

Module IV : NOTION DE GEOMETRIE PLANE

1- Etude de quelques applications du produit scalaire

1-1- Coordonnées polaires

1-1-1- Définition :

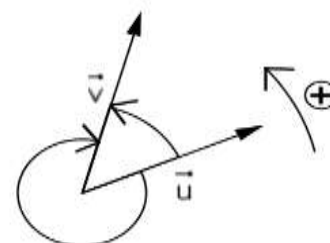
Activité1 : Angle orienté

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan et θ la mesure de l'angle formé entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Déterminer le sens de l'angle θ orienté.

Synthèse :

Un angle orienté est défini par deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\theta = \text{més}(\vec{u}, \vec{v})$. L'angle est alors orienté de $\vec{u}$ vers $\vec{v}$.

Sur la figure ci-contre, on a représenté deux angles orientés $(\vec{u}, \vec{v})$, représentant le même angle. Le premier est orienté dans le sens direct et l'autre dans le sens indirect.



Activité2 :

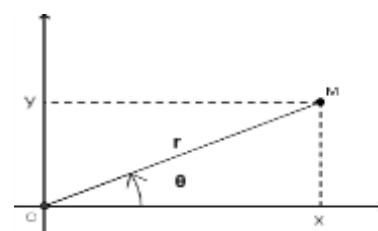
a°) Construire dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un cercle de centre O et de rayon r .

b°) Placer un point $M(x; y)$ sur le cercle. Déterminer les coordonnées du point M en fonction de l'angle orienté.

c°) En utilisant le théorème de Pythagore, déterminer le rayon en fonction des coordonnées du point M .

synthèse : Définition de coordonnées polaires

Considérons un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Pour tout point M du plan distinct du point O , il existe un seul couple (r, θ) tels que $r = OM$ et $\theta = \text{més}(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ donc le couple (r, θ) est appelé coordonnées polaires du point M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



1-1-2- **Coordonnées polaires à partir des coordonnées cartésiennes**

Soit $M(x; y)$ un point du plan et le couple (r, θ) ses coordonnées polaires. Le couple $(x; y)$ étant ces coordonnées cartésiennes du point M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Alors on a les coordonnées cartésiennes du point M donné par :
$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

D'où les coordonnées polaires de M :
$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ et } \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

1-1-2- **Utilisation des coordonnées polaires**

Application :

a) Trouver les coordonnées polaires des points A ; S ; C et F de coordonnées cartésiennes respectives $(3; \sqrt{3})$; $(2; -2)$; $(2\sqrt{3}; 2)$ et $(\sqrt{3}; -1)$

b) Trouver les coordonnées cartésiennes des points $P\left(3; \frac{3\pi}{2}\right)$; $G\left(-\frac{5}{2}; \pi\right)$

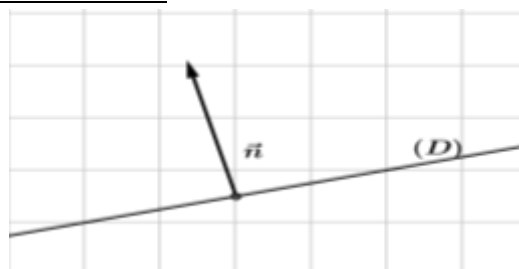
$T\left(1; -\frac{2\pi}{3}\right)$ et $H\left(-2; \frac{5\pi}{6}\right)$.

1-2- **Vecteur normal à une droite**

1-2-1- **Définition d'un vecteur normal à une droite**

Soit (D) une droite d'équation

$ax + by + c = 0$ et $\vec{u}$ un vecteur non nul de (D) .



On appelle vecteur normal à (D) tout vecteur orthogonal au vecteur $\vec{u}$ de (D) .
Un vecteur normal de droite d'équation $ax + by + c = 0$ a pour coordonnées $\vec{n}(a; b)$ dans le plan.

Exemple :

a- Trouver le vecteur normal de l'équation cartésienne $(D) : 2x - 3y + 1 = 0$

b- Trouver le vecteur normal de l'équation cartésienne $(D') : -3x + 4y - 2 = 1$

1-2-2- Utilisation d'un vecteur normal

Activité :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne le point $A(2; -3)$.

