

Module 2 : RÉOLUTIONS - D'ÉQUATIONS - D'INÉQUATIONS - DE SYSTEMES

1- Résolutions des équations et des inéquations

1-1- Résolution d'équations à une inconnue

1-1-1- Résolution d'équation du 2nd degré à une inconnue

(Méthode du discriminant)

Toutes équations de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où $a \in \mathbb{R}^*$; $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ est appelé équation du second degré à une inconnue de variables réels x

Pour **résoudre** une telle équation, on peut utiliser plusieurs méthodes dont la méthode du discriminant.

Pour **résoudre** une équation du 2nd degré avec la **méthode du discriminant**, on calcule le réel $\Delta = b^2 - 4ac$ et on observe les cas suivants :

- ✓ Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet deux solutions distinctes $x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. L'ensemble solution noté $S = \{x_1; x_2\}$ avec $(x_1 < x_2)$
- ✓ Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une racine $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ (appelé racine double). L'ensemble solution est $S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$.
- ✓ Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'admet pas de solution. L'ensemble solution est le vide $S = \emptyset$.

Formes factorisées d'une équation du second degré

- ✓ Si $\Delta > 0$ alors on a : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
- ✓ Si $\Delta < 0$ alors $ax^2 + bx + c$ n'admet pas de forme factorisée.
- ✓ Si $\Delta = 0$ alors on a : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_1) = a(x - x_0)^2$ avec x_0 la racine double.

Evaluation

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- a) $x^2 - 3x + 4 = 0$
- b) $3x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{49}{48} = 0$
- c) $3x^2 - x - 4 = 0$
- d) $4x^2 - 9 = 0$
- e) $7x^2 + 3x = 0$
- f) $-3(x - 1)(x + 2) = 0$

1-1-2- Recherche de deux nombres connaissant leur somme et leur produit

Lorsque l'équation du 2nd degré à deux racines distinctes $x_1; x_2$ la somme notée S et le produit noté P de ces racines sont données par : $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

Deux nombres réels ont pour somme S et pour produit P si et seulement si, ils sont solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$

Remarque : La somme S et le produit P permettent de trouver le signe des racines

- ✓ Si $\Delta > 0$; $P < 0$ alors l'équation admet deux racines de signes contraires.
- ✓ Si $\Delta > 0$; $P > 0$ alors l'équation admet deux racines de mêmes signes. Ils sont du signe de la somme S (soit ils sont tous deux positives ou négatives).

Application

- a) Déterminer deux nombres ayant pour somme $2\sqrt{3}$ et pour produit -1.
- b) Déterminer deux nombres ayant pour somme $2 - \sqrt{2}$ et pour produit $\frac{3}{2} - \sqrt{2}$.
- c) Déterminer deux nombres ayant pour somme 5 et pour produit 6.
- d) Trouver deux nombres réels x_1 et x_2 tel que : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 27 \\ x_1 \times x_2 = 50 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 \times x_2 = -6 \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{6} \end{cases}$

1-2- Résolution d'inéquations à une inconnue

1-2-1- Etude de signe du trinôme

Soit f une fonction polynôme définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec ($a \neq 0$) une fonction polynôme du 2nd degré à une inconnue

Pour étudier le signe du trinôme on calcule le réel Δ on peut utiliser l'un des tableaux suivants :

- ✓ Si $\Delta < 0$ alors le trinôme n'a pas de racine donc le signe dépend du signe de a

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x) = ax^2 + b + c$	Signe de a	

- ✓ Si $\Delta = 0$, alors le trinôme à une racine double $-\frac{b}{2a}$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x) = ax^2 + b + c$	Signe de a	0	Signe de a

- ✓ Si $\Delta > 0$, alors le trinôme à deux racines distinctes $x_1; x_2$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x) = ax^2 + b + c$	Signe de a	0	signe de a	0	signe contraire de a

Application

Etudier le signe des fonctions polynômes suivantes :

$$P(x) = -2x^2 + 3x + 2 ; f(x) = x^2 - 5x - 6 ; g(x) = -3x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 ;$$

$$q(x) = -2x^2 + x - 1 ; T(x) = x^2 - 32x + 240 ; S(x) = 15x^2 - 11x - 4.$$

1-2-2- Résolution d'inéquations du 2nd degré à une inconnue

Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation du 2nd degré à une inconnue, on étudie le signe de la fonction polynôme $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$. Après on en déduit les solutions à partir du tableau de signe.

