

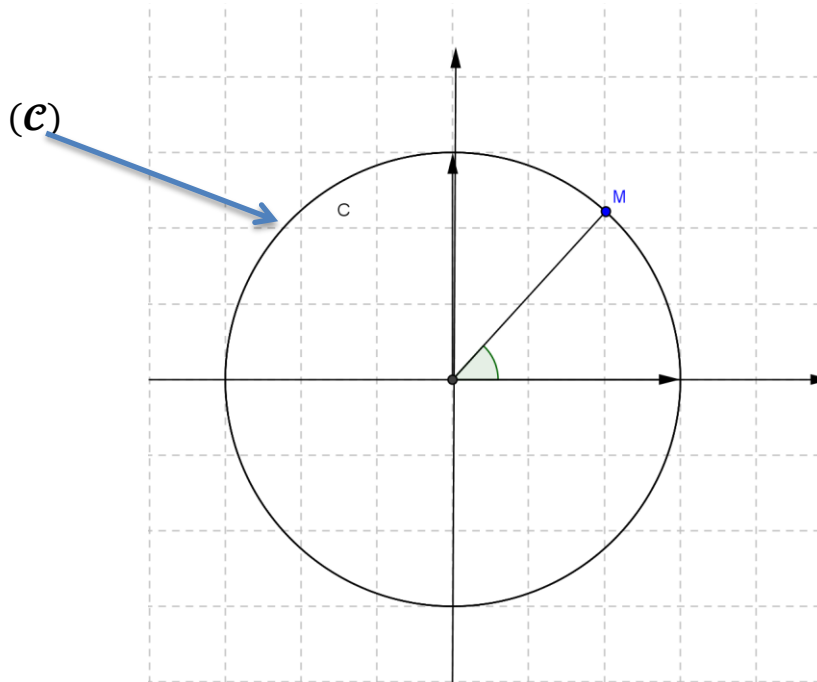
Module1 : TRIGONOMETRIE

I- Etudes des angles orientés

1) Détermination et représentation d'un angle orienté

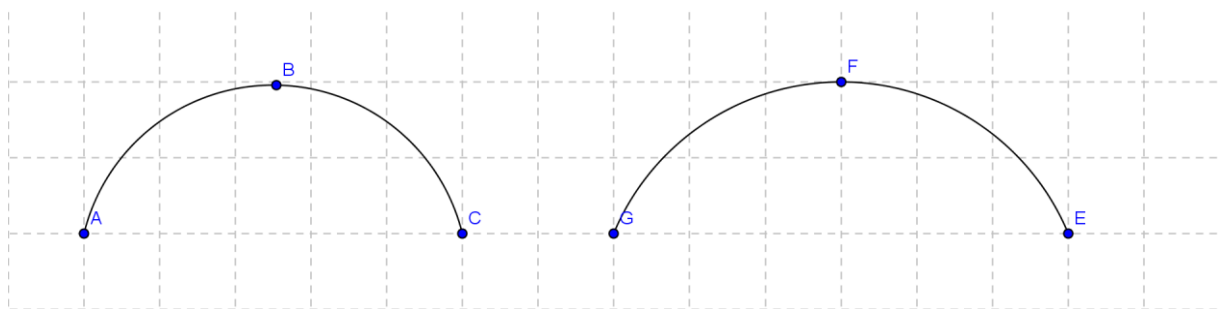
a) Cercle trigonométrique

On appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O et de rayon $r = 1$. On note peut noter $\mathcal{C}(O; r)$



b) Angle orienté

Considérons les points A, B, C, E, F, G



Que constatez - vous pour les triplets (A, B, C) et (E, F, G) ?

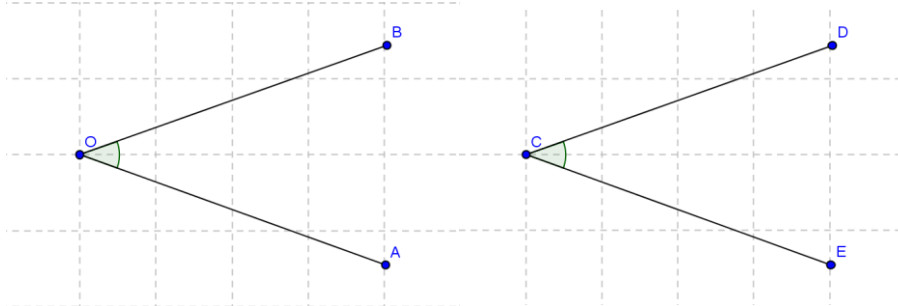
Synthèse

On constate que les triplets (A, B, C) et (E, F, G) sont de sens contraires.

