2x + y - 2 \leq 0 \end{cases}$

III.3 Résolution par la substitution

A partir de l'une des deux équations, on exprime l'une des inconnues en fonction de l'autre. On remplace dans l'autre équation l'inconnue trouvée par son expression. On obtient une équation à une inconnue que l'on résout et trouve la valeur de l'inconnue. On la remplace par sa valeur dans l'expression de la première inconnue

Exemple 1.12 : Résolvons le système suivant $\begin{cases} 3x + 4y = 4 \\ 5x + 7y = 6 \end{cases}$

L'équation (1) nous permet de trouver $y = 1 - \frac{3}{4}x$ en remplaçant y dans l'équation 2 on obtient

$$5x + 7\left(1 - \frac{3}{4}x\right) = 6 \leftrightarrow 5x - \frac{21}{4}x + 7 = 6 \leftrightarrow -\frac{1}{4}x = -1 \quad \text{Ainsi } y = 1 - \frac{3}{4}x = 1 - \frac{3}{4}(4) = 1 - 3 = -2$$

$x = 4 \qquad S = \{(4; -2)\}$





III.4 Résolution par la méthode du déterminant de Cramer

Pour un système de la forme $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ on calcule le déterminant Δ qui est de la forme :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \text{ puis } \Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b \text{ et } \Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$$

La solution est de la forme $S = \left\{ \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}; \frac{\Delta_y}{\Delta} \right) \right\}$ pour tout $\Delta \neq 0$;

La solution est de la forme $S = \infty$ si $\Delta = 0$ et $(\Delta_x \neq 0 \text{ ou } \Delta_y \neq 0)$.

Exercices d'application

1- Résoudre les équations suivantes dans IR

a) $25x^2 - 370x - 231 = 0$ c) $\frac{x^2}{2} + \frac{43}{60}x - \frac{2}{15} = 0$

b) $-6x^2 + 11x + 5 = 0$ d) $-\frac{5}{3}x^2 + \frac{4}{7}x - \frac{5}{6} = 0$

2- Factorisez si possible

a) $P(x) = x^2 - 5x - 6$ c) $P(x) = 5x^2 - 4x + \frac{4}{5}$

b) $P(x) = 9x^2 - 12x + 4$ d) $P(x) = 25x^2 - 231 + 370x$

3- Résoudre les systèmes suivant

a) $\begin{cases} a + b = 3 \\ ab = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y = 23 \\ 1500x + 2800y = 46200 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 3y = 4x \\ y = x + 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 9 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + y = 37 \\ x = 6y + 2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x - y + 4 = 0 \end{cases}$





Thème 2 : Limites et continuités

Avant de voir ce thème nous parlerons de généralités sur la notion de fonctions

I. Les limites

A. Limites des fonctions de référence

Nous avons comme limites des fonctions de références :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0_{(+)}} \frac{1}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0_{(-)}} \frac{1}{x} = -\infty$$

B. Opérations sur les limites

Dans toute cette partie f et g désignerons des fonctions polynomiales de la forme $(ax + b)$ ou $(ax^2 + bx + c)$

B.1 Limites d'une somme de fonction

si f a pour limite	si g a pour limite	alors $f + g$ a pour limite
l	l'	$l + l'$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	FI

B.2 Limites d'un produit de fonction





si f a pour limite	si g a pour limite	alors $f \times g$ a pour limite
l	l'	ll'
$l > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$l > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l < 0$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
0	$\pm\infty$	FI

B.3 Limites d'un quotient

si f a pour limite	si g a pour limite	alors f/g a pour limite
l	$l' \neq 0$	l/l'
l	$\pm\infty$	0
si f a pour limite	si g a pour limite	alors f/g a pour limite
$+\infty$	$l' > 0$	$+\infty$
$+\infty$	$l' < 0$	$-\infty$
$-\infty$	$l' > 0$	$-\infty$
$-\infty$	$l' < 0$	$+\infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	FI

si f a pour limite	si g a pour limite	alors f/g a pour limite
$l > 0$ ou $+\infty$	0 en restant > 0	$+\infty$
$l > 0$ ou $+\infty$	0 en restant < 0	$-\infty$
$l < 0$ ou $-\infty$	0 en restant > 0	$-\infty$
$l < 0$ ou $-\infty$	0 en restant < 0	$+\infty$
0	0	FI

NB : la limite à l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$) d'une fonction polynôme est la limite en $+\infty$ ou $-\infty$ de son terme de plus haut degré.

Exemple 2.1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 - 7x - 5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2) = +\infty$

La limite à l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$) d'une fraction rationnelle est la limite en $+\infty$ ou $-\infty$ des termes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur.





Exemple 2.2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4-x^2}{2x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$

C. Limites par composée et par comparaison

C.1 Limite d'une fonction composée

a, b et c désignent soit des nombres réels, soit $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ et si $\lim_{X \rightarrow b} v(X) = c$, alors $\lim_{x \rightarrow a} v(u(x)) = c$.

Exemple 2.3 Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 7}$.

Pour déterminer, éventuellement, les limites en l'infini, déterminons D_f :

$\Delta = -3 < 0$ donc le trinôme est toujours du signe de a , ici 1, donc le trinôme est toujours positif et $D_f = \mathbb{R}$.

Posons $u(x) = x^2 - 5x + 7$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = +\infty$ (monôme de plus haut degré) et limite $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$. De même en $+\infty$.