Trouver l'équation de la droite (D) passant par A et de vecteur normal $\vec{u}(-1; 4)$.

Méthode1

Soit un point quelconque $M(x; y) \in (D)$. Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux c'est-à-dire $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$ donc $(D) : -1(x - 2) + 4(y + 3) = 0$

Méthode2

On peut utiliser les coordonnées du vecteur normal $\vec{u}(-1; 4)$ donc une équation cartésienne de $(D) : -1x + 4y + c = 0$

$$A(2; -3) \in (D) \Leftrightarrow -2 + 4(-3) + c = 0 \Rightarrow c = 14$$

Théorème :

Pour déterminer une équation de la droite (D) passant par le point $A(a; b)$ et dont $\vec{u}$ est un vecteur normal, il suffit d'écrire $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

NB :

- **Toute droite D de vecteur normal $\vec{n}(a; b)$ admet une équation du type $ax + by + c = 0$ appelée équation cartésienne de (D) .**
- **Réciproquement, toute équation du type $ax + by + c = 0$ est celle d'une droite de vecteur normal $\vec{n}(a; b)$.**

Application :

a) Déterminer l'équation de la droite (D) passant par le point $A(2; -3)$ et dirigé par le vecteur normal $\vec{v}(3; 5)$.

b) Déterminer l'équation de la droite (Δ) passant par le point $B\left(-\frac{3}{2}; -\frac{5}{4}\right)$ et de vecteur normal $\vec{w}\left(\frac{1}{2}; 4\right)$.

1-3- Equation normale d'une droite

1-3-1- Définition d'une équation normale

Soit (D) une droite de vecteur normal $\vec{n}$ et θ la mesure de l'angle $(\vec{i}, \vec{n})$.

L'équation cartésienne de la droite (D) est de la forme

$$x \cos \theta + y \sin \theta + c = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}y + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$

1-3-2 Détermination de l'équation normale

Exemple1 :

Soit (D) la droite passant par le point $A(-2; 3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1; \sqrt{3})$. Donc l'équation normale de (D) est donnée par la formule $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$

avec M un point quelconque de (D) et $\|\vec{u}\| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$

D'où l'équation normale (D) est: $\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{2\sqrt{3}+3}{2} = 0$.

Exemple2 :

Soit (D') d'équation cartésienne $3x - 2y + 3 = 0$ et $\vec{v}(3; -2)$ de vecteur normale.
La norme de $\vec{v}$ notée $\|\vec{v}\| = \sqrt{13}$ donc l'équation normale de la droite (D) est donnée par : $\frac{3}{\sqrt{13}}x - \frac{2}{\sqrt{13}}y + \frac{3}{\sqrt{13}} = 0$

1-3-3 Distance d'un point à une droite

Théorème : Le plan est muni d'un repère orthonormé. Soit (D) la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ et le point $A(p; q)$

La distance du point A à la droite (D) est le nombre réel $d(A; (D))$ tel que

$$d(A; (D)) = \frac{|ap + bq + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Application :

Soit (D) la droite d'équation donnée : $2x - 3y + 1 = 0$.

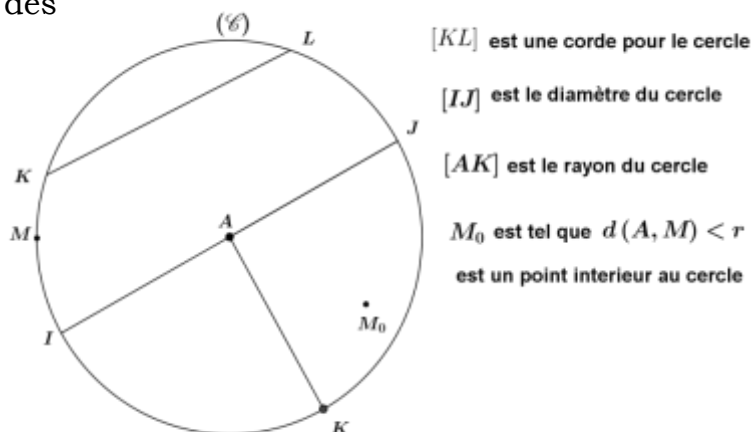
a°) Calculer la distance du point $A(7; 4)$ à (D)

b°) Calculer la distance du point $B(2; 6)$ à (D) .

