

ETUDE DE FONCTION NUMERIQUE D'UNE VARIABLE REELLE

1- Etude de la notion de limite :

1-1- Détermination de l'ensemble de définition d'une fonction

1-1-1- Utilisation de la forme explicite

Activité : Soit les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

a- $f(x) = x^5 + 6x^3 + 7x - 4$ b- $f(x) = \frac{x+3}{x+2}$ c- $f(x) = \sqrt{3-x}$ d- $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}$

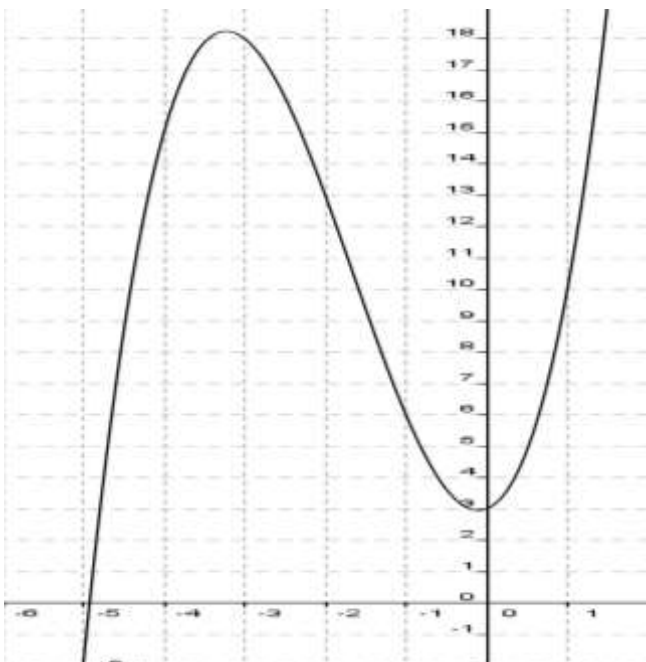
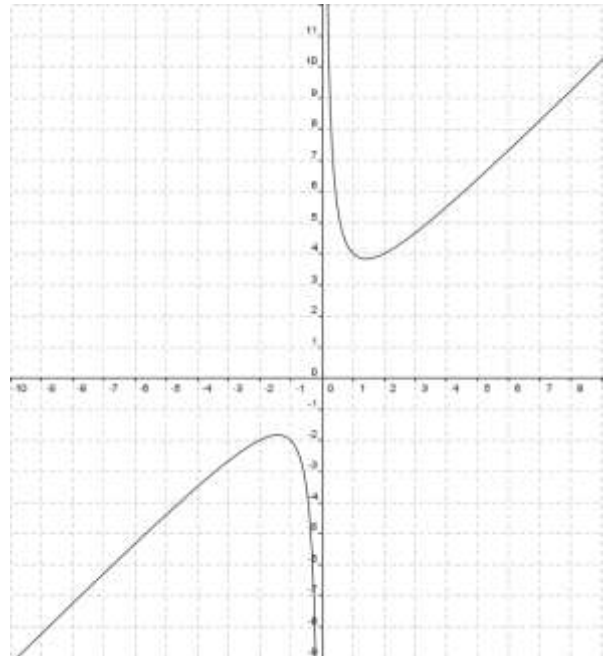
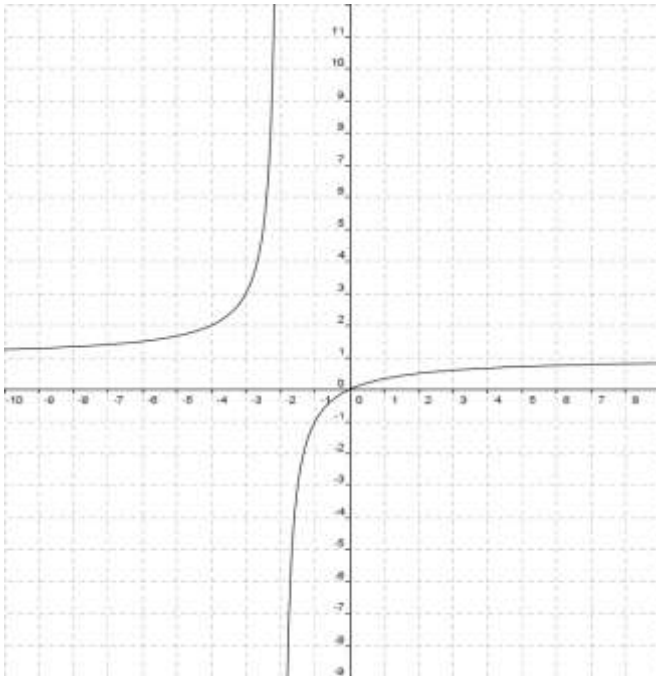
e- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ f- $g(x) = \sqrt{x^2 + 5x - 6}$ g- $h(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 6x - 7}{x^2 - 1}}$ h- $t(x) = \frac{x+3}{\sqrt{3x^2 - x - 2}}$

i- $p(x) = \frac{\sqrt{4x^2 + 4x + 1}}{9 - x^2}$ j- $g(x) = \sqrt{-x^2 - 5x + 6}$ k- $t(x) = \frac{x+3}{\sqrt{|3x^2 - x - 2|}}$ l- $h(x) = \sqrt{\left| \frac{x^2 - 6x - 7}{x^2 - 1} \right|}$

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions ci - dessus.