C.2 Limite d'une fonction par comparaison

Soit f une fonction. S'il existe une fonction g et un nombre réel A vérifiant pour tout réel $x \geq A$, $f(x) \geq g(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Exemple 2.4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{9x^2 + 1} - 2x$ pour tout réel positif x , $9x^2 + 1 \geq 9x^2$ donc $\sqrt{9x^2 + 1} \geq 3x$ ainsi pour tout réel positif x $f(x) \geq x$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Théorème (dit des gendarmes)

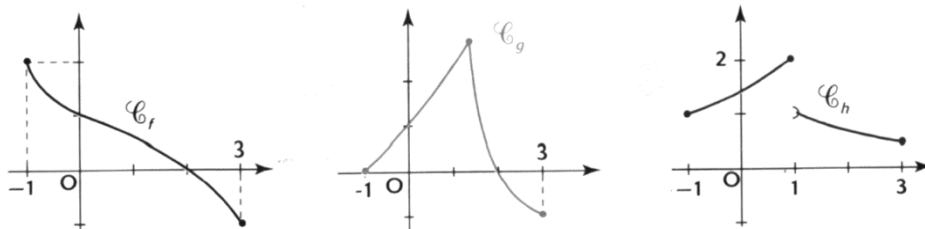
Soit f une fonction, S'il existe deux fonctions u et v , et un nombre réel A vérifiant : pour tout réel $x \geq A$, $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = l$ alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

II. Continuité

1- Définition

Une fonction est continue sur un intervalle I si elle est définie sur cet intervalle et si sa courbe se trace d'un « trait continu », sans lever le crayon



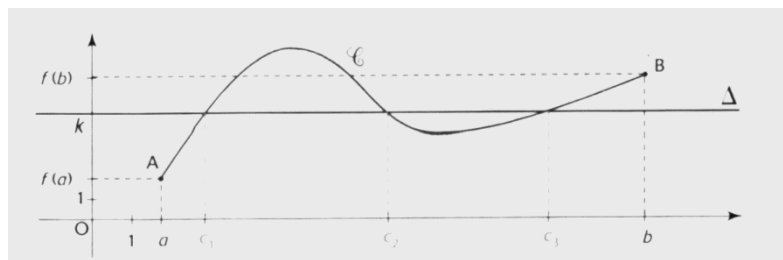


2- Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

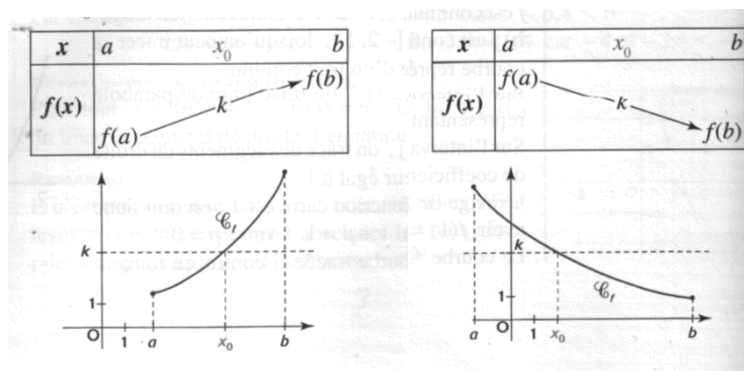
Autrement dit, quand la fonction est continue sur $[a ; b]$, toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$ sont prises au moins une fois.



En particulier si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, la valeur 0 est une valeur intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$: il existe au moins un c de l'intervalle $[a ; b]$ tel que $f(c) = 0$. Autrement dit, l'équation $f(x) = c$ admet au moins une solution dans $[a ; b]$.

4- Cas d'une fonction continue et strictement monotone

Dans un tableau de variation, les flèches obliques traduisent la continuité et la stricte monotonie d'une fonction sur un intervalle



Dans ce cas où la fonction est continue et strictement monotone sur $[a ; b]$ il est clair que l'équation $f(x) = k$ possède une solution x_0 et une seule dans l'intervalle $[a ; b]$.





Exercices d'application



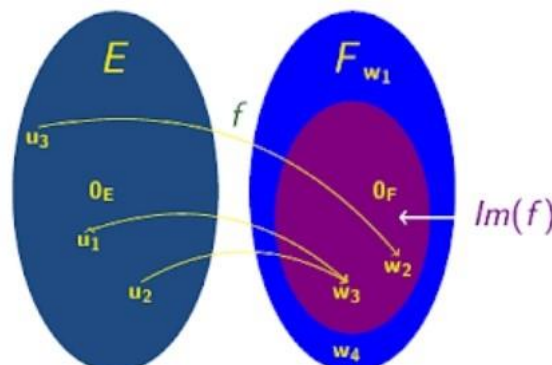
Thème 3 : Généralités sur les fonctions et études des fonctions

I- Généralités

a- Fonctions

Une fonction, par définition est un polynôme permettant de définir un résultat pour chaque valeur d'un ensemble appelé domaine.

Ce domaine ou ensemble de définition est l'intervalle (réel ou imaginaire) sur lequel cette fonction existe. Autrement dit pour une fonction f dont l'ensemble de départ est noté E et l'ensemble d'arrivée F , son domaine est l'ensemble des éléments de E qui possèdent une image dans F par f .



Nous déterminons les domaines de définition de certaines fonctions polynômes

- Les fonctions du style : $f(x) : ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b ou $c = 0$, le domaine de définition est l'ensemble des nombres réels que nous notons :

$$D_f = \mathbb{R} =]-\infty ; +\infty[$$

- Les fonctions du style : $f(x) : \frac{p(x)}{q(x)}$ avec $p(x)$ et $q(x)$ de la forme $ax^2 + bx + c$. le domaine de définition est déterminé suivant la condition d'existence de la fonction $f(x)$.