Exemple : Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$:

a) $(x + 1)(5 - x) > 0$

b) $-2x^2 + 3x + 2 \leq 0$

c) $x^2 - 5x - 6 \geq 0$

d) $-x^2 + 5x - 6 < 0$

e) $2x^2 + 3x + 7 > 0$

f) $5x^2 - 5x + 8 < 0$

Evaluation :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : $2x^2 - 7x - 15 < 0 ; -3x^2 - 2x + 1 > 0 ;$
 $x^2 + x + 1 \geq 0 ; 2x^2 - 3x + 7 \leq 0 ; 5x^2 - 7x + 2 > 0$

1-3- Résolution d'équations se ramenant au second degré

1-3-1- Résolution d'équations et d'inéquations :

Activité 1 : Résolution d'équations ou l'inconnue figure au dénominateur

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $\frac{x-2}{x+2} = \frac{x+2}{x-2}$

$$\frac{x+3}{3x-5} = \frac{3x-5}{x+3} ; \frac{x-1}{x+1} = \frac{2x-5}{x-1} ; \frac{-9x^2+5x+4}{7x^2-4x-3} = 0$$

Synthèse :

Pour résoudre une équation ou l'inconnue figure au dénominateur, on se ramène à une équation de la forme : $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$ et on résout $A(x) = 0$. Les valeurs de x qui annulent le dénominateur ne peuvent pas être solutions.

Activité 2 : Résolution d'équations bicarrées (Sans paramètre)

Activité :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $x^4 + x^2 - 12 = 0 ; x^4 - 1 = 0 ;$

$$x^4 - 7x^2 + 6 = 0.$$

Synthèse :

Pour résoudre une équation bicarrée on peut faire un changement de variable. On peut poser $T = x^2$ ou $X = x^2$ ou d'autre lettre de l'alphabet.

L'équation peut s'écrire $(x^2)^2 + (x^2) - 12 = 0 \Leftrightarrow T^2 + T - 12 = 0$ qui est une équation du second degré à résoudre.

Activité 3 : Résolution d'inéquations se ramenant au second degré ou l'inconnue figure au dénominateur

Résolvez dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : $\frac{-9x^2+5x+4}{7x^2-4x-3} < 0$; $\frac{x-1}{x+1} > 2x$; $-2x \leq \frac{x+1}{x-1}$;
 $\frac{2x^2+5x-3}{x^2+x-2} \geq 0$; $-2 \geq \frac{1}{x+2} + \frac{3}{x}$.

Synthèse : Pour résoudre une inéquation ou l'inconnue figure au dénominateur, on se ramène à une équation $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$ puis étudier son signe. Après on en déduit les solutions selon les inégalités.

Activité 4 : Résolution d'inéquations bicarrées

Résolvez l'inéquation suivante dans $\mathbb{R}$: $4x^4 - 5x^2 + 1 < 0$

Solution guidée pour la résolution de : $4x^4 - 5x^2 + 1 < 0$

Soit f une fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x^4 - 5x^2 + 1$

Procédons par changement de variable en posant $T = x^2$. Donc on peut écrire que $4x^4 - 5x^2 + 1 = 4T^2 - 5T + 1$

Ensuite posons $4T^2 - 5T + 1 = 0$ qui est une équation du second degré et admet 1 et $\frac{1}{4}$ comme solution. Alors $4T^2 - 5T + 1 = 4\left(T - \frac{1}{4}\right)(T - 1) = 4\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)(x^2 - 1)$

Donnons une factorisation de : $4x^4 - 5x^2 + 1 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)(x + 1)(x - 1)$.

Faire un tableau de signe pour en déduire les solutions.

Synthèse :

Faire un changement de variable, puis, si possible donner une forme factorisée.

Ensuite faire une étude de signe à partir d'un tableau. En fin en déduire les solutions.

