

Dénombrement – Probabilité

1- Dénombrement

1-1- Opération sur les ensembles

Activité :

Soit les ensembles E , F et G définis par :

$$E = \{1; 2; 3; a, b, c, 8, d, f, e, 5; 6; 7\}; F = \{e; 3; 5; a, b\}; G = \{1; a, d, 5, c\}$$

- Que peut – on dire de F par rapport à E ?
- Existe – t – il des éléments de F qui ne sont pas dans E ?
- Quels sont les éléments de E appartenant à la fois à F et à G ?
- Quels sont les éléments de E appartenant à F ou à G ?
- Quels sont les éléments de F qui n'appartiennent pas à G ?

Synthèse :

- On dit que F est dans E ou que F est un sous-ensemble de E ou que F est une partie de E où que F est inclus dans E . On note $F \subset E$.
Un ensemble qui n'a pas d'éléments est appelé ensemble vide. On note $\emptyset$.
Soit F et G deux ensembles non vide : $F = G \iff \begin{cases} G \subset F \\ F \subset G \end{cases}$
- L'ensemble des éléments appartenant à F et à G est noté $F \cap G$. On lit « F inter G »
- L'ensemble des éléments appartenant à F ou à G est noté $F \cup G$. On lit « F union G »
- Si F et G n'ont aucun élément en commun alors on dit qu'ils sont disjoints. On note $F \cap G = \emptyset$.
- L'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans F est appelé complémentaire de F dans E . On note C_E^F ou $\overline{F}$.
- Soit F et G deux sous – ensembles de E . On a :
 - $F \cup \overline{F} = E$
 - $\overline{F \cap G} = \overline{F} \cup \overline{G}$
 - $\overline{F \cup G} = \overline{F} \cap \overline{G}$
- L'ensemble des éléments de F qui ne sont pas dans G est appelé différence de F et de G . On note $F - G$.

1-2- Cardinal d'un ensemble fini

1-2-1- Notion de cardinal

- Soit E un ensemble non vide. Le nombre d'élément qui compose E est appelé cardinal de E . on note « $cardE$ ».
- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1 et E un ensemble non vide.
 - Si E à n éléments alors on dit qu'il est fini et que son cardinal est n . On écrit $cardE = n$
 - Si $E = \emptyset$ alors son cardinal est nul. On écrit $card \emptyset = 0$
- Certains ensembles ne sont pas finis tels que $\mathbb{N}$; $\mathbb{R}$; $[0; 1]$

Exemple : détermine le cardinal des ensembles E ; F et G cité ci-dessus.

1-2-2- Cardinal d'une réunion d'ensembles finis

Activité :

Dans une classe de terminale, tous les élèves étudient au moins l'anglais ou l'allemand.
Trente élèves étudient l'anglais ; vingt l'allemand et quinze l'anglais à la fois l'allemand.

- Reproduis un schéma de répartition
- Quel est le nombre d'élèves de la classe ?

Synthèse :

Soit E un ensemble fini, F et G deux sous – ensembles de E .

- Si $E \cap G \neq \emptyset$ alors $\text{card}(F \cup G) = \text{card}E + \text{card}G - \text{card}(E \cap G)$
- Si $E \cap G = \emptyset$ alors $\text{card}(F \cup G) = \text{card}E + \text{card}G$
- $\text{card}(\overline{F}) = \text{card}E - \text{card}F$

1-2-3- Produit cartésien d'ensembles et P-listes

Définition1 : Soit E et F deux ensembles finis non vides. Alors $E \times F$ est fini et on a :

$$\text{card}(E \times F) = \text{card}E \times \text{card}F. \text{ Si } E = F \text{ alors } \text{card}(E \times E) = \text{card}E^2 = (\text{card}E)^2$$

Définition2 : Le produit cartésien de $E_1 \times E_2 \times E_3 \times \dots \times E_p$ de P ensembles non vides où P est un entier supérieur ou égal à 2 est l'ensemble des P -listes $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ tels que $x_1 \in E_1, \dots, x_p \in E_p$. Chaque P -uplet est ainsi appelé P -liste

$$\text{card}(E_1 \times E_2 \times E_3 \times \dots \times E_p) = \text{card}E_1 \times \text{card}E_2 \times \dots \times \text{card}E_p$$

Si $E_1 = E_2 = \dots = E_p$ le produit cartésien est noté E^p donc on écrit $\text{card}(E^p) = (\text{card}E)^p$

Application

- On lance trois fois de suite un dé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note à chaque lancer la face qui apparaît. Quel est le nombre de résultat possible ?
- Une épreuve d'examen est constituée d'une série de dix questions auxquelles le candidat doit répondre par vrai ou faux. Combien de façon de répondre au hasard aux questionnaires y – a – t – il ?
- Soit F et G deux ensembles tels que $F = \{a; b\}$ et $G = \{1; 2; 3\}$. Détermine tous les couples (x, y) tels que $x \in F$ et $y \in G$.