$f(x)$ existe si et seulement si : $Q(x)$ est différent de 0. Pour tout $a = 0$ on a $Q(x) = bx + c$

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ on a } Q(x) \neq 0 \rightarrow bx + c \neq 0 \rightarrow bx \neq -c \rightarrow x \neq \frac{-c}{b}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-c}{b} \right\} =]-\infty ; \frac{-c}{b}[\cup] \frac{-c}{b} ; +\infty[$$

- Les fonctions du style : $f(x) : \sqrt{ax^2 + bx + c}$, avec a, b et $c = 0$ ou $\neq 0$. Le domaine de définition de f est :

$$D_f = \mathbb{R}^* = [0 ; +\infty[$$





NB : Après le domaine de définition nous déterminons les limites de la fonction aux bornes du domaine en utilisant les propriétés des limites énoncées au thème précédent.

Exemple 3.1. Déterminer l'ensemble de définition de fonctions suivantes

$$f(x) = x^2 - 3x + 7; \quad g(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 1}; \quad h(x) = \frac{x - 1}{x^2 + 4}; \quad k(x) = \frac{x^2 + 3x}{2 + x^2}; \quad m(x) = \sqrt{3 - 6x}$$

b- Sens de variation

Le sens de variation d'une fonction dépend de plusieurs conditions émanant de son domaine.

Elle peut être : **Croissante** ; **Décroissante** ; **Constante**

Pour mieux le déterminer, il nous est conseillé de calculer au préalable la dérivée f' de f lorsque celle-ci est dérivable sur son ensemble de définition.

c- Parité et éléments de symétrie

c-1 Parité

Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et de domaine de définition D_f ;

f est **paire** lorsque $\forall x \in D_f$ et $-x \in D_f$ on a $f(x) = f(-x)$;

f est **impaire** lorsque $\forall x \in D_f$ et $-x \in D_f$ on a $f(-x) = -f(x)$

c-2 Elément de symétrie

Soit (C) la courbe représentative dans un repère orthogonal d'une fonction f définie sur D_f ;

La droite $(\Delta) : x = a$ est axe de symétrie à la courbe de (C) si et seulement si pour tout réel h tel que f soit définie en $a + h$ et en $a - h$, $f(a + h) = f(a - h)$ ou $f(2a - x) = f(x)$.

Le point $\Omega(a; b)$ est centre de symétrie de (C) si et seulement si pour tout réel h tel que f soit définie en $a + h$ et $a - h$, $f(a + h) + f(a - h) = 2b$ ou $f(2a - x) + f(x) = 2b$.

Exemple 3.2.

1. Montrons que $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ est paire et $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x}$ est impaire.

2. Montrons que la droite $(D) : x = -1$ est axe de symétrie à la courbe (C_f) de la fonction définie par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

3. Montrons que le point $\Omega(-1; -2)$ est centre de symétrie à la courbe (C_g) de la fonction définie par $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$.

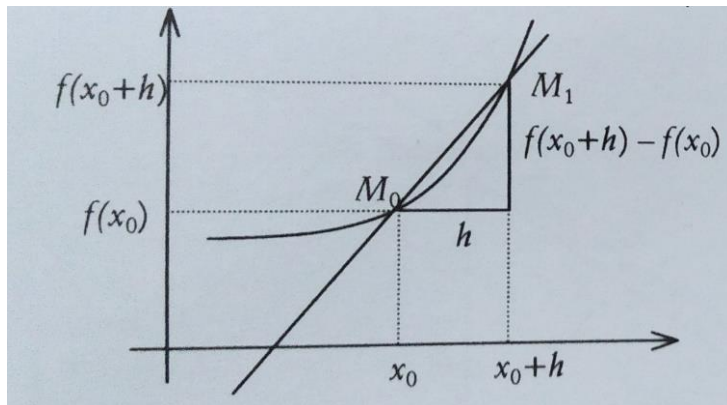




II- Fonctions dérivées

II-1 Notion de dérivée

Nous définissons (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé



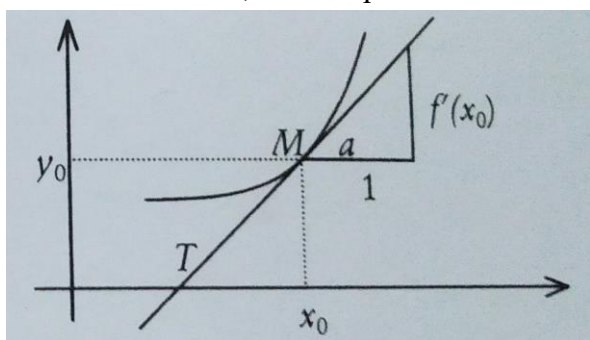
La droite M_0M_1 ici représentée admet pour équation :

$$y - f(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Si $\lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ existe, on dira que f est dérivable en x_0 et son nombre dérivé en x_0 sera :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Si cette limite est infinie, f n'est pas dérivable mais admet néanmoins une tangente au point M_0 .