1-3-3 Equation d'un cercle :

Soit A un point du cercle (C) et r un nombre réel positif. Le cercle de centre A et de rayon r est l'ensemble des points M du plan tel que

$$d(A; M) = r$$



On appelle **cercle** de centre A et de rayon r noté $\mathcal{C}(A; r)$ pour tout point M du plan $\mathcal{P}$ tel que $AM^2 = r^2$

Equation du cercle :

Soit $A(a; b)$ un point du plan $\mathcal{P}$ et $M(x; y) \in \mathcal{C}$ équivaut à $d(A, M) = r \Leftrightarrow$

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r \Leftrightarrow x^2 + y^2 + a^2 + b^2 - 2ax - 2by - r^2 = 0$$

Application :

a°) Déterminer une équation cartésienne du cercle Γ de centre $A(-1; 3)$ et de rayon 2.

b°) Déterminer une équation du cercle Φ de diamètre le segment $[AB]$ ou les points $A(4; 1)$ et $B(2; -3)$ appartiennent au cercle.

1-4 Détermination de lignes de niveaux

1-4-1 Définition d'une ligne de niveaux

Soit k un réel et f une application du plan $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}$. On appelle ligne de niveau k de f l'ensemble (E_k) des points M du plan tels que $f(M) = k$.

1-4-2 Rechercher des lignes de niveaux

$$MA^2 - MB^2 = k; MA^2 + MB^2 = k; \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$$

→ Ensemble des points M du plan tel que : $MA^2 - MB^2 = k$

Pour tout M du plan on a :

$$MA^2 - MB^2 = (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MA})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})$$

Soit I milieu du segment [AB] alors $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{MI}$

$$\text{Donc } MA^2 - MB^2 = \overrightarrow{BA} \cdot (2\overrightarrow{MI}) \Rightarrow \overrightarrow{BA} \cdot (2\overrightarrow{MI}) = k \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IM} = \frac{k}{2}$$

Soit H le projeté orthogonal de M sur le segment [AB].

Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IH} = \frac{k}{2} \Rightarrow \overrightarrow{IH} = \frac{k}{2\overrightarrow{AB}}$ d'où l'ensemble (E_1) est la droite perpendiculaire à la droite (AB) et passant par le point H.

→ **Ensemble des points M du plan tel que : $MA^2 + MB^2 = k$**

Transformation : Soit I milieu du segment [AB]

$$MA^2 + MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + IA^2 + MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + IB^2$$

Or $\overrightarrow{IA} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$ et I milieu de [AB] alors $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 0$

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \underbrace{(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})}_0 + \frac{2AB^2}{4}$$

$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$ est aussi appelé **Théorème de la médiane**.

$$\text{Résolution : } MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = k \Rightarrow 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} = k \Rightarrow MI^2 = \frac{2k - AB^2}{4}$$

✓ Si $\frac{2k - AB^2}{4} < 0$ alors $k < \frac{AB^2}{2}$ donc l'ensemble cherché est l'ensemble vide.

✓ $\frac{2k - AB^2}{4} > 0$ alors $\overrightarrow{IM} = \frac{\sqrt{2k - AB^2}}{2}$ donc l'ensemble cherché est le cercle de centre I et de rayon $r = \frac{\sqrt{2k - AB^2}}{2}$.

✓ $\frac{2k - AB^2}{4} = 0$ alors $2k - AB^2 = 0 \Rightarrow k = \frac{AB^2}{2}$ donc $MI^2 = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} = 0$.

L'ensemble recherché est le point I

→ **Ensemble des points M du plan tel que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$**

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \underbrace{(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB})}_0 - IA^2 = MI^2 - IA^2$$

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2$ est le second théorème de la médiane.