NB :

Soit E et F deux ensembles non vides. On appelle produit cartésien E par F noté $E \times F$, l'ensemble des couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$.

Le nombre d'application de E_p dans E_n est n^p .

1-3- Arrangement

Activité :

Deux voitures arrivent dans un parking où il y'a quatre places numérotées disponibles et se garent au hasard. Quel est le nombre de dispositions possibles ?

Il y'a 4 choix possible pour la voiture N°1

Il y'a 3 choix possible pour la voiture N°2

Le nombre de disposition possible est 4×3

Synthèse :

Soit E un ensemble à n éléments et p un nombre entier naturel non nul tel que $p \leq n$. On appelle arrangement de p éléments de E , tout p -uplet d'éléments de E deux à deux distincts.

Le nombre d'arrangement de p éléments d'un ensemble à n éléments noté A_n^p est tel que $A_n^p = n(n-1)(n-2) \times \dots \times (n-p+1)$

Si n et p sont deux entiers non nuls tels que $p \leq n$ alors on peut écrire $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

Si $n = p$ alors on parle de permutation $A_n^p = A_n^n = n! = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$

$0! = 1$; $1! = 1$; $2! = 2$; $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

Application

- a) Calcul A_8^5 ; A_3^2
- b) Quel est le nombre de façons différents de placer 6 personnes sur 10 chaises numérotées de 1 à 10 sachant que deux personnes ne peuvent occuper la même chaise.
- c) De combien de façon peut – on placer six convives autour d'une table dont les chaises sont numérotées de 1 à 6.

1-4- Combinaison

Activité : Soit $v = \{a, b, c, d, e\}$. Combien de code à 4 lettres peut – on former à partir des éléments de v ?

Synthèse :

Soit E un ensemble à n éléments et p un nombre entier naturel $p \leq n$, on appelle combinaison de p élément de E tout sous-ensemble de E ayant p éléments. On le note $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Application

- 1) Calcul C_5^3 ; $C_3^2 \times C_2^1 \times C_4^4$
- 2) n et p étant des nombres entiers naturels tels que $p \leq n$, démontre que :
 $C_n^n = 1$; $C_n^1 = n$; $C_n^{n-p} = C_n^p$
- 3) Résous dans $\mathbb{N}$:
 - a) $C_n^3 - C_n^2 = \frac{n^3 - 6n^2 + 30}{6}$
 - b)

1-5- Triangle de Pascal

Pour tous nombres entiers n et p tels que $2 \leq n$ et $1 \leq p \leq n-1$. On a la formule suivante :

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$$

1-5-1- Construction du triangle de Pascal

Elle permet de calculer les nombres C_n^p de proche en proche, suivant un tableau appelé triangle de Pascal.

Dans la colonne $p=0$, il n'y a que 1, car $C_n^0=1$

Sur la diagonale $p=n$, il n'y a également que des 1 car $C_n^n=1$.

$p \backslash n$	0	1	2	3	4
0	C_0^0				
1	C_1^0	C_1^1			
2	C_2^0	C_2^1	C_2^2		
3	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3	
4	C_4^0	C_4^1	C_4^2	C_4^3	C_4^4

1-5-2- Formule du binôme de Newton

Pour tous nombres réels a et b et pour tout nombre entier ($n \geq 1$). On a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + C_n^n b^n$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

1-6- Différents types de tirage

On distingue trois types de tirages :

Type de tirage	Ordre	Répétition	Dénombrement
Successif avec remise	On tient compte de l'ordre	Un élément peut être tiré plusieurs fois	n^p p-listes
Successif sans remise		Un élément n'est tiré qu'une seule fois	A_n^p arrangement
Simultané	On ne tient pas compte de l'ordre		C_n^p combinaison

Application

I- Une urne contient 4 boules noires, 3 boules blanches et 2 boules rouges, indiscernable au toucher.

- 1) On tire successivement avec remise 3 boules de cette urne. Quel est le nombre de tirages possibles ?
- 2) On tire successivement sans remise 3 boules de l'urne, quel est le nombre de tirages possibles ?
- 3) On tire simultanément 3 boules de l'urne
 - a) Quel est le nombre de tirages possibles ?

b) Calcule le nombre de tirages contenant :

b1) 3boules noires ?

b2) 1boule blanche et 2boules blanches ?

b3) Au moins 1boule blanche ?

b3) Au plus 1boule rouge ?

b4) Des boules de couleurs différentes ?

b5) Exactement 2boules noires ?