Ayant pour équation réduite en M_0

$$Y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Si une fonction est dérivable sur son ensemble de définition, alors il existe une fonction f' qui à tout x de I associe $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

II-2 Dérivées des fonctions

II-2-1 Dérivées des fonctions de références

Lorsque f est dérivable sur son ensemble de définition nous pouvons trouver sa dérivée f' en nous référant à ce tableau :

Fonctions f(x)	Dérivées f'(x)	Intervalle de définition
a (a ∈ IR)	0	IR
a x + b (a, b ∈ IR)	a	IR
x ⁿ (n ∈ IN)	n x ⁿ⁻¹	IR
ax ² + b x + c (a, b, c ∈ IR)	2a x + b	IR





$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$U(x)^n$	$n U' \cdot U^{n-1}(x)$	$\mathbb{R}$
$\sqrt{U(x)}$	$\frac{U'}{2\sqrt{U(x)}}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$U(x)$ est une fonction de x

II-2-2 Opérations sur les dérivées des fonctions

Ici nous considérons U et V comme des fonctions de x

Dérivée de $U + V$

$$(U + V)' = U' + V'$$

Dérivée de $U \times V$

$$(U \times V)' = U' \cdot V + V' \cdot U$$

Dérivée de $k \times U$

$$(k \times U)' = k \cdot U'$$

Dérivée de $\frac{1}{V}$ (avec $v \neq 0$)

$$\left(\frac{1}{V}\right)' = -\frac{V'}{V^2}$$

Dérivée de $\frac{U}{V}$ (avec $v \neq 0$)

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \left(\frac{U' \cdot V - V' \cdot U}{V^2}\right)$$

Exemple 3.3. Déterminer les dérivées des fonctions suivantes lorsque celles-ci sont dérivables.

a) $f(x) = (1 - 2x) \left(\frac{1}{3}x^2 + x\right)$

d) $f(x) = (2 + x + 3x^2)(1 - x)$

b) $f(x) = (x^3 - 3)(x^2 - 3x + 1)$

e) $f(x) = (x - 1)(x + 1)(2x - 3)$

c) $f(x) = (1 + x)^2$

f) $f(x) = (5x^2 + 4x - 3)^3$





III- Etude des fonctions

Pour étudier une fonction, il est recommandé au candidat de suivre les étapes ci-dessous lui permettant de tracer sa courbe représentative au final, il faut trouver ou étudier:

- Le domaine de définition de la fonction ;
- Les limites aux bornes du domaine ;
- La parité de la fonction et les éventuelles asymptotes à la courbe ;
- La dérivée et le sens de variation ;
- Le tableau de variation ;
- L'équation de la tangente ;
- En fin tracer cette courbe dans un repère orthonormé.

Exemple 3.4. Etudier les fonctions suivantes et tracer leur courbe représentative dans un repère orthonormé.

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + x - 1$

d) $f(x) = 2 + x + 3x^2$

b) $f(x) = x^2 - 3x + 1$

e) $f(x) = (x - 1)^2$

c) $f(x) = 1 - 2x - 4x^2$

f) $f(x) = 5x^2 + 4x - 3$

Exercices d'application





Thème 4 : Suites Numériques

I - généralités

1- Définition

Soit I une partie d' $\mathbb{N}$. On appelle suite numérique toute fonction de I vers $\mathbb{R}$. Soit U une fonction définie de I vers $\mathbb{R}$ qui à n associe $U(n)$. $U(n)$ est l'image de n par U . c'est aussi le terme de rang n .

$U(n)$ est également appelé terme général de la suite U , on peut le noter tout simplement U_n . Nous notons encore la suite U par $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou (U_n) .

2- Mode de détermination d'une suite

Il existe deux modes de détermination d'une suite :

a) Par une formule explicite

Etant définie par une formule explicite, son terme général est donné en fonction de l'indice « n ». Autrement dit, nous pouvons calculer un terme de la suite en remplaçant directement son indice dans l'expression de la suite.

Exemple 4.1. Soit U_n , la suite définie par : $U_n = \frac{2n+1}{n+1}$

Calculons U_0 , U_1 , U_2 et U_{10} .

b) Par une formule de récurrence

Etant définie par une formule de récurrence, une suite est déterminée par la donnée d'un ou de plusieurs termes et d'une relation entre les termes consécutifs.

Exemple 4.2. U et V sont deux suites définies par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = -U_n + 4 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N} \qquad \begin{cases} V_0 = 1 ; \quad V_1 = 3 \\ V_{n+1} - 2V_n = V_{n-1} + 1 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

- 1) Déterminer les trois autres termes de la suite U_n ;
- 2) Déterminer V_2 et V_3

3- Représentation graphique

Cas 1 : soit (U_n) la suite définie par $U_n = n^2 + 1$. Représenter sur l'axe des ordonnées les 4 premiers termes de cette suite.

La suite (U_n) est de la forme $U_n = f(n)$ où f est la fonction associée à U_n et définie par $f(x) = x^2 + 1$.

Cas 2 : Nous considérons la suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 2U_n - 1 \end{cases}$

Représenter sur l'axe des abscisses les 5 premiers termes de cette suite.

La suite (U_n) est de la forme $U_{n+1} = f(U_n)$ où f est la fonction associée à U_n et définie par $f(x) = 2x + 1$.

Remarque : Pour construire graphiquement les termes d'une suite définie par une formule de récurrence :





- On trace d'abord dans un repère orthonormé la représentation graphique de la fonction f définissant la relation de récurrence et la droite d'équation $Y = X$.
- On part de U_0 en abscisse, l'ordonnée du point de la courbe correspondant à cette abscisse nous donne U_1 .