1-1-2- Utilisation de la représentation graphique

Activité : A travers les représentations graphiques ci - dessous. Préciser l'ensemble de définition des fonctions



1-2- Définition de la notion de limite

Activité :

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -x + 3$. Etudier le comportement de f au voisinage du réel $x_0 = 1$ en complétant le tableau de valeurs suivant :

x	0,99	0,999	0,9999	1	1,0001	1,001	1,01
$f(x)$							
$ f(x) - 2 $							

On constate que la distance entre $f(x)$ et le réel 2 dévient aussi petite que l'on veut lorsque x est de plus en plus proche de x_0 .

Nous traduisons ce fait en disant que le réel 2 est la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers x_0 .

Définition : Soit f une fonction numérique définie par sur son domaine de définition, x_0 et l deux réels. On dit que l est la limite de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow x_0$ ou encore que l est la limite de f au point x_0 , si et seulement si la distance entre l et $f(x)$ devient de plus en plus petite que l'on veut lorsque x ($x \in D_f$) est de plus en plus proche de x_0 .

Notation : Si l est la limite de f au point x_0 , on note $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ ou $\lim_{x_0} f = l$

1-3- Détermination des limites

1-3-1- Enoncer des théorèmes généraux sur les limites

1-3-1-1- Limites de références

- Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} k f(x) = kl$
- $n \in \mathbb{N}^*$ et n pair : $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \end{cases}$
- $n \in \mathbb{N}^*$ et n impair : $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \end{cases}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

Exemple : Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -2} 2x + 4 ; \lim_{x \rightarrow -2} (2x^2 + 5x - 15) ; \lim_{x \rightarrow 0} (2x^2 + 5x - 15)^2$$

1-3-1-2- Limite somme - Limite produit - Limite quotient :

Soient f et g deux fonctions numériques, l et l' deux réels et $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$

Limite somme :

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	l	l	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	l'	∞	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)]$	$l + l'$	∞	$-\infty$	$+\infty$	?	?

Limite produit :

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	l	$l > 0$		$l < 0$		$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	l'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	∞
$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \times g(x)]$	$l \times l'$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

Limite quotient :

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	l	$-\infty$		$+\infty$		0	$l > 0$		$l < 0$		∞	0
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$l' \neq 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l > 0$	$l < 0$	$-\infty$	0^+	0^-	0^-	0^+	∞	0
$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]$	$\frac{l}{l'}$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$?$	$?$

Remarque : Dans le calcul des limites on a quatre formes indéterminées qui sont : $\infty \times 0$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$ **et** $+\infty - \infty$

Application :

Calculer les limites suivantes $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2+6x-7}{x-1} \right)$; $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2-1}{x+1} \right)$; $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2x^2-x-6}{2-x} \right)$;
 $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^3-2x^2-21x-18}{x-3} \right)$

Théorème des gendarmes

Soit l un réel et f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle de la forme $[a; +\infty[$ telles que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

Théorème de Comparaison

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle de la forme $[a; +\infty[$.

- Si pour tout $x \in [a; +\infty[$, $f(x) \geq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- Si pour tout x de $[a; +\infty[$, $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

1-3-2- Utilisation des théorèmes et les règles de calculs sur les limites**Règle sur les limites de fonction polynômes et rationnelles à l'infini**

- ✓ A l'infini un polynôme a même limite que son monôme le plus haut degré.
- ✓ A l'infini une fonction rationnelle a même limite que son monôme le plus haut degré du numérateur et celui du dénominateur.

Exemple : Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 + 5x - 15)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 + 5x - 15)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2+5x-15}{5x^4+9x^2-1} \right)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2+5x-15}{5x^4+9x^2-1} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^5+x+1}{-5x^2-x^2-1} \right)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^5+x+1}{-5x^2-x^2-1} \right)$

Règle sur les limites des fonctions comportant des radicaux

Utilisation de l'expression conjuguée de $a - b$ est $a + b$ pour faire partir la racine carrée

Exemples : Calculer les limites :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-x} + x)$
- $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x^2-9}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} \right)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-x} - x)$
- $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{\sqrt{3x^2-x} - 2}{x^2-1} \right)$

Règle sur les limites des fonctions trigonométriques :

Formules usuelles : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1 ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1.$$

Exemple : Calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x} \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 4x} \quad 3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{3(1 - \cos x)}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad 5) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(\frac{2 \cos x - 1}{x - \frac{\pi}{3}} \right).$$

Limite à gauche - Limite à droite :

Exemple : Calculer les limites suivantes aux bornes des ensembles de définitions

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-5}{2-x} ; \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x^2-25}$$

2- Etude de la continuité d'une fonction numérique

2-1- Définition de la continuité d'une fonction

2-1-1- Définition de la notion de continuité en un point x_0 :

Soit f une fonction numérique et x_0 un nombre réel. f est continue en x_0 si et seulement si $x_0 \in D_f$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Exemple :

$$f(x) = x^2 - 2x + 5. f \text{ est-elle continue en } x_0 = 2 ?$$

$$\text{Soit } g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ g(1) = 2 \end{cases} \quad \text{Etudier la continuité de } g \text{ en } x_0 = 1$$

2-1-2- Continuité à gauche - Continuité à droite

Activité :

$$\text{Soit } f(x) = x^2 + |x + 1|$$

a) Déterminer l'ensemble de définition de f puis écrire $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue

b) Calculer la continuité de f en $x_0 = -1$ sur chacune des intervalles lorsqu'elles existent

- $x \in]-\infty, -1]$ $f(x) = x^2 - x - 1$
- $x \in [-1, +\infty[$ $f(x) = x^2 + x + 1$

c) Comparer les deux limites puis conclure.

Synthèse :

f est continue à gauche en x_0 si et seulement si $\begin{cases} f(x_0) \text{ existe} \\ \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) \end{cases}$

f est continue à droite en x_0 si et seulement si $\begin{cases} f(x_0) \text{ existe} \\ \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0) \end{cases}$

NB: f est continue en x_0 si elle est continue à gauche et à droite en x_0 .