II-

2- Probabilité

2-1- Vocabulaire

2-1-1- Expérience aléatoire

Une expérience aléatoire est une expérience dont on connaît parfaitement les conditions de déroulement et pour laquelle on ne peut prévoir l'issue.

Exemple :

- Jeter un dé à 6 faces
- Lancer une pièce de monnaie
- Tirer une carte dans un jeu de 32cartes

2-1-2- Univers ou inventaire

L'inventaire ou univers des possibles est l'ensemble des résultats possibles pour une expérience aléatoire. On note Ω

Exemple :

- Jeter de dé à 6 faces : $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
- Lancer une pièce de monnaie : $\Omega = \{pile, face\}$
- Tirer une carte dans un jeu de 32cartes : $\Omega = \{32\ cartes\}$

2-1-3- Evènement

Un évènement A est une partie (sous-ensemble) de l'univers Ω

Exemple :

Considérons l'expérience aléatoire lancer de dé donc on a :

$A = \{6\}$ est un évènement car $A \subset \Omega$

B « obtenir un nombre pair » est un évènement car $B = \{2; 4; 6\} \subset \Omega$

Remarque :

- Un évènement est réalisé si le résultat de l'expérience aléatoire appartient à cet évènement.
- $\emptyset$ est un évènement particulier ; il n'est jamais réalisé ; c'est l'évènement impossible.

- Ω est aussi un évènement ; il est toujours réalisé ; c'est l'évènement certain élémentaire.
- Deux évènements sont disjoints si leur intersection est vide. On dit qu'ils sont incompatibles.
- L'évènement contraire de l'évènement A est son complémentaire dans Ω . On note $\bar{A}$.
- Soit A et B deux évènements, $A \cup B$ et $A \cap B$ sont des évènements
 - $A \cup B$ est réalisé si l'un au moins des deux évènements est réalisé.
 - $A \cap B$ est réalisé si les deux évènements sont réalisés simultanément.

2-2- Probabilité

2-2-1- Définition

Soit E une expérience aléatoire et Ω l'univers. A chaque évènement A , on fait correspondre un nombre réel appelé probabilité de A , on note $P(A)$ et vérifiant :

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- Si $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Si $A \cap B \neq \emptyset$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

2-2-2- Equiprobabilité

On dit qu'il y'a équiprobabilité si et seulement si tous les évènements élémentaires ont la même probabilité

Théorème :

S'il y'a équiprobabilité et si Ω est fini ; pour tout évènement A , on a :

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Exemple

On lance une pièce de monnaie. La probabilité d'apparition de pile ou face est un évènement d'équiprobabilité donc $P = \frac{1}{2}$

Le lancer d'un dé non pipé est aussi un évènement d'équiprobabilité donc $P = \frac{1}{6}$.

Exercice :

Une urne contient 7 boules indiscernable au touché dont 3 boules blanches et 4 noires. On tire simultanément 3 boules de cette urne. Quelle est la probabilité d'avoir :

- Exactement 2 boules blanches ?
- Au plus une boule blanche ?
- Deux boules de mêmes couleurs ?
- Des boules de mêmes couleurs ?

Réponse:

Soit Ω l'ensemble des combinaisons de 3 boules prises parmi 7. Donc $\Omega = C_7^3$ et $\text{card } \Omega = 35$

a) Soit A « Exactement 2 boules blanches »

$$\text{card } A = C_3^2 \times C_4^1; P(A) = \frac{C_3^2 \times C_4^1}{C_7^3}$$

b) Soit B « au plus une boule blanche » $P(B) = \frac{C_3^1 \times C_4^2 + C_3^0 \times C_4^3}{C_7^3}$

c) Soit C « deux boules de mêmes couleurs » $P(C) = \frac{C_3^1 \times C_4^2 + C_3^1 \times C_4^2}{C_7^3}$

d) Soit D « exactement 2 boules blanches » $P(D) = \frac{C_3^3 + C_4^3}{C_7^3}$

2-3- Variable aléatoire

Activité : Approche de la notion

Une urne contient 3 boules rouges et 4 boules blanches indiscernables au touché. On extrait simultanément 2 boules. On perçoit 1 franc par boule rouge tirée. Quels sont les gains possibles ? Avec quelles probabilités ?

Solution : Désignons par $R_1, R_2, R_3, B_1, B_2, B_3, B_4$ les 7 boules de l'urne.