- ✓ Le sens du triplet (A, B, C) est contraire au sens des aiguilles d'une montre donc on dit que son sens est négatif ou indirecte

- ✓ Le sens du triplet (E, F, G) a même sens que les aiguilles d'une montre alors on dit qu'il est de sens positif ou sens direct

Exemple : Donner le sens des angles $(\widehat{OA, OB})$ et $(\widehat{CD, CE})$ représentés ci-dessous.



NB:

- ✓ Le repère (o, i, j) est dit de sens direct ; par contre le repère (o, j, i) est de sens indirect
- ✓ Dans un triangle ABC est de sens direct or ACB est de sens indirect.

c) Mesure principale d'un angle orienté

Activité : Placer sur un cercle trigonométrique et à l'aide du rapporteur les mesures des angles 30° et 390° . Que constatez-vous ?

Synthèse :

Les deux mesures tombent sur le même point.

Soit α une mesure d'un angle orienté $(\widehat{OA, OB})$ en radian respectivement en degré, alors on écrit $(\widehat{OA, OB}) = \alpha \text{ rad}$ où $(\widehat{OA, OB}) = \alpha^\circ$

L'angle $(\widehat{OA, OB})$ comporte une infinité de mesure. Parmi toutes ces mesures il existe une et une seule notée θ qui appartient à l'intervalle $]-\pi; \pi]$ appelé mesure principale de $(\widehat{OA, OB})$ égale à θ . On peut noter $\text{mes}(\widehat{OA, OB}) = \theta$.

✓ Méthode de décomposition

Si x est une mesure en radian sa mesure principale notée θ est telle que $x = \theta + 2k\pi$ avec $\theta \in]-\pi; \pi]$ et $k \in \mathbb{Z}$. Alors θ est appelé la mesure principale.

Exemple : Déterminer en radian la mesure principale des angles $x = \frac{7\pi}{2}$ et $x = \frac{13\pi}{2}$

Correction

Posons $x = \frac{7\pi}{2} = \frac{8\pi - \pi}{2} = 4\pi - \frac{\pi}{2}$ d'où $-\frac{\pi}{2}$ est la mesure principale de x

✓ Méthode générale

On utilise l'encadrement suivant $-\pi < x - 2k\pi \leq \pi$ afin de trouver la valeur du nombre entier relatif k pour remplacer dans $\theta = x - 2k\pi$

$$x = \frac{7\pi}{2} \text{ on a : } -\pi < \frac{7\pi}{2} - 2k\pi \leq \pi \Rightarrow \frac{5}{4} < k \leq \frac{9}{4} \Rightarrow k \approx 2. \text{ Donc on a : } \theta = -\frac{\pi}{2}$$

Détermination en degré de la mesure principale d'un angle orienté

Soit x une mesure en degré d'un angle orienté et θ sa mesure principale

($\theta \in]-180^\circ; 180^\circ]$).

✓ Si $x \in]-180^\circ; 180^\circ]$ alors $\theta = x$

✓ Si $x \notin]-180^\circ; 180^\circ]$ alors $\theta = x - 360k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque :

✓ Si x en degré est positif alors on peut effectuer une division euclidienne de x par 360. On obtient $x = 360^\circ q + r$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $0 < r < 360^\circ$.

Si $r < 180^\circ$ alors le reste devient la mesure principale ($r = \theta$)

Si $r \geq 180^\circ$ alors $x = 360^\circ q + r + 360^\circ - 360^\circ = 360^\circ(q + 1) + (r - 360^\circ)$;

Si $(r - 360^\circ) \in]-180^\circ; 180^\circ]$ alors $\theta = r - 360^\circ$

✓ Si x est négatif et non multiple de 180° , alors on applique la méthode précédente à $(-x)$ en remarquant que $-x = 360k + \theta$ avec $\theta \in]-180^\circ; 180^\circ]$.