Dans le cas contraire on dit qu'elle est discontinue en ce point.

Application: Etudier la continuité de $f(x) = \frac{-x^2+2x+3}{x+1}$ en -1 .

2-1-3- Définition de la continuité sur un intervalle

- ✓ f est continue sur l'intervalle $]a, b[$ si elle est continue en tout de l'intervalle
- ✓ f est continue sur l'intervalle $[a, b]$ si elle est :
 - Continue sur $]a, b[$
 - Continue à droite en $x = a$
 - Continue à gauche en $x = b$.

2-1-4- Théorèmes sur les fonctions continues :

- ✓ Soit f et g deux fonctions continues en x_0 et α un réel : $f + g; f \times g; \alpha f; \frac{f}{g} (g \neq 0)$ sont continues en x_0 .
- ✓ Toute **fonction polynôme** est continue sur $\mathbb{R}$.
- ✓ Toute **fonction rationnelle** est continue sur son domaine de définition
- ✓ Les fonctions **sinus** et **cosinus** sont continues sur $\mathbb{R}$.
- ✓ Soit f une fonction continue en x_0 et g une fonction continue en $f(x_0)$ alors **gof** est continue en x_0 .
- ✓ L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

Théorème de la bijection : Toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I est bijective sur I .

2-1-5- Définition de la notion de prolongement par continuité :

Activité : Soit $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

a- Déterminer l'ensemble de définition de f .

b- f est - elle continue en x_0 ?

c- Soit g une fonction définie par $\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ si } x \in D_f \\ g(1) = 2 \end{cases}$. g est - elle continue en 1 ?

Synthèse : Soit f une fonction ; x_0 et l deux réels tels que :

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$. On appelle prolongement de f par continuité en x_0 la fonction g

définie par : $\begin{cases} g(x) = f(x) \text{ si } x \in D_f \\ g(x_0) = l \end{cases}$

Exemple1 : Soit la fonction f définie par $(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$. f est - elle prolongeable par continuité en $x_0 = 1$

Exemple 2 : Soit la fonction $h: x \mapsto \frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1}$

a) Calculer la limite en 1 de la fonction h .

b) En déduire k prolongement par continuité de h en 1.

2-2- Définition de la dérivabilité d'une fonction

2-2-1- Définition de la dérivabilité en un point

Soit f une fonction numérique, D_f son domaine de définition et $x_0 \in D_f$. f est dérivable en

x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est finie.

On note si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ ou $f'(x_0)$ est appelé nombre dérivé de f en x_0

Exemple : soit $g(x) = x^2 + 2x + 5$. La fonction g est - elle dérivable en $x_0 = 1$?

NB : Si f est dérivable en u point x_0 alors elle admet en ce point une tangente au point $A(x_0; f(x_0))$. L'équation de la tangente est donnée par la formule

(T) : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. $f'(x_0)$ est appelé coefficient directeur de la tangente

2-2-2- Dérivabilité à gauche - Dérivabilité à droite :

Activité : Soit $g(x) = x^2 + |2x + 3|$.

a) Etudier le signe de la valeur absolue. Ecrire $g(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.

b) Etudier la dérivabilité de g sur $]-\infty; -\frac{3}{2}[$ en $x_0 = -\frac{3}{2}$.

c) Etudier la dérivabilité de g sur $]-\frac{3}{2}; +\infty[$ en $x_0 = -\frac{3}{2}$.

d) Comparer les deux dérivées puis conclure.

Synthèse :

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]-\infty; x_0[\cup]x_0; +\infty[$

✓ f est dérivable à gauche en x_0 de $]-\infty; x_0[$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie. On note $f'_g(x_0)$.

✓ f est dérivable à droite en x_0 de $]x_0; +\infty[$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie. On note $f'_d(x_0)$.

NB : f est dérivable en x_0 si et seulement si $f'_d(x_0) = f'_g(x_0) = f'(x_0)$.

2-2-3- Définition de la dérivabilité sur un intervalle :

f est dérivable sur un intervalle k si elle est dérivable en tout point de cet intervalle.

✓ Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

✓ Toute fonction rationnelle est dérivable sur son domaine de définition

Théorème sur les fonctions dérivables

- Si f est dérivable à gauche en x_0 alors f admet en x_0 une demi - tangente à gauche.
- Si f est dérivable à droite en x_0 alors f admet en x_0 une demi - tangente à droite.

2-3- Utilisation des différentes formules de dérivation

2-3-1- Dérivée des fonctions usuelles :

Fonction f	k	$kx + b$	kx^n	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cotan x$
Dérivée f' de f	0	x	nkx^{n-1}	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
Ensemble de dérivabilité	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$]0; +\infty[$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$]-\frac{\pi}{2} + k; \frac{\pi}{2} + k[$ ($k \in \mathbb{Z}$)	$]k\pi; k\pi + \pi[$ ($k \in \mathbb{Z}$)

2-3-3- Formules sur les fonctions :

Soit U et V deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert k et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Fonctions $f: x \mapsto \dots$	$U + V$	αU	$U \times V$	$\frac{U}{V}$	$\frac{1}{V}$	$\sqrt{U}$	U^n	$\cos U$	$\sin U$
Dérivation des fonctions $f': x \mapsto \dots$	$U' + V'$	$\alpha U'$	$U'V + V'U$	$\frac{U'V - V'U}{V^2}$	$-\frac{V'}{V^2}$	$\frac{U'}{2\sqrt{U}}$	$nU'U^{n-1}$	$-U' \sin U$	$U' \cos U$

Application :