Application

a- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations se ramenant au 2nd degré

$$\left(\frac{7x}{x-3}\right)^2 - \frac{7x}{x-3} + 1 = 0; \frac{2x-1}{x+3} - \frac{x-1}{x+2} = \frac{1}{2}; \frac{x^2-x+1}{x+1} = 2x-3; \frac{1}{x^2-1} + \frac{2}{x-3} + \frac{3}{x+3} = 1;$$

$$9x^4 - 12x^2 + 3 = 0; x^4 - 3x^2 + 2 = 0; x^4 + 5x^2 + 9 = 0; 2x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 1 = 0.$$

b- Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations se ramenant au 2nd degré : $1 - x^4 \leq 0$;

$$x^4 + x^2 - 12 \geq 0; x^3 - 3x^2 + 2x < 0; 2x^4 - x^2 + 3 > 0$$

1-3-2- Résolution d'équations et d'inéquations irrationnelles de types :

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \text{ ou } \sqrt{f(x)} = ax + b; \sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)} \text{ ou } \sqrt{f(x)} \leq ax + b$$

$$\rightarrow \text{Résolution d'équations irrationnelles : } \sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \text{ ou } \sqrt{f(x)} = ax + b$$

Une équation irrationnelle est une équation où l'inconnue figure sous le radical.

Méthode

✓ Pour résoudre une équation irrationnelle de types $\sqrt{f(x)} = ax + b$, on peut se

$$\text{ramener à résoudre le système suivant : } \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ ax + b \geq 0 \\ (\sqrt{f(x)})^2 = (ax + b)^2 \end{cases}$$

✓ Pour résoudre une équation irrationnelle de types : $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$, on peut faire une élévation de carrée des deux membres au tant de fois jusqu'à ce qu'il n'y a plus de radical au deux membres. Ensuite on vérifie les solutions trouvées dans l'équation de départ.

Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $\sqrt{3-x} = x-1$; $\sqrt{x^2-2} = \sqrt{3x-4}$.

$$\sqrt{-x^2+5x+9} = \sqrt{x-3}; \sqrt{2-x} = x+10; \sqrt{3x^2+x-1} = \sqrt{2x^2+x+1}$$

$$\sqrt{y+1} + y = 3; \sqrt{2t-1} = 1-2t; \sqrt{2x+1} = \sqrt{x^2+2}$$

$$\rightarrow \text{Résolution d'inéquations irrationnelles : } \sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)} \text{ ou } \sqrt{f(x)} \leq ax + b$$

Pour résoudre une telle inéquation, il suffit de procéder par implication par ce que ces ensembles solutions contiennent, en générale une infinité d'éléments donc on ne peut pas vérifier si chacun d'eux est solution de l'inéquation initiale.

$$\text{Résoudre l'inéquation } \sqrt{f(x)} \leq ax + b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ ax + b \geq 0 \\ (f(x)) = (ax + b)^2 \end{cases}$$

Résoudre l'inéquation : $\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$

Exemple : Résoudre sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : $\sqrt{x-1} \geq 3-x$;

$$\sqrt{x(x-3)} < 2x-2 ; 2x-5 \geq \sqrt{x^2+x+1} ; \sqrt{x^2-2} > \sqrt{3x+4}.$$

1-3-3- Résolution d'équations paramétriques d'inconnues réels x

Activité 1 : Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre m l'équation d'inconnue réel x : $(E_m): (m+1)x^2 - 2mx + m^2 - 2m = 0$

Activité 2 : Soit l'équation $(E_m): (m-1)x^2 + 2(m+3)x + m+6 = 0$

- a) Résoudre cette équation pour $m = -1$.
- b) On suppose $m \neq -1$. Déterminer les valeurs du nombre réel m pour les quelles :
 - i) L'équation à deux solutions de signes contraires
 - ii) L'équation à deux solutions de signes distinctes positives.

NB : Comparer un réel α aux racines d'une équation du second degré

Si $\Delta > 0$ et $f(x) = ax^2 + bx + c$ alors on observe les cas :

- ✓ Si $af(\alpha) < 0$ alors $x_1 < \alpha < x_2$
- ✓ Si $af(\alpha) > 0$ alors $x_1 < x_2 < \alpha$ ou
 - Si en plus $\left(\alpha + \frac{b}{2a}\right) > 0$ alors $x_1 < x_2 < \alpha$
 - Si en plus $\left(\alpha + \frac{b}{2a}\right) < 0$ alors $\alpha < x_1 < x_2$

Application :

- a) Placer le nombre 3 par rapport aux racines de l'équation : $x^2 + 8x + 1 = 0$
- b) Placer 2 par rapport aux racines de l'équation :

$$(E_m): (m-2)x^2 - 2(m+1)x + m+3 = 0$$

Application :

