

ETUDE DES SUITES NUMERIQUES

I- INITIATION AU PRINCIPE DU RAISONNEMENT PAR RECURRENCE

1) Enoncer du principe de récurrence

Pour démontrer par récurrence qu'une propriété (P_n) est vraie pour tout naturel n , on procède en deux étapes :

- ✓ Vérifier que $P(n_0)$ est vraie
- ✓ On suppose que la propriété est vraie jusqu'au rang n
- ✓ On démontre que la propriété est vraie au rang $(n+1)$ et on conclue que pour tout entier naturel la propriété $P(n)$ est vraie

2) Application au raisonnement par récurrence

Démontrer par récurrence que : $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Soit (P_n) cette propriété

Pour $n = 1$ alors $1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$ vraie

Pour $n = 2$ alors $1 + 2 = \frac{2(2+1)}{2} = 3$

On suppose que la propriété est vraie au rang n , et montrons que la propriété est vraie au rang $n + 1$ c'est - à - dire $P_{n+1} = 1 + 2 + \dots + n + (n + 1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$

$$\underbrace{1 + 2 + \dots + n}_{\frac{n(n+1)}{2}} + (n + 1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \Leftrightarrow$$

$\frac{n(n+1)}{2} + (n + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \Leftrightarrow \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \Leftrightarrow \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ d'où pour tout entier naturel non nul n P_{n+1} est vraie. Par suite $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ est vraie

Application :

Démontrez par récurrence que pour tout naturel n , $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

II- Etude de la notion de suite numérique

1) Définition d'une suite numérique

Activité :

Sadio est une couturière styliste. Il décide de confectionner un nouveau modèle de vêtement. Le premier vêtement confectionné lui est revenu à 7500F CFA. Son expérience lui permet d'affirmer que le cout de confection unitaire **est** augmentera de 500F CFA par vêtement supplémentaire.

a- Compléter le tableau ci - dessous

Vêtement	1	2	3	4	5
Coût de confection (en F CFA)	7500	8000			

b- Calculer le coût de confection du 5^{ème} vêtement.

Synthèse : Dans l'activité on a associé des nombres réels à des entiers naturels. On définit ainsi une suite numérique.

Définition :

Définir une suite (U_n) c'est associer à chaque entier naturel n , un nombre U_n et un seul. Une suite est donc une fonction dont l'ensemble de définition est $\mathbb{N}$ des entiers naturels vers $\mathbb{R}$.

Notation :

Une suite (U_n) peut-être noté par $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(U_n)_{n \geq 0}$

Le nombre U_n est appelé terme d'indice n de la suite (U_n)

Exemple : Le terme d'indice 2 est noté U_2

Le terme d'indice $2n$ est noté U_{2n}

Le terme d'indice $n-5$ est noté U_{n-5}

2) Différente façons de définir une suite

En général, une suite numérique peut être déterminée par l'un des procédés suivants :

- a) Une **formule explicite** qui permet de calculer directement à partir de n , le terme d'indice n .

Exemple : on donne la suite (U_n) définie par $U_n = 3^n$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$

Calculer U_0, U_1, U_8 puis v_0, v_2, v_4 et v_{12} .

- b) Par la **donnée de son premier terme U_0** et d'une relation liant deux termes consécutifs (**relation de récurrence**)

Exemple 1 : On donne $u_0 = 0$ et la relation $u_{n+1} = 3u_n + 2$. Calculer les cinq premiers termes de cette suite.

Exemple 2 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 7500 \\ u_{n+1} = u_n + 500 \end{cases}$. Calculer u_2, u_3, u_4 .

Remarque : Si l'on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 2$, alors on peut dire que la suite (u_n) est définie par la donnée u_0 et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

3) Etude des propriétés d'une suite

a) Représentation graphique d'une suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$

Méthode : Pour représenter une suite (u_n) , on place les points de coordonnées $(n; u_n)$.

Exemple 1: f est la fonction $x \mapsto x^2$. Alors, pour tout n , $u_n = n^2$.

Exemple 2 : $u_n = 3n + 1$ et $v_n = \frac{n}{1+n}$. Représenter ces deux suites dans un repère orthonormé.

Exemple 3 : soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1 \end{cases}$. Représentez les six premiers termes de cette suite récurrente. Tracer la droite $(D): y = x$ puis trouver les points à partir du premier terme.

b) Sens de variation d'une suite

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique.

- ✓ Dire que la suite (u_n) est strictement croissante signifie que : pour tout naturel n , $u_n < u_{n+1}$.
- ✓ Dire que la suite (u_n) est strictement décroissante signifie que : pour tout naturel n , $u_n > u_{n+1}$.
- ✓ Dire que la suite (u_n) est constante signifie que : pour tout naturel n , $u_n = u_{n+1}$.

Remarque :

- ✓ Si $\forall n \in I$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors (u_n) est une suite décroissante sur I .
- ✓ Si $\forall n \in I$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors (u_n) est une suite croissante sur I .

Exemple : (u_n) définie par $u_n = 2^n + n$. Etudier le sens de variation de (u_n) .