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$1) f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 5$$

$$2) f(x) = \frac{2x+1}{2-x}$$

$$3) f(x) = (x^2 + 4x - 3)^5$$

$$4) f(x) = (x^2 - x + 2)^5$$

$$5) f(x) = \sqrt{x^3 - x^2 + 2}$$

$$6) g(x) = \frac{2x^2 + 5x - 12}{3x - 1}$$

$$7) g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x + 2}$$

$$8) g(x) = \frac{1}{-3x^2 - 5x + 2}$$

$$9) g(x) = (2x - 1)^2 (x^2 + 1)^3$$

$$10) g(x) = 3x\sqrt{x+1}$$

$$11) h(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2}$$

$$12) h(x) = \frac{-4x}{x-8}$$

$$13) h(x) = \frac{x-5}{\sqrt{x^2+3}}$$

Dérivée de la composée et de la réciproque d'une fonction :

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I , g la fonction dérivable sur un intervalle contenant $f(I)$ alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'[f(x)]$$

- $[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$ est la dérivée de la fonction réciproque f^{-1} de f .

Exemple : Soit $h(x) = \sin(x^2 + 1)$. Calculer la dérivée $h'(x)$

Solution :

Soit $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \sin x$ donc on a $h(x) = g \circ f(x)$

$$h'(x) = (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'[f(x)]$$

$$f'(x) = 2x \text{ et } g'(x) = \cos x \text{ d'où } h'(x) = 2x \cos(x^2 + 1)$$

En particulier :

$$[\cos(ax + b)]' = -a \sin(ax + b)$$

$$[\sin(ax + b)]' = a \cos(ax + b)$$

$$[\tan(ax + b)]' = \frac{a}{\cos^2(ax + b)} = a[1 + \tan^2(ax + b)]$$

Application :

Calculer la dérivée des fonctions : $f(x) = \cos(3x + 2) + \sin(\pi x)$ et

$$g(x) = \frac{4}{5} \tan(3 - 5x)$$

2-4- Application de la dérivée

2-4-1- Sens de variation d'une fonction numérique :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- f est croissante sur I si et seulement si pour tout x élément de I , $f'(x) \geq 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si pour tout x élément de I , $f'(x) \leq 0$.
- f est constante sur I si et seulement si pour tout x élément de I , $f'(x) = 0$.

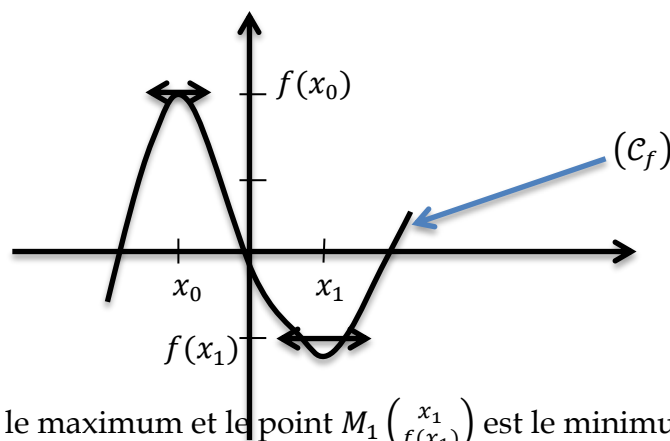
Remarque :

f est strictement croissante si et seulement si pour tout x élément de I , $f'(x) > 0$.

f est strictement décroissante si et seulement si pour tout x élément de I , $f'(x) < 0$.

2-4-2- Extrêmes locaux

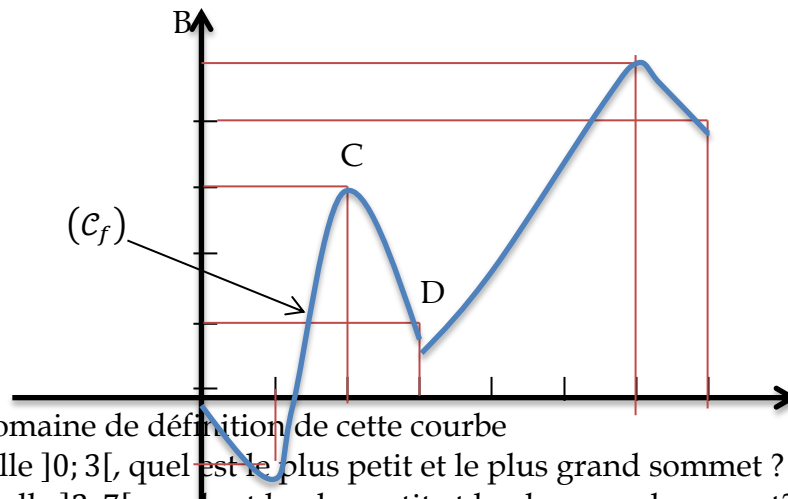
Une fonction numérique f admet en un point d'abscisse x_0 un extrémum relatif si et seulement si la dérivée s'annule en ce point en changeant de signe



Le point $M \left(x_0, f(x_0) \right)$ est le maximum et le point $M_1 \left(x_1, f(x_1) \right)$ est le minimum

Exemple d'application :

On considère la représentation suivante dans un repère



- i) Donner le domaine de définition de cette courbe
- ii) Sur l'intervalle $]0; 3[$, quel est le plus petit et le plus grand sommet ?
- iii) Sur l'intervalle $]2; 7[$, quel est le plus petit et le plus grand sommet ?