- 1) Soit l'équation $(E_m): (m-2)x^2 + (2m+2)x + 10m-14 = 0$
 - a) Discuter suivant les valeurs de m l'existence et le signe des racines
 - b) Trouver entre les racines x_1 et x_2 une relation indépendante de m .
 - c) Pour quelles valeurs de m l'équation admet deux racines de signes contraires
 - d) Pour quelles valeurs de m l'équation admet deux racines positives.
- 2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations paramétriques d'inconnues réel x
 - a) $(E_m): (5m+1)x^2 + 8mx + 2m+3 = 0$
 - b) $(E_m): (m+1)x^2 - (m+3)x + 3-m = 0$

c) $(E_m): x^2 - (2m - 1)x + m^2 - m = 0$

d) $(E_m): mx^2 + 3x - 1 = 0$

e) $(E_m): (m - 1)x^2 + 2(m + 3)x + m + 6 = 0$

1-3-4- Résolution des systèmes de types: $\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ xy = b \end{cases} ; \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ xy = b \end{cases}$

Activité 1 : Résoudre dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

1-2- $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases} ; \quad \text{b) } \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \end{cases} ; \quad \text{c) } \begin{cases} 3(x + y) + xy + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases}$

Réponse

Réolvons le système $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}$

Connaissant que $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ alors on peut écrire

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$$

On a :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 - 2xy = 5 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 = 5 + 2(2) \\ xy = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x + y = -3 \\ xy = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc on se ramène à la résolution d'un système dont on connaît la somme et le produit

L'ensemble solution est : $S = \{(1; 2); (2; 1); (-1; -2); (-2; -1)\}$

2- Résolutions des systèmes d'équations

2-1- Résolution d'un système de deux équations à deux inconnues

2-1-1- Résolution d'un système de deux équations à deux inconnues avec paramètre (Méthode du déterminant)

Un système de deux équations à deux inconnues x et y est un système qui peut s'écrire sous la forme $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

On calcule $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$ appelé le déterminant

✓ Si $D \neq 0$ alors on calcule $D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b$ et $D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$, le système admet un couple de solution et un seul $x = \frac{D_x}{D}$ et $y = \frac{D_y}{D}$

✓ Si $D = 0$, on peut toujours écrire les équations du système de sorte qu'elles aient même premier membre. Alors :

- Ou bien les seconds membres sont différents et le système n'a pas de solution
- Ou bien les seconds membres sont égaux et le système a une infinité de couples de solutions

Exemple : Soit $m \in \mathbb{R}$ et (S) un système donné par (S): $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ mx - y = 2 \end{cases}$

- a- Trouver l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles le système a une solution et une seule.
- b- Donner si possible le couple de solution.
- c- Lorsque $m = -\frac{1}{2}$, le système a-t-il des solutions ?

2-1-2- Résolution d'un système de deux équations à deux inconnues (variables auxiliaires)

Activité :

$$\text{Résoudre dans } \mathbb{R} : \begin{cases} \frac{2}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{3}{2} \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 10 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y-1} = 2 \\ 3\sqrt{x} + 2\sqrt{y-1} = 16 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \frac{1}{x-1} + \frac{3}{y+2} = \frac{1}{2} \\ \frac{2}{x-1} + \frac{1}{y+2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Synthèse :

Pour résoudre une telle équation on peut procéder un changement de variables.

2-2- Résolution d'un système de trois équations à trois inconnues

2-2-1 Résolution par le pivot de Gauss

Exemple guidé : Résolvons le système suivant : (S): $\begin{cases} x + 10y - 3z = 5 & (a) \\ 2x - y + 2z = 2 & (b) \\ -x + y + z = -3 & (c) \end{cases}$

Fixons l'équation (a)

Etape 1 :

Éliminons x dans les équations (b) et (c) en utilisant l'équation (a)

$$\text{On aura } \begin{cases} -21y + 8z = -8 & (b') \\ 11y - 2z = 2 & (c') \end{cases}$$

$$\text{Écrivons } (S') : \begin{cases} x + 10y - 3z = 5 & (a) \\ -21y + 8z = -8 & (b') \\ 11y - 2z = 2 & (c') \end{cases}$$

Etape 2 :