Soit Ω l'ensemble des combinaisons des 2 boules prises parmi les 7 donc $\text{card } \Omega = C_7^2$

On peut tirer 0 ; 1 ou 2 boules rouges et donc gagner 0 ; 1 ou 2 francs

Désignons par x la somme reçue

Les trois événements sont $(x=0)$; $(x=1)$; $(x=2)$ sont incompatibles deux – à – deux et leur réunion est Ω .

$$P(x=0) = \frac{C_3^0 \times C_4^2}{C_7^2}; P(x=1) = \frac{C_3^1 \times C_4^1}{C_7^2}; P(x=2) = \frac{C_3^2 \times C_4^0}{C_7^2}$$

Les variables $x=0$; $x=1$ ou $x=2$ sont appelés variable aléatoire

Synthèse :

Soit Ω un univers muni d'une probabilité P . Une variable aléatoire x définie sur Ω est une fonction qui à chaque élément de Ω fait correspondre un nombre réel.

Désignons par I l'ensemble des valeurs possibles de x $I = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$

La loi de probabilité de x est la fonction qui à tout élément x de I fait correspondre la probabilité que x prend cette valeur n . On note $P(x=n)$.

Il est commode de présenter cette loi de probabilité sous forme d'un tableau

x	x_1	x_2	...	x_n
$P(x=n)$	P_1	P_2	...	P_n

D'après l'exemple précédent

$P(x=0)=\frac{2}{7}$, $P(x=1)=\frac{4}{7}$, $P(x=2)=\frac{1}{7}$. La loi de probabilité est :

x	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

Représentation graphique

- Diagramme en bâton
- Histogramme

Remarque

Notons que l'évènement « $x=0$ ou $x=1$ ou $x=2$ » représente tous les cas possibles. Sa probabilité est donc égale à 1.

2-4- Fonction de répartition

Soit une variable aléatoire X définie sur un univers Ω muni d'une probabilité. La fonction de répartition F de X est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $[0; 1]$ qui à tout réel x associe la probabilité que X soit inférieur ou égale à x . On note $F(X \leq x)$

D'après l'exemple précédent

x	0	1	2
$P(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

Intervalle de valeurs de x	Valeur de x vérifiant $X \leq x$	$P(X \leq x)$ vaut
$]-\infty, 0[$	Aucun	0
$[0; 1[$	0	$P(x=0)=\frac{2}{7}$
$[1; 2[$	0 et 1	$P(x=0)+P(x=1)=\frac{2}{7}+\frac{4}{7}=\frac{6}{7}$
$[2; +\infty[$	0 ; 1 et 2	$P(x=0)+P(x=1)+P(x=2)=\frac{2}{7}+\frac{4}{7}+\frac{1}{7}=1$

Représentation graphique

2-5- Espérance mathématique

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ avec les probabilités $P_1, P_2, \dots, P_n$. On appelle espérance mathématique de X , le nombre noté $E(X)$ défini par :

$$E(X) = x_1 P(X=x_1) + x_2 P(X=x_2) + \dots + x_n P(X=x_n) = \sum_{i=1}^n x_i P_i$$

D'après l'exemple précédent

$$E(X) = 0 \times \frac{2}{7} + 1 \times \frac{4}{7} + 2 \times \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$$

2-6- Variance et Ecart type

La variance d'une variable aléatoire X est définie par $V(X) = E[(X - E(X))^2] = \sum_{i=1}^n P_i (x_i - m)^2$ où m est l'espérance mathématique de X .

L'écart type d'une variable aléatoire X est définie par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

D'après l'exemple précédent

$$V(X) = \frac{2}{7} \left(0 - \frac{6}{7}\right)^2 + \frac{4}{7} \left(1 - \frac{6}{7}\right)^2 + \frac{1}{7} \left(2 - \frac{6}{7}\right)^2 = 0,408 \text{ alors } \sigma(X) = \sqrt{0,408} = 0,639$$

Autre expression de la variance : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

Exemple :

Calculer la variance et l'écart type de la variable aléatoire y définie par

y	-1	0	1	2	3
$P(Y=y)$	$\frac{6}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{5}{14}$

$$\text{Calculons } E(y) = -\frac{6}{14} + \frac{1}{14} + \frac{2}{14} + \frac{15}{14} = \frac{6}{7} ; E(y^2) = \frac{6}{14} + \frac{1}{14} + \frac{4}{14} + \frac{45}{14} = \frac{56}{14} = \frac{28}{7}$$

$$\text{La variance } V(y) = E(y^2) - [E(y)]^2 = \frac{28}{7} - \left(\frac{6}{7}\right)^2 =$$

$$\text{L'écart type : } \sigma(X) = \sqrt{\frac{28}{7} - \left(\frac{6}{7}\right)^2} =$$

2-7- Probabilité conditionnelle

2-7-1- Définition

Soit A et B deux événements associés à une expérience aléatoire avec la probabilité de B qui est nulle