2-4-3- Tableau de variation d'une fonction

En générale les variations d'une fonction sont consignées dans un tableau de variation

- **Tableau de variation d'une fonction croissante**

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$		

- **Tableau de variation d'une fonction décroissante**

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$		

- **Tableau de variation d'une fonction constante**

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	0	
$f(x)$		

Exemple :

a) Soit $f(x) = x^2 - 2x + 5$

Etudier les variations de f puis dressé son tableau de variation

b) Soit $g(x) = \frac{2x+5}{1-x}$

Etudier les variations de g puis dresser son tableau de variation

Définition de la monotonie :

Une fonction f est dite monotone (respectivement strictement monotone) si elle est croissante ou décroissante (respectivement strictement croissante ou strictement décroissante)

Théorème de la bijection :

Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I donc elle réalise une bijection de I sur $f(I)$ par suite elle admet une fonction réciproque notée f^{-1} qui est aussi une bijection de $f(I)$ sur I .

Consequence :

Soit $I = [a; b]$ et f une fonction, si de plus $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[a; b]$.

Exercice :

Soit $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$

- 1) Dresser le tableau de variation de f .
- 2) Montrer que la restriction g de f à l'intervalle $] -\infty, -1[$ réalise une bijection de $] -\infty, -1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
- 3) Calculer $(g^{-1})'(3)$.

3- Représentation graphique d'une fonction numérique

3-1- Etude des branches infinies et éventuellement les asymptotes

3-1-1- Asymptote parallèle aux axes de coordonnées

• **Asymptote verticale :**

Soit f une fonction définie sur son ensemble de définition et a un réel n'appartenant pas à D_f .

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ alors on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe de f .

• **Asymptote horizontale :**

Soit f une fonction définie sur son ensemble de définition.

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$ alors on dit que la droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale à la courbe de f en $-\infty$ et $+\infty$.

3-1-2- Asymptote non parallèle aux axes de coordonnées

Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ alors on dit qu'il y a possibilité d'asymptote.

On calcule $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$

- ✓ Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe (ox) .
- ✓ Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ alors la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe (oy) .
- ✓ Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$, alors on calcule $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax)$

- Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$, alors la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = ax$.
- Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = b$, et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe

NB : Considérons la fonction f définie par : $f(x) = ax + b + h(x)$.

- ✓ Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = 0$ alors on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique.
- ✓ Si $h(x) < 0$ alors la courbe (C_f) est en dessous de l'asymptote oblique.
- ✓ Si $h(x) > 0$ alors la courbe (C_f) est au-dessus de l'asymptote oblique.

Exemple d'application :

a - Soit la fonction g définie par $g(x) = \frac{3x-5}{2-x}$, et (C_g) sa courbe représentative.

- Déterminer l'ensemble de définition de g .
- Calculer la limite de g en $+\infty$ et en $-\infty$. Conclure
- Calculer la limite de g en 2^- et 2^+ . Conclure.

b - Soit h la fonction définie par $h(x) = \frac{x^2-3x-7}{x+1}$, (C_h) sa courbe représentative.

- Déterminer le domaine de définition de h .
- Déterminer la limite de h aux bornes de D_h .
- Préciser éventuellement les asymptotes à la courbe de (C_h) .

3-2- Etude de la parité, la périodicité et éventuellement les éléments de symétrie

3-2-1- Parité

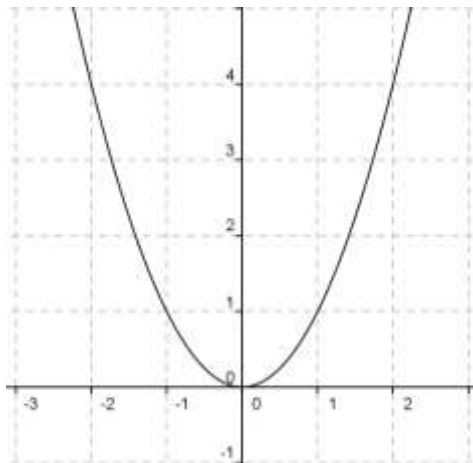
Soit f une fonction numérique et D_f son domaine de définition

- ✓ f est paire si et seulement si $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ alors on a $f(-x) = f(x)$

La courbe représentative d'une fonction paire admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie

Exemple : soit le fonction $f(x) = x^2$

$D_f = \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}; f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ donc f est paire

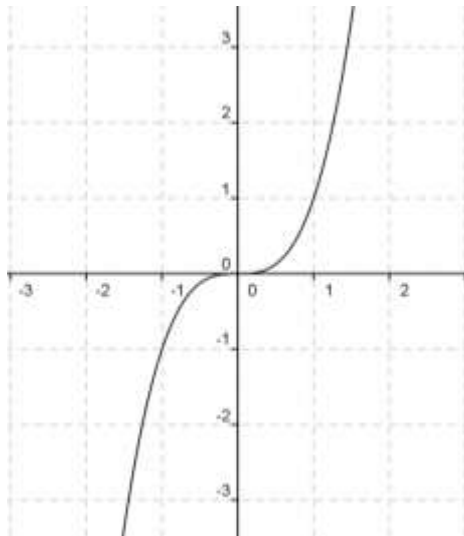


- ✓ f est impaire si et seulement si $\forall x \in D_f, -x \in D_f$ alors on a $f(-x) = -f(x)$

La courbe représentative d'une fonction impaire admet l'origine du repère comme centre de symétrie

Exemple : soit $f(x) = x^3$

$\forall x \in D_f, -x \in D_f$ alors on a $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ donc f est impaire.



3-2-2- Périodicité

Une fonction numérique f est périodique si $f(x + t) = f(x)$, le plus petit réel t vérifiant cette relation est appelé la période.

Les fonctions sinus et cosinus sont périodique de période 2π

$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$

La fonction tangente est périodique de période π .