Or $\overrightarrow{IA} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$ donc on aura $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$

$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k \Leftrightarrow MI^2 - \frac{AB^2}{4} = k \Rightarrow MI^2 = k + \frac{AB^2}{4}$. On observe les cas suivants :

✓ Si $k + \frac{AB^2}{4} < 0$ alors l'ensemble cherché est le vide

✓ Si $k + \frac{AB^2}{4} = 0$ alors l'ensemble cherché est le point I

✓ Si $k + \frac{AB^2}{4} > 0$ alors l'ensemble cherché est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{k + \frac{AB^2}{4}}$.

Exemple :

Soit deux points A et B distincts tel que $AB = 6\text{cm}$ et I est le milieu c. On note E_k l'ensemble des points M du plan tel que

$$MA^2 + MB^2 = k$$

a°) Déterminer E_k et pour $k = 26$ représenter E_k .

b°) Même question pour k prenant les valeurs 22, 18, 8 et -6.

Exemple 2 :

On considère les points A et B dans un plan $\mathcal{P}$ tels que $AB = 6\text{cm}$ et I milieu $[AB]$. On note par $\mathcal{T}_k$ l'ensemble des points N du plan tel que $NA^2 - NB^2 = k$

a°) Déterminer et représenter $\mathcal{T}_k$ pour $k = -18$

b°) Caractériser géométriquement $\mathcal{T}_0$

Exemple 3 :

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O ; i, j) on donne les points A(5 ; 5) ; B(-3 ; 1) C(2 ; -4).

a°) Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tel que $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = -4$

b°) Déterminer (E') des points N du plan tel que $\vec{NA} \cdot \vec{NB} = \vec{CA} \cdot \vec{CB}$

2- Etude des applications ponctuelles

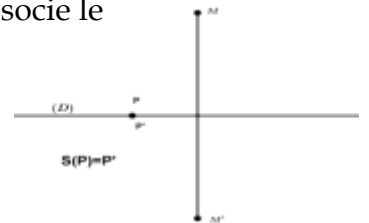
2-1 Symétrie orthogonale

2-1-1 Définition :

Soit (D) une droite du plan. On appelle symétrie orthogonale d'axe

(D) l'application S du plan $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M du plan associe le point M' tel que :

- Si $M \in (D)$ alors $M' = M$ (le point M est invariant par la symétrie orthogonale d'axe (D))
- Si $M \notin (D)$ alors (D) est la médiatrice du segment $[MM']$



2-1-2 Expression analytique d'une symétrie orthogonale

$I \in (D)$ et soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de (D) tel que $\vec{MM'}$ et $\vec{u}$ soit orthogonaux c'est - à - dire $\vec{MM'} \cdot \vec{u} = 0$

Activité :

Dans le plan muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Soit (D) une droite d'équation $2x - y + 1 = 0$. Trouver l'expression analytique de la symétrie d'axe (D)

Réponse :

Soit I milieu du $[MM']$ alors $I \left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2} \right)$

$$I \in (D) \Leftrightarrow 2 \left(\frac{x+x'}{2} \right) - \frac{y+y'}{2} + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x' - y' = -2x + y - 2 \quad (1)$$

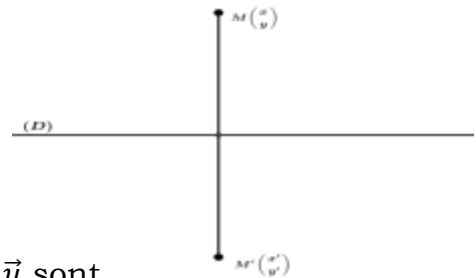
Soit $\vec{u}(1; 2)$ un vecteur directeur de (D) ; $\vec{MM'}$ et $\vec{u}$ sont

orthogonaux alors on a $\vec{MM'} \cdot \vec{u} = 0$

$$\vec{MM'} \cdot \vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'-x \\ y'-y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x' + 2y' = x + 2y \quad (2)$$

$$\begin{cases} 2x' - y' = -2x + y - 2 \\ x' + 2y' = x + 2y \end{cases} \Rightarrow x' = \frac{1}{5}(-3x + 4y - 4) \text{ et } y' = \frac{1}{5}(4x + 3y + 2)$$

$$S: \begin{cases} x' = \frac{1}{5}(-3x + 4y - 4) \\ y' = \frac{1}{5}(4x + 3y + 2) \end{cases}$$