Exemple : Trouver la mesure principale des angles $\alpha = \frac{2009\pi}{3}$; $\alpha = 3715^\circ$; $\alpha = 2796^\circ$.

d) Comment placer sur un cercle trigonométrique le point image des angles orientés

Activité :

Placer sur le cercle trigonométrique le point image des angles orientés suivants :

$$\frac{7\pi}{2}rd; \frac{\pi}{2}rd; \frac{2\pi}{3}rd; \frac{-5\pi}{2}; -\frac{3\pi}{4}$$

2) Opération sur les angles orientés

Activité : Déterminer la somme et la différence de ses angles orientés

$$\text{a) } \frac{2\pi}{3} \text{ et } \frac{\pi}{2} \quad \text{b) } -\frac{\pi}{5} \text{ et } \frac{3\pi}{4} \quad \text{c) } 35^\circ \text{ et } \frac{2\pi}{3} \quad \text{d) } 400\text{gr et } 120^\circ$$

II- Détermination des rapports trigonométriques d'angles orientés

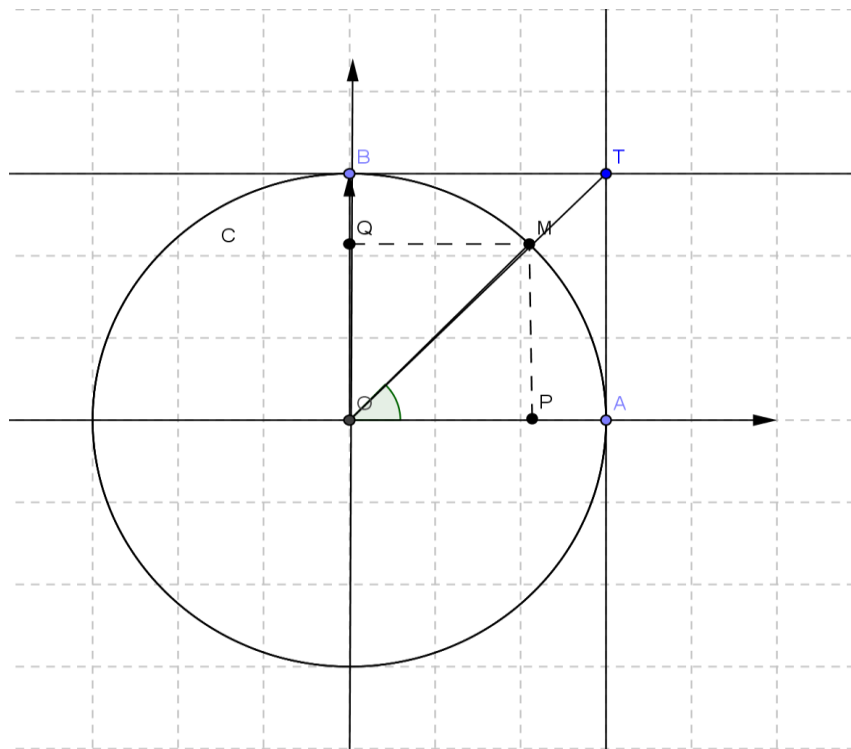
1) Définition des fonctions sinus cosinus tangente et cotangente à partir du cercle trigonométrique

Considérons le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1 ci - dessous : On a : $\cos x = \overline{OP}$

$$\sin x = \overline{OQ}$$

$$\tan x = \overline{AT}$$

$$\cot x = \overline{BT}$$



NB : $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ et $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$

Ainsi la fonction sinus est définie par $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1]$

$$x \mapsto \sin \alpha$$

La fonction cosinus définie par

$$f: \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1]$$

$$x \mapsto \cos \alpha$$

La fonction tangente est définie par : $f: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \tan \alpha$$

La fonction cotangente es définie par : $f: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \cotan \alpha$$

Remarque :

- Le sinus d'un angle situé dans le quadrant I ou II est positif et négatif dans le quadrant III ou IV
- Le cosinus d'un angle situé dans le quadrant I ou II est positif et négatif dans le quadrant II ou IV.