Éliminons y dans (c') en utilisant (b')

$$\frac{46}{21}z = -\frac{46}{21}(c'')$$

$$\text{Ecrivons } (S'') : \begin{cases} x + 10y - 3z = 5 & (a) \\ -21y + 8z = -8 & (b') \\ \frac{46}{21}z = -\frac{46}{21} & (c'') \end{cases}$$

Application :

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 3x + 4y + z = 7 \\ x + 2y - z = 13 \\ 2x - y + 2z = 5 \end{cases} ; \begin{cases} y + z = 3 \\ 2x + y - z = 1 \\ 2x - y + 4z = 8 \end{cases} ; \begin{cases} 2x + 3y - 2z = 2 \\ 4x - 3y + z = 4 \\ 2x + 12y - 7z = 2 \end{cases}$$

2- Résolution d'un système de deux équations à trois inconnues

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants : $\begin{cases} 3x - 2y + 2z = -1 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases} ;$

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 2 \\ 9y - 5z = 0 \end{cases} ; \begin{cases} x + 2y + 5z = 4 \\ y + 3z = -2 \end{cases} \text{ on peut poser } z = \alpha; \alpha \in \mathbb{R}$$

3- Résolution des problèmes utilisant les équations les inéquations application à la résolution de problème pratique

Activité :

Seydou dit à Moussa : « j'ai deux fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez. Et quand vous aurez l'âge que j'ai, nous aurons cent vingt-six ans à nous deux ». Quel est l'âge de Seydou, quel est l'âge de Moussa ?

NB: Noter x l'âge de Moussa et y la différent entre l'âge de Seydou et celui de Moussa ?

Synthèse :

Pour résoudre ce genre de problème on peut procéder de la façon suivante :

- Etape 1 : Choisir l'inconnue ou les inconnues
- Etape 2 : Faire une mise en équation
- Etape 3 : Faire la résolution

Application :

On cherche un nombre de trois chiffres dont la somme des chiffres est 6.

- En permutant les deux premiers chiffres, le nombre augmente de 90.
- En permutant les deux derniers chiffres, le nombre augmente de 9.

Trouver ce nombre

EVALUATION : EQUATIONS – INEQUATIONS – SYSTEMES (11° STI GM GMI GC GE)

Exercice1 : Résolvez les équations suivantes

$$1^{\circ}) x^2 + x + \frac{1}{4} = 0 \quad 2^{\circ}) (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 4x + 3) = 0 \quad 3^{\circ}) \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2} = \frac{6}{5}$$

$$4^{\circ}) x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \quad 5^{\circ}) x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \quad 6^{\circ}) (x^2 - 9)^2 - 4(x^2 - 9) + 3 = 0$$

$$7^{\circ}) x^2 + 2 + \frac{8}{x^2} = 6$$

Exercice2 : Trouver la somme et le produit des racines de chacune des équations suivantes sans les résoudre :

$$a^{\circ}) 10x^2 - 11x - 12 = 0 \quad b^{\circ}) (x - 2)(3x - 4) = 13 \quad c^{\circ}) (4x + 3)^2 - (3x + 1)^2 = 0$$

$$d^{\circ}) 7 + x = (2x - 1)(3x - 2)$$

Exercice3 : On désigne par N un nombre entier de deux chiffres. Son chiffre des dizaines est x et le chiffre des unités est y. La somme des chiffres est 14 et le produit de N par le nombre entier obtenu en inversant l'ordre des chiffres est 5605. Déterminer N.

Exercice4 : Montrer que l'équation $-3x^2 + 5x + 7 = 0$ admet 2 racines distinctes α et β . Sans calculer α et β , déterminer: $\alpha + \beta$; $\alpha\beta$; $\alpha^2 + \beta^2$; $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

Exercice5 :

$$1^{\circ}) \text{ Montrer que pour nombres réels } x \text{ et } y, x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$2^{\circ}) \text{ Déterminer tous les couples } (x ; y) \text{ vérifiant : } \begin{cases} x^3 + y^3 = 98 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Exercice6 : Résoudre dans les inéquations suivantes :

$$a^{\circ}) -5x^2 + 3x - 2 > 0 \quad b) \frac{x^2-x-4}{2x^2-2x-3} > 0 \quad c) \frac{2x-8}{x^2+5x-6} \leq \frac{1}{x+2} \quad d) (x^2 + 3x + 5)^2 > 16$$