II- Etude d'une suite

1) Majoration, minoration

Soit (U_n) une suite numérique,

- (U_n) est **minorée** s'il existe un nombre réel m tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n \geq m$;
- (U_n) est **majorée** s'il existe un nombre réel M tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n \leq M$;
- (U_n) est **bornée** si elle est à la fois **minorée** et **majorée** ;

On dit que m est un minorant de (U_n) et M un majorant de (U_n) .

Remarque : une suite est positive si elle est minorée par 0 et négative si elle est majorée par 0.

Exemple 4.3. Soit (U_n) la suite définie par $U_n = \frac{3n}{n+1}$. Montrer que cette suite est minorée et majorée.

2) Sens de variation

Pour étudier le sens de variation d'une suite (U_n) , nous pouvons étudier le signe de la différence $U_{n+1} - U_n$.

- Si $U_{n+1} - U_n \geq 0$, alors la suite (U_n) est **croissante** ;
- Si $U_{n+1} - U_n \leq 0$, alors la suite (U_n) est **décroissante** ;
- Si $U_{n+1} - U_n = 0$, alors la suite (U_n) est **constante**.

Si la suite (U_n) est à termes positifs, nous pouvons comparer le rapport de U_{n+1} et U_n à 1 pour étudier son sens de variation.

- | | |
|--|---|
| - Si $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1$, alors la suite (U_n) est croissante ; | Si $n \leq p$ et (U_n) est croissante , alors $U_n \leq U_p$ |
| - Si $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1$, alors la suite (U_n) est décroissante ; | Si $n \leq p$ et (U_n) est décroissante , alors $U_n \geq U_p$ |
| - Si $\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$, alors la suite (U_n) est constante . | Si $n \neq p$ et (U_n) est croissante , alors $U_n = U_p$ |

Exemple 4.4. Etudier le sens de variation de chacune des suites suivantes

$$U_n = \frac{2n}{n+1}, \quad V_n = \frac{3n^2 - n}{n+1}, \quad R_n = n^2 + 1$$

Exemple 4.5. Etudier la convergence de chacune des suites suivantes

$$U_n = \frac{2n+1}{n+2}, \quad V_n = \frac{3n^2 - n}{n+1}, \quad W_n = -2n^2 + n - 1, \quad X_n = \cos(n\pi) + 2$$

- | |
|---|
| <p>- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$ avec $l \in \mathbb{R}$, alors (U_n) est une suite convergente vers l ;</p> <p>- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \infty$, alors (U_n) est une suite divergente.</p> |
|---|





III-Nature d'une suite

1) Suites Arithmétiques

a) Définition

(U_n) est une suite **arithmétique** s'il existe un nombre réel r tel que pour tout n élément de $\mathbb{N}$, on a : $U_{n+1} = U_n + r$. Le nombre « r » est appelé « **Raison** » de la suite (U_n) .

Exemple 4.6. Soit la suite définie par $U_n = -2n + 5$. Montrer que (U_n) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) Terme général

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r . n et p deux entiers naturels ; alors on a :

$U_n = U_p + (n - p)r$. avec U_p le premier terme et p l'indice du premier terme. Si $p = 0$, alors $U_n = U_0 + nr$

Exemple 4.7.

En considérant une suite (U_n) de raison r et de premier terme U_0 , Exprimons U_1 , U_2 et U_3 en fonction de U_0 et r .

En considérant une suite (U_n) , on donne $U_3 = -3$ et $U_7 = 9$, exprimons de prime le premier terme U_0 et la raison de la suite, en secundo l'expression de U_n en fonction de n .

c) Somme des termes consécutifs

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r . n et p deux entiers naturels ; On pose

$S_n = U_p + U_{p+1} + U_{p+2} + \dots + U_n$. Alors $S_n = \left(\frac{n-p+1}{2}\right) (U_n + U_p)$.

Si $P = 0$, alors on a $S_n = \left(\frac{n+1}{2}\right) (2U_0 + nr)$.

Exemple 4.8. Soit (U_n) une suite arithmétique de raison 2. On donne $U_1 = 3$.

On pose $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$.

- Exprimer S_n en fonction de n ;
- Déterminer n pour que $S_n = 440$

2) Suites Géométriques

a) Définition

(U_n) est une suite **Géométrique** s'il existe un nombre réel q **non nul** tel que pour tout n élément de $\mathbb{N}$, on a : $U_{n+1} = qU_n$. Le nombre « q » est appelé « **Raison** » de la suite (U_n) .

Exemple 4.9. Soit la suite définie par $U_n = 3^n$. Montrer que (U_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) Terme général

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q . n et p deux entiers naturels ; alors on a :

$U_n = q^{n-p} U_p$. avec U_p le premier terme et p l'indice du premier terme. Si $p = 0$, alors $U_n = q^n U_0$.

Exemple 4.10. Soit (U_n) une suite géométrique. On donne $U_2 = 16$ et $U_4 = 4$

- Déterminer le premier terme U_0 et la raison q de cette suite.





b) Donner l'expression de U_n en fonction de n .

c) Somme des termes consécutifs

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q . n et p deux entiers naturels ; On pose

$$S_n = U_p + U_{p+1} + U_{p+2} + \dots + U_n. \text{ Alors } S_n = \left(\frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \right) U_p.$$

Si $p = 0$, alors on a
$$S_n = \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right) U_0$$

Exemple 4.11. Soit (U_n) une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$. On donne $U_0 = 9$.

On pose $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$.

- Exprimer S_n en fonction de n ;
- Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

Exercices d'application

Voir fiche sur les
suites





Thème 5 : Dénombrement

A - Complément sur les ensembles

PRÉ-REQUIS :

- **Ensemble fini** : C'est un ensemble qui possède un nombre fini d'élément
- **Cardinal d'un ensemble** : C'est le nombre d'élément de cet ensemble.