2) Détermination des rapports trigonométriques des angles associés

Relation entre les images de : θ et $-\theta$; $\pi - \theta$ et θ ; $\frac{\pi}{2} - \theta$ et θ ; $\pi + \theta$ et θ ; $\frac{\pi}{2} + \theta$ et θ

$$\cos(\theta) = \cos(-\theta)$$

$$-\sin(\theta) = \sin(-\theta)$$

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta) \quad \text{tg}(\pi + \theta) = \text{tg}(\theta)$$

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta) \quad \text{cotg}(\pi + \theta) = \text{cotg}(\theta)$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta) \quad \text{tg}(\pi - \theta) = -\text{tg}(\theta)$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta) \quad \text{cotg}(\pi - \theta) = -\text{cotg}(\theta)$$

Remarque : Deux angles sont supplémentaires si leurs sommes fait 180° ou π rd

Deux angles supplémentaires ont même sinus et de cosinus opposés

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta) \quad \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{cotg}(\theta)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta) \quad \text{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{tg}(\theta)$$

Remarque : Deux angles sont dit complémentaires si leurs sommes fait 90° ou $\frac{\pi}{2}$ rd

Deux angles sont complémentaires si le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre.

III- Formules de transformation

Détermination des formules usuelles de transformation

Relation fondamentale de la trigonométrie : $\forall \theta \in \mathbb{R}; \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

1) Formules d'addition à partir du produit scalaire

On sait que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ et de plus sur le cercle $\vec{u}(\cos b; \sin b)$; $\vec{v}(\cos a; \sin a)$ donc

$$(\vec{u}, \vec{v}) = a - b. \text{D'une part } \vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \cos b \\ \sin b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos a \\ \sin a \end{pmatrix} = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b.$$

$$\text{D'autre part } \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(a - b) = \cos(a - b) \Rightarrow$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \quad \text{Ainsi on peut écrire que}$$

$$\cos(a + b) = \cos[a - (-b)] = \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$$

Exemple :

- a) Démontrer les relations suivantes : $tg(a + b) = \frac{tga+tg b}{1-tga.tg b}$ et $tg(a - b) = \frac{tga-tg b}{1+tga.tg b}$
- b) Exprimer $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$
- c) Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$; $\cos\frac{7\pi}{12}$ **et** $\sin\frac{7\pi}{12}$
- d) Démontrer ces égalités : i)
- i) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$
- ii) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$

2) Formule de duplication

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a$$

Posons $a = \frac{x}{2}$

$$\cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = -2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + 1 = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$$

3) Formules de transformation de produit en somme

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) - \cos(a - b)]$$

4) Formule de factorisation

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

IV- Résolution d'équations et d'inéquations trigonométrique sur $\mathbb{R}$

1) Résolution d'équations trigonométrique

- a) Equations de types $\cos x = a$ ($a \in \mathbb{R}; x \in \mathbb{R}$)

Si le réel $a \notin [-1; 1]$ alors pas de solution

Si le réel $a \in [-1; 1]$ alors $\cos x = a \Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha$ avec $(\cos \alpha = a)$, les solutions de l'équation sont : $\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$

NB : $\cos A = \cos B \Leftrightarrow \begin{cases} A = B + 2k\pi \\ A = -B + 2k\pi \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

b) Equation de types $\sin x = a$ avec $(a \in \mathbb{R}; x \in \mathbb{R})$

Si le réel $a \notin [-1; 1]$ alors pas de solution

Si le réel $a \in [-1; 1]$ alors l'équation $\sin x = a \Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha$ avec $(\sin \alpha = a)$ les solutions de l'équation sont $\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

NB : $\sin A = \sin B \Leftrightarrow \begin{cases} A = B + 2k\pi \\ A = \pi - B + 2k\pi \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

c) Equation de $\tan x = a$ ($a \in \mathbb{R}; x \in \mathbb{R}$)

Résoudre l'équation $\tan x = a \Leftrightarrow \tan x = \tan \alpha$ ($\tan \alpha = a$) revient à trouver les solutions de : $x = \alpha + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Exemple : résoudre dans $]-\pi; \pi]$ l'équation $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

NB : $\tan A = \tan B \Leftrightarrow A = B + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Remarque :

Pour résoudre une équation de types $\cos A = \sin B$ on peut procéder par transformation donc on a : $\cos A = \cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \sin B$

d) Equation de types : $a \cos x + b \sin x = c$

1^{ère} Méthode :