Exercice7 : Etudier les équations irrationnelles suivantes :

$$1^{\circ}) \sqrt{3x+1} = 4-x \quad 2) x - \sqrt{2x+1} = 7 \quad 3) \sqrt{x^4 - 12x^2 + 36} = x$$

$$4^{\circ}) \sqrt{x-3} + \sqrt{x-8} = 5$$

$$5^{\circ}) 3 - \sqrt{2x + \sqrt{6x^2 + 1}} = x + 1$$

Exercice8 :

Etudier les inéquations suivantes :

$$1^{\circ}) \sqrt{x-3} + 1 > 0 \quad 2) \sqrt{x^2+11} < 2x-4 \quad 3) x-5 \leq \sqrt{x-2}$$

$$4) \sqrt{-x^2+7x} \geq \sqrt{x^2-3x+2}$$

Exercice9 :

Résoudre IR les équation ou inéquations suivantes :

$$1^{\circ}) |x-2| < 3; |4x-1| \geq 5 \quad 2^{\circ}) |6x^2-4x-9| = 1; |-3x^2+x-7| \leq 9-2x$$

$$3^{\circ}) |3-x| - 2|x+1| \leq 7x-3$$

$$4^{\circ}) |2x-5| - 3|x-8| + |4-x| = 15; |2x-5| - 3|x-8| + |4-x| \geq 3x+5$$

Exercice10 :

Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre réel m les équations suivantes :

$$1^{\circ}) (m-3)x^2 + (7-4m)x + 20 = 0$$

$$2^{\circ}) (m-1)x^2 - 2(m+3)x + m = 0$$

$$3^{\circ}) mx^2 - 2(m-2)x - 10 = 0$$

Exercice11 :

Etudier l'existence et le signe des racines de chacune des équations suivantes :

$$1^{\circ}) (m+1)x^2 - mx + m^2 + 2m = 0$$

$$2^{\circ}) x^2 - (2m+3)x + 3 = 0$$

$$3^{\circ}) (m-4)x^2 - (m+3)x + m-4 = 0$$

Exercice12 :

Soit l'équation paramétrique : $x^2 - (3k+1)x + 8 = 0$ telle que ses racines x_1 et x_2 vérifient la relation : $x_1^2 + x_2^2 = 20$. Trouver le paramètre k

Exercice13 :

Comparer 3 aux racines de l'équation $(m - 1)x^2 - 2(m + 1)x + m + 2 = 0$

Exercice14 :

Une baignoire peut contenir 140 litres. Le robinet d'eau chaude débite 15 litres par minute. En utilisant seulement le robinet d'eau froide (1^{er} cas), le remplissage de la baignoire demande trois minutes de plus qu'avec deux robinets (2^{ème} cas).

Calculer le débit d du robinet d'eau froide et le temps de remplissage dans chacun des deux cas.

Exercice15 :

Soit le trinôme $f_m(x) = (m - 2)x^2 - 2(m - 5)x + m - 15$. On considère (E): $f_m(x) = 0$

1°) Résoudre (E) pour $m = 2$.

Dans la suite on supposera que $m \neq 2$; x' et x'' désignent les solutions éventuelles de (E).

2°) Discuter suivant les valeurs de m , l'existence et le signe des racines de (E). Existe-il des valeurs de m pour que (E) admette deux solutions x' et x'' vérifiant :

- a) x' et x'' sont distinctes et positives ?
- b) x' et x'' sont opposés

3°) Etablir une relation indépendante de m entre x' et x'' . Utilisez ce résultat pour déterminer x'' si $x' = 0$

4°) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles : $2 < x' < 3 < x''$

5°) Peut-on trouver m de sorte que l'on ait :

- a) Pour tout nombre réel x ; $f_m(x) < 0$?
- b) Pour tout nombre réel x ; $f_m(x) > 0$?

6°) Former l'équation du second degré d'inconnue X ayant pour solutions $X' = x'^2 + x''^2$ et

$X'' = 2x'x''$. En déduire les valeurs de m telles que : $(x')^2 + (x'')^2 = 1$

Exercice16 :

On considère l'équation (E) : $x^4 - 2x^3 - 6x^2 - 2x + 1 = 0$.

1°) Vérifier que 0 n'est pas solutions de (E).

2°) Montrer que si a est solution de (E) alors $\frac{1}{a}$ est aussi solution de (E).