$\forall x \in \frac{\pi}{2} + k\pi; \tan(x + \pi) = \tan x$

NB :

Pour trouver la période des fonctions $\cos(ax + b)$ et $\sin(ax + b)$ on pose $t = \frac{2\pi}{|a|}$

Pour trouver la période de la fonction tangente $\tan(ax + b)$ on pose $t = \frac{\pi}{|a|}$

3-2-3- Éléments de symétries

Soit f la fonction définie sur son ensemble de définition et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative

- ✓ La droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$ si et seulement si $\forall x \in D_f, (2a - x) \in D_f$ et $f(2a - x) = f(x)$.
- ✓ Le point M de coordonnée $M\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ est un centre de symétrie pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$ si et seulement si $\forall x \in D_f, 2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$

NB : Pour une fonction homographique de la forme $\frac{ax+b}{cx+d}$, le point $I(-d; a)$ est centre de symétrie

Exemple :

- a) Soit la fonction $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Montrer que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie pour $(\mathcal{C}_f)$.
- b) Soit $f(x) = \frac{2x+5}{x+1}$. Montrer que le point $I\left(-\frac{1}{2}\right)$ est un centre de symétrie pour la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

3-3- Recherche des points particuliers (Intersection avec les axes de coordonnées ; points d'inflexions)

3-3-1- Point anguleux

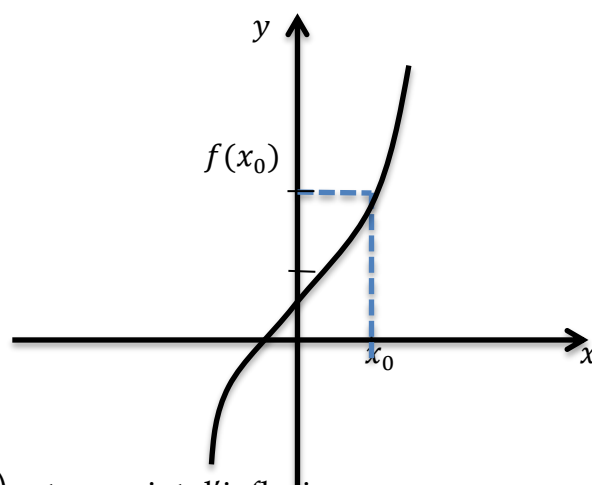
Soit f une fonction dérivable à gauche en x_0 ($f'_g(x_0)$ existe) et, dérivable à droite en x_0 ($f'_d(x_0)$ existe).

Si $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$ alors on dit que le point $M \left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{smallmatrix} \right)$ est un point anguleux à la courbe.

La courbe admet en ce point deux demi - tangentes : une demi - tangente à droite de coefficient directeur $f'_d(x_0)$ et une demi - tangente à gauche de coefficient de directeur $f'_g(x_0)$

3-3-2- Point d'inflexion

Une fonction numérique f admet un point d'inflexion en un point d'abscisse x_0 si sa dérivée seconde s'annule en ce point en changeant de signe.



Le point $M_0 \left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{smallmatrix} \right)$ est un point d'inflexion.

Exemple : soit la fonction $f(x) = x^3 + 1$

$$f'(x) = 3x^2 \text{ et } f''(x) = 6x$$

Donc on a le tableau suivant

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow 1 \searrow$		

En conclusion on peut dire que le point $M \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$ est un point d'inflexion pour la fonction f .

3-3-3- Intersection de la courbe avec les axes de coordonnées

✓ Pour trouver l'intersection de la courbe d'une fonction f avec l'axe des abscisses (ox), on résout l'équation $f(x) = 0$. Notation : $(\mathcal{C}_f) \cap (ox) \Leftrightarrow f(x) = 0$.

✓ Pour trouver l'intersection de la courbe d'une fonction f avec l'axe des ordonnées (oy), on calcule l'image de zéro. Notation : $(\mathcal{C}_f) \cap (oy) \Leftrightarrow f(0) = ?$

Application :

On considère la fonction h définie par $h: x \mapsto \frac{x^2-2x+5}{1+x}$.

- 1°/ Déterminer l'ensemble de définition de la fonction h .
- 2°/ Calculer la limite aux bornes de l'ensemble de définition. En déduire que h admet une asymptote verticale.
- 3°/ Déterminer la fonction dérivée $h'(x)$ de $h(x)$. En déduire le sens de variation.
- 4°/ Dresser le tableau de variation de la fonction h .
- 5°/ A l'aide de la division euclidienne, écrire $h(x)$ sous la forme $h(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$ ou a, b et c sont des réels constants à déterminer.
- 6°/ Préciser l'équation de l'asymptote oblique.
- 7°/ Etudier la position de la courbe par rapport à l'asymptote oblique.
- 8°/ Déterminer les points d'intersections de la courbe (C_h) avec les axes de coordonnées.
- 9°/ Montrer que le point $k\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un centre de symétrie pour la courbe (C_h) .
- 10°/ Tracer dans un repère orthonormé (o, i, j) la courbe de la fonction h (C_h) .

Plan d'étude d'une fonction

En générale, étudier une fonction consiste à :

- ✓ Déterminer le domaine de définition lorsqu'il n'est pas donné par l'énoncé.
- ✓ Etudier la continuité
- ✓ Vérifier éventuellement si la fonction est paire ou impaire, ou périodique surtout lorsque la réponse à cette question paraît être positive et facile à obtenir ; dans ce cas :
 - Réduire l'intervalle d'étude,
 - Préciser les éléments de symétrie de la courbe.
- ✓ Etudier les limites aux bornes de l'ensemble de définition
- ✓ Calculer la dérivée ; étudier le signe de la dérivée et indiquer les asymptotes possibles.
- ✓ Dresser le tableau de variation
- ✓ Déterminer les points d'intersections de la courbe avec les axes de coordonnées.
- ✓ Déterminer les points remarquables à l'étude de la fonction.
- ✓ Tracer la courbe représentative.