Si $E = \{a; b; c; d; e\}$ alors E est un ensemble fini et on a : $\text{card}(E) = 5$.

- **Réunion de deux ensembles A et B** (noté $A \cup B$) : Ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B . *(faire un diagramme)*
- **Intersection de deux ensembles A et B** (noté $A \cap B$) : Ensemble des éléments qui sont à la fois dans A et dans B . *(faire un diagramme)*
- **A est un sous-ensemble de B ou A est inclus dans B** (on note $A \subset B$) lorsque tout est élément de A se trouve dans B . *(faire un diagramme)*

SITUATION PROBLEME : Afin de dénombrer le nombre d'élèves inaptes (ne pratiquant aucun sport) dans une classe de première CG de 90 élèves où sont pratiqués deux sports (football et handball), le professeur de sport procède à un sondage et obtient les résultats suivant :

- 50 élèves pratiquent le football
- 30 élèves pratiquent le handball
- 20 élèves pratiquent les deux sports

Ne sachant plus comment continuer, il fait appel à votre connaissance sur le dénombrement ; aider votre professeur de sport à relever sa difficulté.

ACTIVITE D'APPRENTISSAGE :

Activité 1 :

Soit l'ensemble $F = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ et G un sous ensemble de F tel que $G = \{1; 2; 4; 5; 8\}$.

Soit H l'ensemble des éléments de F qui ne se trouvent pas dans G . Recopie et complète :

$H = \{ \dots \dots \dots \}; \text{card}(F) = \dots ; \text{card}(G) = \dots ; \text{card}(H) \dots$

En déduire une formule permettant de calculer $\text{card}(H) \dots$

Conclusion : L'ensemble H est appelé complémentaire de G dans F et on note C_G^F .

Activité 2 :

Soit E l'ensemble des 15 premières lettres de l'alphabet français. A et B deux sous-ensembles de E tels que : $A = \{a; b; c; d; e; f; k; h; l\}$ et $B = \{b; e; f; g; i; j\}$.

- 1- Représenter le diagramme de VENN traduisant cette situation.
- 2- a) Recopie puis complète : $\text{card}(A) = \dots ; \text{card}(B) = \dots ; A \cup B = \{ \dots \dots \dots \}$





$$\text{card}(A \cup B) = \dots ; A \cap B = \{\dots \dots \dots\} \quad \text{card}(A \cap B) = \dots$$

b) En déduire une formule permettant de calculer $\text{card}(A \cup B)$.

3- On désigne par C l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent ni à A ni à B. Déterminer les éléments de C et $\text{card}(C)$.

Recopie puis complète : $\text{card}(C) = \text{card}(\dots) - \text{card}(\dots)$.

RÉSUMÉ :

1- Réunion et Intersection de deux ensembles finis.

Soient A et B deux ensembles finis. La réunion des ensembles A et B est noté $A \cup B$ et leur intersection est notée $A \cap B$ et on a :

- $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$
- $\text{card}(A \cap B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cup B)$.

NB : $\text{card}(\emptyset) = 0$

Remarque : Si les ensembles A et B sont disjoints c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$ (A et B n'ont rien en commun) alors : $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$.

2- Complémentaire d'un ensemble.

Soit E un ensemble fini et A un sous-ensemble de E. On appelle **complémentaire de A dans E** noté C_E^A (ou $\bar{A}$ ou $E \setminus A$) l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A. (faire un diagramme)

Propriété : $\text{card}(C_E^A) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$

Remarque : Etant donné deux ensembles non disjoints A et B,

- l'ensemble des éléments de A qui ne sont pas dans B (les éléments qui appartiennent *uniquement* à A) est noté $A \setminus B$ et on a : $\text{card}(A \setminus B) = \text{card}(A) - \text{card}(A \cap B)$.
- l'ensemble des éléments de B qui ne sont pas dans A (les éléments qui appartiennent *uniquement* à B) est noté $B \setminus A$ et on a : $\text{card}(B \setminus A) = \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.

Exemple 5.1. Pour participer aux interclasses de football masculin organisés dans un lycée, le prof de sport d'une classe de première A (comportant 50 garçons) souhaiterait faire participer les garçons pratiquants uniquement le football. Sachant que deux sports sont pratiqués dans cette classe, après un sondage effectué, il en ressort que : 25 garçons jouent au football, 30 garçons jouent au basket et 8 garçons ne pratiquent aucun des deux sports.

Combien de garçons participeront-ils aux interclasses ?

B - Produit cartésien d'ensembles

RÉSUMÉ :





Définition : Etant donné deux ensembles finis A et B , on appelle **produit cartésien** de A par B , l'ensemble des couples $(a; b)$ tels que $a \in A$ et $b \in B$; il est noté $A \times B$ et on lit **A croix B** .

Propriété : $\text{card}(A \times B) = \text{card}(A) \times \text{card}(B)$.

Remarques : Soient $E_1, E_2, \dots, E_p$, p ensembles finis ($p \in \mathbb{N}$) alors on a :

► $\text{card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p) = \text{card}(E_1) \times \text{card}(E_2) \times \dots \times \text{card}(E_p)$

► Si $E_1 = E_2 = \dots = E_p = E$, alors

$\text{card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p) = \text{card}(E^p) = \text{card}(E) \times \text{card}(E) \times \dots \times \text{card}(E) = (\text{card}(E))^p$.