3°) Montrer que l'équation (E) est équivalente à : $x^2 - 2x - 6 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$.

4°) Calculer $(x + \frac{1}{x})^2$.

5°) En posant $X = x + \frac{1}{x}$, montrer que l'équation (E) est équivalente à (E'): $X^2 - 2X - 8 = 0$.

6°) Résoudre l'équation (E')

7°) En déduire les solutions de l'équation (E). Vérifier le résultat de la question 2). Pour résoudre l'équation du type $x + \frac{1}{x} = k$, on pourra multiplier toute l'équation par x.

Exercices17 :

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants :

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} 3x + 2z = 1 \\ x + 2y - z = 8 \\ 3x + 2y + 2z = 7 \end{cases} \\ \text{b) } & \begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ x + y - z = 3 \\ x - 9y + 5z = -7 \end{cases} \\ \text{c) } & \begin{cases} -x + 3y - z = 2 \\ 2x - y + 3z = -1 \\ 2x + 9y + 5z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice18 :

Au grand congrès des ingénieurs se réunissent des Asiatiques, des Européens et un Africain. On sait que 9 participants ne venaient pas de Chine ; 10 ne venaient pas d'Inde ; 10 ne venaient pas d'Europe ; 5 n'étaient pas Asiatiques (les asiatiques présents sont des Chinois et des Indiens)

1°) Combien y avait-il de Chinois ?

2°) Quel est le nombre total des participants ? Le nombre des indiens ? Le nombre des européens ?

Exercice19 :

Un gérant de magasin de musique décide de liquider un stock de cassette sous forme de lots.

Lot A : 5 K7 de disco, 2 de Jazz et 1 de classique

Lot B : 4 K7 de jazz et 4 de classique

Lot C : 2 K7 de disco, 1 de jazz et 5 de classique

Combien doit-il proposer de lots de chaque type s'il veut épuiser son stock de 760 K7 de disco, 720 de jazz et 920 de classique ?

Exercice 20 :

Trois joueurs conviennent qu'à chaque partie, le perdant doublera l'avoir des deux autres. Chacun d'eux perd successivement une partie et chaque joueur possède alors 200 francs. Quels étaient les avoirs initiaux de chacun des joueurs ?

Evaluation :

1°) Pour son anniversaire, Aïssata invite 23 amis en début d'après-midi. En fin d'après-midi, parmi les invités, 4 filles s'en vont et 3 garçons rejoignent le groupe. A ce moment-là, il y a autant d'invités filles que d'invités garçons. Combien y avait-il de filles et de garçons invités en début d'après midi

2°) Je choisis deux nombre entiers. Leur somme est égale à 27. Si j'ajoute 1 à l'un de ces nombres et 2 à l'autre et si j'effectue la différence entre le produit de ces nouveau nombres et le produit des nombres choisis au départ, j'obtiens 42. Quel nombre ai-je choisis au départ ?

3°) Fatoumata et Mamadou collectionnent les timbres. S'ils mettent leurs timbres en commun, ils obtiennent 300 timbres. Si Fatoumata en donne 30 à Mamadou, alors il en aura exactement deux fois plus qu'elle. Combien Fatoumata et Mamadou ont-ils de timbres ?

4°) Un père de famille décide de donner à son enfant 110^F quand l'enfant va à l'école et 170^F quand l'enfant ne va pas à l'école. Après 26 jours de scolarité l'enfant reçoit 3760^F. Trouver le nombre de jours où l'enfant va à l'école et le nombre de jours où l'enfant ne va pas l'école.

5°) M. Koné commerçant à Zambougou commande à un vendeur 20m de tissu synthétique et 15m de tissu de coton. Quelque temps après, il passe une autre commande de 12m de tissu de coton et 8m de tissu synthétique. La 2^{ème} facture s'élève à 34 000^F et la 1^{ère} à 62 500^F. Après avoir traduit le problème, trouver le prix du mètre de tissu de chaque catégorie.

6°) Un âne et un cheval chargés de sacs également pesants font chemin ensemble. L'âne se plaignant de sa charge, le cheval lui dit « de quoi te plains-tu ! Si je prenais un de tes sacs, je serais 2 fois chargé autant que toi, et tu me prenais un des miens je serais encore aussi chargé que toi ». Combien de sacs porte chaque animal ?