Application

- 1- Etudier et représenter la fonction suivante : $f(x) = x^3 + 3x + 2$.
- 2- Soit la fonction g définie par : $g(x) = \frac{ax^2+bx+c}{x-1}$. Déterminer les réels a, b et c tels que la courbe passe par les points $K\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $L\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et admet au point L une tangente de coefficient directeur -3 .
- 3- On considère la fonction H définie par $H(x) = \frac{x^2-3x+6}{x-1}$ et (C_H) sa courbe .
 - a- Etudier les variations de la fonction H .
 - b- Déterminer trois réels a, b et c tels que $H(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$. En déduire l'asymptote oblique (Δ) à la courbe de H .
 - c- Montrer que le point d'intersection des asymptotes est centre de symétrie à la courbe (C_H) .
 - d- Donner une équation de la tangente au point d'abscisse 2.
 - e- Tracer dans le repère orthonormé la courbe (C_H) .

f- Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solution de l'équation $x^2 - (3 + m)x + m + 6 = 0$.

4- On donne le tableau de variation d'une fonction f ci - dessous.

a-Déterminer le domaine de définition de f .

b- Donner les équations des asymptotes.

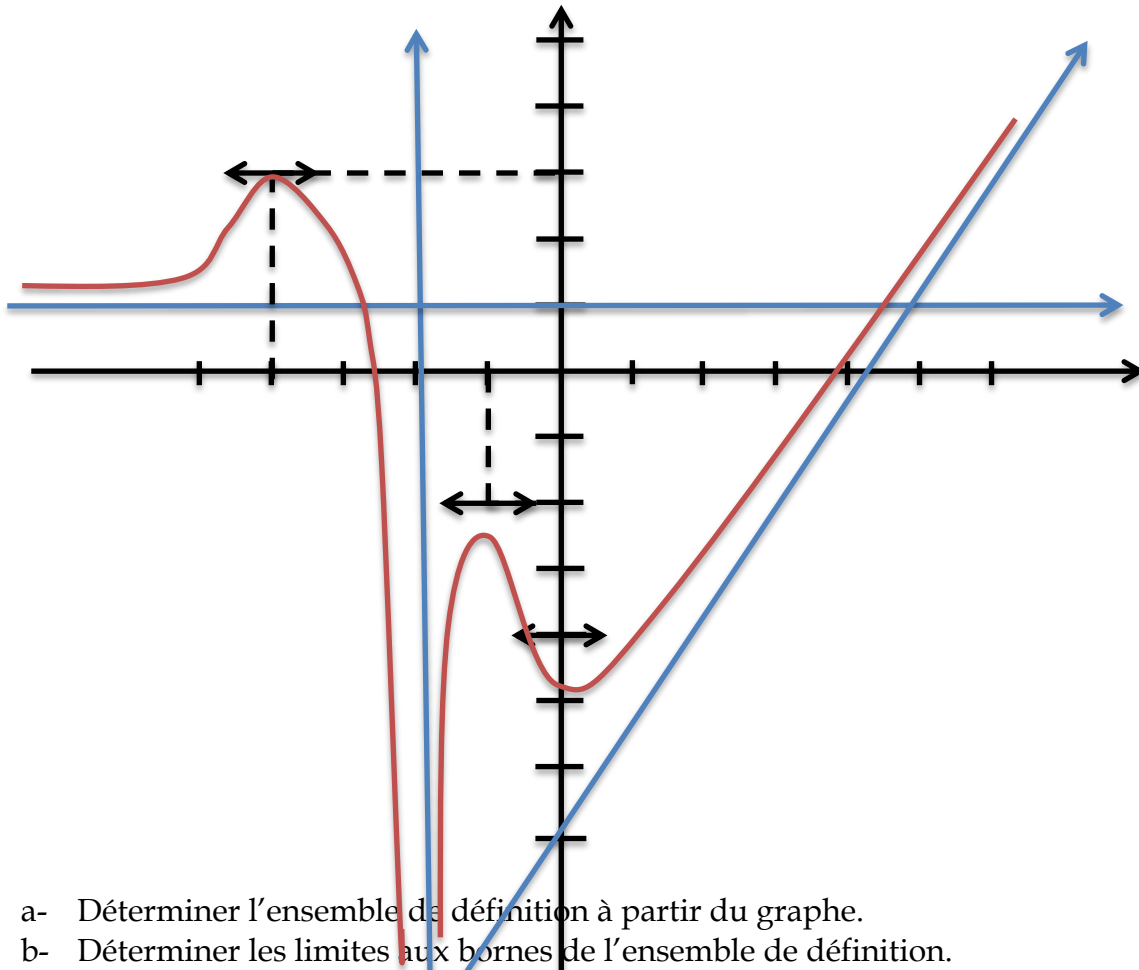
c-Sachant que $f(-2) = f(2) = 0$, donner suivant les valeurs de x le signe de $f(x)$.

d- On donne $f(-3) = -\frac{9}{32}$; $f(-3) = \frac{5}{8}$. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse -3 .

e-Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé.

x	$-\infty$	1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	-	+	+
$f(x)$	1 $\searrow$ $-\infty$	$+\infty$ $\searrow$ 4	$+\infty$ $\nearrow$ $+\infty$	$-\infty$ $\nearrow$ 1	

5- On donne la représentation graphique de g et ses asymptotes dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.



a- Déterminer l'ensemble de définition à partir du graphe.

b- Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

c- Préciser si possible les équations des asymptotes.

d- Dresser le tableau de variation à partir du graphe.

6- Soit la fonction f définie par $f: x \mapsto \frac{x-1}{2x+1}$

a- Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition.

b- Préciser les variations de la fonction f .

c- En déduire les asymptotes possibles.

d- Montrer que le point $I\left(\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)$ est un centre de symétrie à la courbe de f .

e- Tracer la courbe $\mathcal{C}$ de f .