2-2 Projection orthogonale

2-2-1 Définition 1

Soit (D) une droite du plan, on appelle **projection orthogonale** sur (D) toute application affine du plan $\mathcal{P}$ qui à tout point M associe le point M' tel que :

- Si $M \notin (D)$ alors le vecteur $\vec{MM'}$ est normal à (D) et $M' \in (D)$

- Si $M \in (D)$ alors $M = M'$

Définition de la projection sur (D) parallèlement à un axe (D')

Soit (D) et (D') deux droites non parallèles. On appelle projection sur (D) parallèlement à (D') l'application p du plan $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M associe le point M' tel que :

- Si $M' \in (D)$ et le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est colinéaire à $\vec{u}$ ($\vec{u} \in (D')$)
- Si $M \notin (D)$ alors (MM') est parallèle à (D') .

2-2-2 Expression analytique de la projection

$M' \in (D)$ $\overrightarrow{MM'} \perp \vec{u}$ où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (D)

Activité :

On considère la droite (D) d'équation cartésienne $x - 3y - 5 = 0$. Trouver l'expression analytique de la projection orthogonale d'axe (D) .

Réponse :

Soit $M(x; y)$ et $M'(x'; y') \in (D) \Leftrightarrow x' - 3y' = 5$ (1)

Soit $\vec{u}(3; 1)$ un vecteur directeur de (D) alors $\overrightarrow{MM'} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u} = 0$

$$\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 3x' + y' = 3x + y \quad (2)$$

$\begin{cases} x' - 3y' = 5 \\ 3x' + y' = 3x + y \end{cases}$ donc on obtient l'expression de la projection p définie par

$$p: \begin{cases} x' = \frac{1}{10}(9x + 3y + 5) \\ y' = \frac{1}{10}(3x + y - 15) \end{cases}$$

Application :

On donne deux droites d'équations cartésiennes $(D): x + y - 3 = 0$ et $(D'): 2x - 3y + 1 = 0$. Soit p la projection de (D) parallèlement à (D') .

Réponse :

Soit $M(x; y)$ et $M'(x'; y')$ et $\vec{u}(3; 2)$ un vecteur directeur de (D')

$p(M) = M' \Leftrightarrow M' \in (D)$ et $\overrightarrow{MM'}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

$$M' \in (D) \Rightarrow x' + y' - 3 = 0$$

$\overrightarrow{MM'}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires lorsque $\det(\overrightarrow{MM'}, \vec{u}) = 2(x' - x) - 3(y' - y) = 0$

$$\begin{cases} x' + y' = 3 \\ 2x' - 3y' = 2x - 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{5}(2x - 3y + 9) \\ y' = \frac{1}{5}(-2x + 3y + 6) \end{cases}$$

2-3 Rotation

2-3-1 Définition

Etant donnée un point O du plan et un angle orienté α , on appelle rotation de centre O et d'angle α l'application $r: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ qui à tout point M associe le point M' telles que :

- Si $M = O$ alors $M' = O$
- Si $M \neq O$ alors $OM = OM'$ et $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) = \alpha$

Remarque :

- La rotation d'angle nul de centre O est l'unité ou l'identité.
- La rotation de centre O et d'angle π est la symétrie centrale par rapport à O .

Exemple :

Soit ABC un triangle quelconque et O un point du plan. Construire les images A'B'C' par la rotation de centre O et d'angle orienté α .

a) $\alpha = \frac{\pi}{4}$ b) $\alpha = -\frac{5\pi}{3}$ c) $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ d) $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

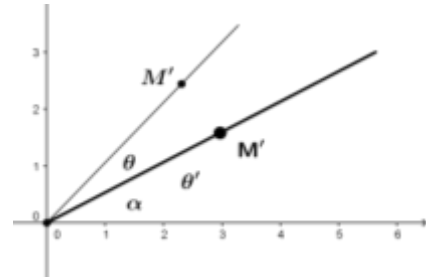
2-3-2 Expression analytique de la rotation

Activité :

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé et r la rotation de centre O et d'angle $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

a) Construire l'image du point $M(x; y)$ par la rotation r . Noté $M'(x'; y')$.

b) Soit $\theta = \text{mes}(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$. Déterminer les coordonnées de M en fonction de θ puis les coordonnées de M' en fonction des angles θ et $\frac{\pi}{3}$.



c) Dédurre l'expression analytique.