Vocabulaire : Un élément de l'ensemble E^p ($p \geq 2$) est de la forme $(n_1, n_2, \dots, n_p)$ et est appelé : **p -uplets ou p -listes**.

Remarque Si $E = \{1; 2; 4; 5; 8\}$ alors :

- Eléments de $E^2 = E \times E$: $(2; 4)$; $(5; 1)$ appelés couples ou 2-uplets.
- Eléments de $E^3 = E \times E \times E$: $(1; 2; 4)$; $(5; 4; 1)$ appelés triplets ou 3-uplets

Exemple 5.2.

- 1- Dans une épreuve d'examen, on propose trois sujets de mathématiques et cinq sujets de français. Un candidat doit choisir un sujet de chaque discipline. **Combien a-t-il de choix possibles ?**
- 2- Une femme a dans sa penderie quatre jupes, cinq chemises et sept vestons. Pour s'habiller, elle choisit au hasard une jupe, une chemise et un veston. **De combien de façons différentes peut-elle s'habiller ?**
- 3- Quatre amis vont à une soirée et devraient être accompagné chacun de son épouse. A la dernière minute, une épouse est indisponible et ne peut accompagner son mari. A l'ouverture de la soirée dansante, les quatre amis forment des couples (composé d'un homme et d'une femme).
 - a) Combien de couples peut-on former ? (On pourra utiliser un tableau à double entrée ou un arbre de choix afin d'énumérer tous les couples possibles)
 - b) Combien peut-on former de couples tels qu'un homme ne danse pas avec sa femme.

C - P-UPLETS ET ARRANGEMENTS

1- P-uplets ou P-listes d'un ensemble fini.

Soit E un ensemble fini à n éléments ($n \in \mathbb{N}$) et p un entier naturel non nul ($p \in \mathbb{N}^*$). On appelle **p -uplet** ou **p -liste** d'élément de E tout élément de l'ensemble $E^p = E \times E \times \dots \times E$.

Vocabulaire : Soit $E = \{a, e, i\}$. Donnons quelques :

+ 3-uplets de E : (a, e, i) ; (a, a, i) ; (e, e, e) etc...

+ 4-listes de E : (a, e, a, i) ; (a, a, a, i) ; (a, a, a, a) etc...

NB : $(a, a, i) \neq (a, i, a)$





Remarque : Un p -uplet correspond à une disposition ordonnée avec répétition de p éléments qui s'identifie dans certain énoncé par l'expression "**tirage successif avec remise**".

Propriété : Le nombre de p -uplets ou p -listes d'un ensemble à n éléments est n^p .

Exemple d'application :

- 1- Combien de nombre à quatre chiffres peut-on former avec les chiffres 1;3 et 5 ?
- 2- On désire former des codes à quatre chiffres (distincts ou non) pris parmi les chiffres de la numérotation décimale $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$.
 - a) Combien de codes distincts peut-on former ?
 - b) Combien de code commençant par 2 peut-on former ?
- 3- De combien de façons distinctes peut-on ranger 5 livres dans 3 tiroirs numérotés de 1 à 3 sachant qu'un tiroir peut contenir de 0 à 5 livres ?

2- Arrangement- Permutation- Anagramme.

a) Notion de Factorielle.

Soit n un entier naturel non nul. On appelle **factoriel** n le nombre le nombre noté $n!$ et définie par $n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1$.

Par convention, $0! = 1$

Remarque : $1! = 1$; $n! = n \times (n - 1)!$

Exemple : $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$; $6! = 6 \times 5! = 6 \times 120 = 720$; $\frac{9!}{7!} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{7!} = 9 \times 8 = 72$

b) Arrangement d'éléments d'un ensemble fini.

Soit E un ensemble fini à n éléments ($n \in \mathbb{N}$) et p un entier naturel non nul ($p \in \mathbb{N}^*$) avec $p \leq n$. On appelle **arrangement** de p éléments de E toute disposition ordonnée de p éléments de E deux à deux distincts.

Note : Soit $E = \{a, e, i, o\}$. Donnons quelques :

+ Arrangements de 2 éléments de E : (a, e) ; (i, e) ; (a, o) ; (o, e)

+ Arrangements de 3 éléments de E : (a, e, o) ; (i, e, a) ; (a, i, o) ; (o, a, e)

NB : (a, a) n'est pas un arrangement de 2 éléments de E .

Remarque : Un arrangement correspond à une disposition ordonnée et sans répétition des éléments qui s'identifie dans certain énoncé par l'expression "**tirage successif sans remise**".

Propriété : Le nombre d'arrangement de p éléments d'un ensemble à n éléments est noté

A_n^p (on lit : arrangement de p dans n) et défini par : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$: C'est le produit de p entiers naturels consécutifs dont le grand est n c'est-à-dire

$$A_n^p = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - p + 1).$$





Remarque : $A_n^0 = 1$; $A_n^1 = n$ et $A_n^n = n!$

c) Permutation d'éléments d'un ensemble fini.

Soit E un ensemble fini à n éléments. On appelle **permutation** d'éléments de E tout arrangement des n éléments de E .

Le nombre de permutation d'un ensemble à n éléments est $A_n^n = n!$.

Exemple 5.3. Le nombre de façons différentes de faire asseoir quatre personnes autour d'une table à quatre places numérotés de 1 à 4 est : $A_4^4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ façons.

d) Anagramme d'un mot.

On appelle **anagramme d'un mot** le mot (ayant un sens ou non) obtenu en permutant uniquement les lettres du mot initiale.