4- Primitive d'une fonction

4-1- Définition d'une primitive

4-1-1- Définition de la notion de primitive

Activité : Soit f et F une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 4$ et

$F(x) = x^2 + 4x + 5$. Trouver la dérivée $F'(x)$ de $F(x)$. Comparer $F'(x)$ et $f(x)$.

Synthèse : Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I . On appelle fonction primitive F de f sur I , lorsque $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$.

Application : Est-ce que F est une primitive de f dans les cas suivants :

1- $F(x) = 3x^2 + 2x + 2014$ et $f(x) = 6x + 2$

2- $F(x) = \frac{x^2}{2} + \sqrt{3}$ et $f(x) = x$

3- $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 6x^2 + 7x + 1$ et $f(x) = x^2 - 12x + 7$.

NB : Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

4-1-2- Primitive des fonctions usuelles

Voici un tableau récapitulatif

Fonctions f	Primitive F
a (constante)	$ax + k$ (k constante réelle)
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + k$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + k$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$

Exemple d'application : Déterminer une primitive des fonctions suivantes

a- $f(x) = x^2 + 2x + 6$

b- $f(x) = 2x^3 - \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x} + 2\sqrt{3}$

c- $f(x) = 6x^5 + \frac{3}{2}x^2 - 4x$

4-1-3- Primitive d'une fonction prenant la valeur y_0 en un point x_0

Si f admet des primitives sur I , il existe une et une seule primitive prenant au point x_0 donnée une valeur y_0 donnée. On note $F(x_0) = y_0$

Exemple1 : Soit la fonction $f(x) = \sin x$. Trouver la primitive de f qui s'annule pour $x = \frac{\pi}{2}$. Et de celle qui prend la valeur 2 au point $\frac{3\pi}{2}$.

Exemple2 : Soit $f(x) = x^2 + 2x + 2015$. Trouver la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur -5 au point d'abscisse -1 .

4-2- Détermination des Primitives d'une fonction

Activité : Soit f et F une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 4x - 5$ et $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x - 2013$. Trouver la dérivée $F'(x)$ de $F(x)$. Soit G une autre fonction définie par : $G(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x + 13$. Trouver la dérivée $G'(x)$ de $G(x)$. Calculer la différence entre $F(x)$ et de $G(x)$. Que constatez-vous ?

Théorème : Soit F une primitive d'une fonction f ; soit G une autre primitive de la même fonction f définie sur un intervalle I . Alors il existe un réel k tel que

$$G(x) = F(x) + k$$

✓ Si f est continue sur I , alors sa primitive F est aussi continue sur I .

✓ La fonction f admet une infinité de primitive. On note la primitive $F(x) + k$ avec k un réel.

4-3- Utilisation des primitives d'une fonction

Voici des fonctions primitives consignés dans un tableau

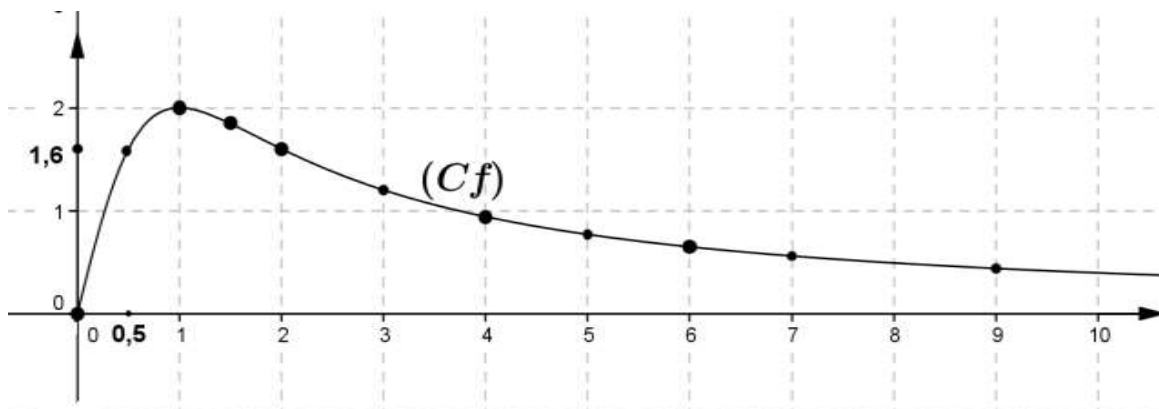
Fonction f	Primitive F
$u'u^n$	$\frac{u^n}{n+1} + k$
$\frac{u'}{u^n}$	$\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}} + k$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + k$
$\sin(ax + b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax + b) + k$
$\cos(ax + b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax + b) + k$
$(ax + b)^n$	$\frac{1}{a} \times \frac{1}{n+1} (ax + b)^{n+1} + k$

Exemple : Déterminer une primitive des fonctions suivantes

- 1) $f(x) = \cos(5x + 2)$
- 2) $f(x) = \sin(\pi x + \frac{\pi}{6})$
- 3) $f(x) = (x + 1)(x^2 + 2x + 3)^4$
- 4) $f(x) = \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^3}$
- 5) $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^3}$
- 6) $f(x) = \frac{x^4-3x^2-2}{x^2}$
- 7) $f(x) = \frac{1}{x^3} - x^6 + \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{3}$
- 8) $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
- 9) $g(x) = (-2x + 5)^4$
- 10) $g(x) = 2x(x^2 + 4)^2$

APPLICATIONS

On considère la représentation d'une fonction f



- 1°) Précisez l'ensemble de définition Df de la fonction f .
- 2°)