Synthèse :

Soit M un point du plan $(x; y)$ ses coordonnées cartésiennes et (ρ, θ) ces coordonnées polaires et M' image de M par la rotation de centre O

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} x' = \rho' \cos \theta' \\ y' = \rho' \sin \theta' \end{cases}$$

$OM = OM'$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha$ alors $\rho = \rho'$ et $\alpha = \theta' - \theta \Rightarrow \theta' = \alpha + \theta$

$$\begin{cases} x' = \rho' \cos \theta' \\ y' = \rho' \sin \theta' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \rho \cos(\alpha + \theta) \\ y' = \rho \sin(\alpha + \theta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \rho \cos \alpha \cos \theta - \rho \sin \alpha \sin \theta \\ y' = \rho \sin \alpha \cos \theta + \rho \cos \alpha \sin \theta \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases} \text{ est l'expression analytique de la rotation}$$

Exemple :

2-4 Définition d'une application linéaire

Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs du plan $\mathcal{P}$. On appelle application linéaire de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$; toute application vectorielle φ de $\mathcal{V}$ telle que :

- $\forall \vec{u} \in \mathcal{V} \text{ et } \forall \vec{v} \in \mathcal{V} \quad \varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$
- $\forall \vec{u} \in \mathcal{V} \text{ et } \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \varphi(\alpha \vec{u}) = \alpha \varphi(\vec{u})$

Application :

Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs du plan $\mathcal{P}$ et une application

$$\varphi: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$$

$$\vec{u} \mapsto \varphi(\vec{u}) = -2\vec{u}. \text{ Montrer que } \varphi \text{ est une application linéaire.}$$

Théorème :

Une application vectorielle φ de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$ est linéaire si et seulement si

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{V}^2 \text{ et } \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2; \varphi(\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) = \alpha \varphi(\vec{u}) + \beta \varphi(\vec{v})$$

2-5 Définition de la matrice d'une application linéaire associé à une application ponctuelle

→ L'expression analytique d'une symétrie orthogonale est

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases} \text{ donc sa matrice de l'application linéaire associée est}$$

$$M_\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \text{ et son déterminant est } \det M_\varphi = ab' - a'b$$

→ L'expression analytique d'une projection orthogonale est

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = a'x + b'y + c' \end{cases}$$
 donc sa matrice de l'application linéaire associée est

$$M_\varphi \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$$
 et son déterminant est $\det M_\varphi = ab' - a'b$

→ L'expression analytique d'une rotation est : $\begin{cases} x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha \\ y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases}$ donc
sa matrice de l'application linéaire associée est $M_\varphi \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$
Son déterminant est $\det M_\varphi = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

Application :

Utiliser les expressions des applications précédemment trouvées pour donner leurs matrices associées et le déterminant de ces matrices.

Rappel sur la translation et l'homothétie

→ **Translation :**

Définition : On appelle translation de vecteur $\vec{u}$ l'application notée $t_{\vec{u}}$ de $\mathcal{P}$ dans lui-même qui à tout point M associe le point M' telle que $\vec{u} = \overrightarrow{MM'}$

Notation : $t_{\vec{u}} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$

$$M \mapsto M' = t_{\vec{u}}(M) \text{ donc } t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$

Points invariants par une translation

- Si $\vec{u} = 0$ alors tout point est invariant par $t_{\vec{u}}$
- Si $\vec{u} \neq 0$ alors $t_{\vec{u}}$ n'admet pas de points invariants.

Expression analytique d'une translation :

On considère un repère orthonormé $(O; i, j)$

3- Etude des isométries

3-1 Définition :

On appelle isométrie du plan toute application du plan qui conserve la distance c'est-à-dire soit f une application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point M associe $f(M) = M'$. Si M et N sont deux points du plan tels que

$$f(M) = M' \text{ et } f(N) = N' \text{ alors } d(f(M), f(N)) = d(M, N)$$

Exemple :

Soit f une application définie par $\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 1 \end{cases}$. Montrer que f est une isométrie