Exemple 5.4. BENI, EBNI, NIBE, etc..... sont des anagrammes du mot BIEN.

Le nombre d'anagramme d'un mot ayant n lettres distinctes est $n!$.

NB : Si dans un mot à n lettres, une lettre se répète n_1 fois, une autre lettre se répète n_2 fois, etc... alors le nombre d'anagramme de ce mot est : $\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots}$.

Exemple 5.5. Le nombre d'anagramme du mot AFRIQUE est : $7! = 5040$.

Le nombre d'anagramme du mot PROBATOIRE est : $\frac{10!}{2! \times 2!} = 907200$.

D - COMBINAISONS

RÉSUMÉ : Soit E un ensemble fini à n éléments et p un entier naturel tel que $p \leq n$. On appelle **combinaison** de p éléments de E tout sous-ensemble de E ayant p éléments.

Exemple : Soit l'ensemble $E = \{a; b; c; d; e\}$
 $\{a; b; e\}$ est une combinaison de 3 éléments de E .
 $\{b; c; d; e\}$ est une combinaison de 4 éléments de E .

NB : $\{a; b; e\} = \{a; e; b\}$

Remarque : Une combinaison correspond à une disposition non ordonnée et sans répétition des éléments qui s'identifie dans certains énoncé par l'expression " **tirage simultané**".

Propriété : Le nombre de combinaison de p éléments dans un ensemble à n éléments est noté C_n^p (on lit : combinaison de p dans n) et défini par $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}$.

Exemple : $C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2!} = 10$. $C_{10}^7 = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{10!}{7! \times 3!} = 120$.

Remarque : $C_n^1 = n$; $C_n^0 = 1$; $C_n^n = 1$; $A_n^p = p! \times C_n^p$.

Exercice d'application :





- 1- Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations : a) $C_n^2 = 190$; b) $A_n^2 = 2n^2 - n - 64$.
- 2- Dans une classe de première comportant 20 filles et 15 garçons, on souhaite former une équipe de 5 élèves pour participer au concours de littérature organisé dans cette école.
 - a) Combien d'équipes peut-on former ?
 - b) Combien peut-on former d'équipes comportant exactement 3 filles ?
 - c) Combien peut-on former d'équipes ne comportant aucun garçon ?

Tableau Récapitulatif :

Types de Tirage	Les éléments sont ordonnés	Les éléments sont distincts	Outils du dénombrement	Nombre de Tirage
Tirage successif avec remise	OUI	NON	p-uplets	n^p
Tirage successif sans remise	OUI	OUI	Arrangement	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$
Tirage simultané	NON	OUI	Combinaison	$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Exercices d'application

Voir fiche sur le dénombrement





Thème 6 : Statistiques





Thème 7 : Sujets d'examens

Ici nous proposons les sujets d'examen de probatoire STT ACC et CG des années précédentes.



VERS Le Probatoire





1- Probatoire ACC et CG 2018

Ministère des Enseignements Secondaires
Office du Baccalauréat du Cameroun

Examen : **PROBATOIRE**
Spécialités : **CG-ACC**
Epreuve : **MATHÉMATIQUES**
Durée : 1 h Coef : 1
Série : **ACC**

L'épreuve comporte deux parties réparties sur une seule page.

PARTIE A : 8 points

- I- Une entreprise compte 100 employés dont 80 hommes. On choisit simultanément et au hasard 3 employés pour aller suivre un stage de formation.
- Combien de choix possibles peut-on faire ? **1 pt**
 - Déterminer le nombre de choix possibles comportant exactement 2 femmes. **1 pt**
 - Déterminer le nombre de choix possibles comportant au moins 2 hommes. **1,5 pt**
- II- On propose à chaque employé de cette entreprise le contrat suivant pour leur rémunération : 2 500 000 FCFA la première année, et pour les autres années, une augmentation de 300 000 FCFA par an. On note u_n le salaire annuel d'un employé au bout de n années de service.
- Calculer u_1 , u_2 et u_3 . **1,5 pt**
 - Exprimer pour tout entier naturel n , u_n en fonction de n . **0,5 pt**
 - Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n = 300000n + 2200000$. **1 pt**
 - Déduire le salaire annuel d'un employé au bout de 10 ans. **0,5 pt**
 - Au bout de combien d'années le salaire annuel d'un employé sera égal à 6 700 000 FCFA ? **1 pt**

PARTIE B : 12 points

La courbe (C) ci-contre est la représentation graphique d'une fonction polynôme f de second degré définie sur $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$.

i) Par lecture graphique :

- Déterminer $f(-\frac{1}{2})$ et $f(\frac{1}{2})$. **1 pt**
- Résoudre dans $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$:
 - Les équations : i) $f(x) = 0$; ii) $f(x) = 5$. **2 pts**
 - Les inéquations : i) $f(x) < 0$; $f(x) > 0$. **2 pts**
- Dresser le tableau de variation de f sur $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$. **1 pt**

ii) On suppose que $f(x) = ax^2 + bx + 3$ où a et b sont des réels.

- En utilisant la question i)1. Montrer que a et b vérifient le système :

$$\begin{cases} 3a - b = 1 \\ a + b = 3 \end{cases}$$
 1 pt
- Déterminer a et b , puis l'expression de $f(x)$. **1,5 pt**

- Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0. **1 pt**
- Reproduire la courbe (C), construire la tangente (T) et en déduire dans le même repère, la construction de la courbe (C') de la fonction g définie par $g(x) = -f(x)$. **2,5 pts**