Exemple : Déterminer le sens de variation des suites définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 2n + 5 ; v_n = \frac{n}{3^n} ; w_n = \frac{2n-5}{n+1}.$$

Méthode : Pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n) , on peut étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$

Cependant, lorsque $u_n = f(n)$, on peut étudier le sens de variation de f .

c) Convergence d'une suite

Une suite convergente est une suite qui a pour limite un nombre réel l fini. On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

Exemple : Dites si les suites sont convergentes : $u_n = 1 + \frac{1}{n}$; $w_n = \frac{3n+2}{2+n}$.

Qui peut dire si la suite (u_n) définie par : $u_n = (-1)^n$ est convergente ou non ?

III- Etude des suites arithmétique et géométrique

1) Suites arithmétiques

- a) Définition : Dire qu'une suite (u_n) est arithmétique signifie qu'il existe un réel r tel que pour tout naturel n , $u_{n+1} = u_n + r$.

Le réel r est appelé **raison** de la suite (u_n) .

Exemple : la suite des entiers naturels est une suite arithmétique de raison 1.

Quel est la raison de la suite arithmétique définie par : $u_n = 3n + 5$.

b) Relation entre les termes d'une suite

(u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et raison r . Alors $\forall n \in I$,
 $u_n = u_0 + nr$

D'une manière générale si le premier terme d'une suite arithmétique est noté par u_p alors $u_n = u_p + (n - p)r$.

Exemple :

- a- Exprimer u_{50} en fonction du premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 3$.
- b- Déterminer la raison r , sachant que $u_{15} = 50$ et $u_{10} = 40$.
- c- Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique tel que $v_3 = 15$ et $v_8 = 25$. Déterminer u_0 et r .
- d- On donne $u_{15} = 9$ et $r = 1,5$. Calculer u_{32} et u_2 .

c) Somme de termes consécutifs d'une suite

L'expression de la somme S_n de premier terme U_p ($p \in \mathbb{N}$) est donnée par la formule
 $S_n = \frac{n-p+1}{2} (U_p + U_n)$.

Si U_1 est le premier terme alors S_n est : $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n = \frac{n}{2} (U_1 + U_n)$.

Si U_0 est le premier terme alors $S_n = \frac{n+1}{2} (U_0 + U_n)$ or on a $U_n = U_0 + nr$ donc
 $S_n = \frac{n+1}{2} (2U_0 + nr)$

Exemple : soit $u_n = 5n - 1$ une suite de premier terme u_1 . Calculer la somme des 50 premiers termes.

Calculer la somme suivante : $1 + 2 + \dots + 56$.

Remarque

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison r

- ✓ Si $r > 0$ alors (U_n) est croissante.

- ✓ Si $r < 0$ alors (U_n) est décroissante.
- ✓ Si $r = 0$ alors (U_n) est constante.
- ✓ Lorsque $r = 0$, on peut dire que la suite (U_n) est convergente.
- ✓ Lorsque $r \neq 0$, on peut dire que la suite (U_n) est divergente.

Soit a, b, c trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, a, b, c sont en progression arithmétique si et seulement si $\mathbf{a + c = 2b}$. On dit que b est la moyenne arithmétique de a et c .

2) Suites géométriques

a) Définition

On appelle suite géométrique toute suite dont chaque terme s'obtient à partir du précédent par multiplication d'une suite constante non nulle, de raison q tel que $v_{n+1} = qv_n$

Exemple : Soit (v_n) une suite définie par $v_n = 3^n$. (U_n) est-elle géométrique ?

Méthode : Pour démontrer qu'une suite est géométrique, on cherche à écrire $v_{n+1} = qv_n$. q étant indépendant de n , $q = \frac{v_{n+1}}{v_n}$.

b) Relation entre les termes d'une suite

Soit (U_n) une suite géométrique de premier terme U_p ($p \in \mathbb{N}$) et de raison q . L'expression générale est de la forme $v_n = v_p \times q^{n-p}$.

Si U_0 est le premier terme alors $v_n = U_0 \times q^n$

Exemple : Sachant que $U_0 = -2$ et $q = 3$. Calculer le dixième terme de la suite.

c) Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Soit (v_n) de premier terme v_p et de raison q tel que $q \neq 1$. La somme des n termes est donnée par la relation $S_n = v_p \frac{q^{n-p+1} - 1}{q - 1}$

Pour tout entier naturel non nul n , $v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Pour tout entier naturel n $v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_0 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$

Exemple : sachant que $v_0 = 3$ et $q = 0,5$. Calculer v_6 , v_{10} et v_{100} .

Remarque

Soit (U_n) une suite géométrique de raison q et de terme général U_n

- ✓ Si $|q| < 1$ alors (U_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$
- ✓ Si $|q| > 1$ alors (U_n) diverge

Trois termes consécutifs a, b, c pris dans cet ordre sont en progression géométrique si et seulement si $\mathbf{a \times c = b^2}$. On dit que b est la moyenne géométrique de a et c .