Pour résoudre une telle équation on peut calculer le réel strictement positif r tel que

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ donc il existe un réel θ tel que

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{r} \\ \sin \theta = \frac{b}{r} \end{cases} \Leftrightarrow r(\cos \theta \cos x + \sin \theta \sin x) = \frac{c}{r} \Leftrightarrow r \cos(x - \theta) = c$$

Donc résoudre une équation de la forme $a \cos x + b \sin x = c$ revient résoudre $r \cos(x - \theta) = c$ avec $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

i) $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 1$

ii) $\sqrt{2} \sin(2x) + \sqrt{2} \cos(2x) = \sqrt{3}$

2^{ème} Méthode :

On pose $X = \cos x$ et $Y = \sin x$. On résout le système $\begin{cases} aX + bY = c \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$. Après on remplace les X et Y pour trouver x et y

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

i) $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 1$

ii) $\sqrt{2} \sin(2x) + \sqrt{2} \cos(2x) = \sqrt{3}$

Evaluation :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

- a) $\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$
- b) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- c) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$
- d) $\tan\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = \tan x$
- e) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$
- f) $\sin^2 x - 5 \sin x + 6 = 0$
- g) $\cos^2 x + 2 \cos x - 3 = 0$

2) Résolution d'Inéquation trigonométrique

Activité :

- a) Résoudre l'inéquation $\cos x \leq \frac{1}{2}$ dans $[0; 2\pi]$
- b) Résoudre l'inéquation $\sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $]-\pi; \pi[$

Correction :

a) Résolvons l'inéquation $\cos x \leq \frac{1}{2}$ dans $[0; 2\pi]$ par le cercle trigonométrique
 Pour résoudre l'inéquation $\cos x \leq \frac{1}{2}$, traçons la droite $x = \frac{\pi}{3}$. On cherche x_0 dans $[0; 2\pi]$ tel que $\cos x_0 = \frac{1}{2}$. Les solutions dans $[0; 2\pi]$ sont les nombres de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$. L'ensemble des solutions est donc constitué des intervalles $\left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$ avec $k \in \mathbb{Z}$

b) Résolvons l'inéquation $\sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans $]-\pi; \pi[$ par le cercle trigonométrique
 Pour résoudre l'inéquation $\sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$, traçons la droite $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$. On cherche x_0 dans $]-\pi; \pi[$.

V- Représentation graphique des fonctions trigonométriques

1) Détermination de la période des fonctions sinus et cosinus

- ✓ La fonction cosinus noté $x \mapsto \cos x$ est périodique de période 2π c'est-à-dire $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$.

Donc on dit qu'elle est paire c'est - à - dire $\cos(-x) = \cos x$.

Il suffit de l'étudier sur l'intervalle $[0; \pi]$ où $[-\pi; \pi]$. De préférence sur $[-\pi; \pi]$

- ✓ La fonction sinus noté $x \mapsto \sin x$ est périodique de période 2π c'est-à-dire $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$.

Donc on dit qu'elle est impaire c'est - à - dire $\sin(-x) = -\sin x$. Il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur 2π c'est - à - dire $[0; 2\pi]$. Parfois il est préférable de choisir $[-\pi; \pi]$ par ce qu'elle est centré en zéro.

2) Détermination de la période des fonctions tangentes et cotangentes

- ✓ Pour tout réel x tel que $\cos x \neq 0$, on appelle tangente de x le nombre noté $\tan x$ et définie par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Donc la fonction tangente, notée $\tan$, est la fonction

$x \mapsto \tan x$ est périodique de période $(\tan(x + k\pi) = \tan x)$. De plus

$\tan(-x) = -\tan x$, donc on dit qu'elle est impaire. On peut l'étudier sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

✓ Pour tout réel x telque $\sin x \neq 0$, on appelle cotangente de x le nombre noté $\cotan x$ et définiie par $\cotan x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Donc la fonction cotangente, notée $\cotan$, est la fonction $x \mapsto \cotan x$ est périodique de période π ($\cotan (x + k\pi) = \cotan x$). De plus $\cotan (-x) = -\cotan x$ ce qui veut dire qu'elle est impaire. Donc on peut l'étudier sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

NB : La fonction tangente admet un centre de symétrie le point de $O(0)$

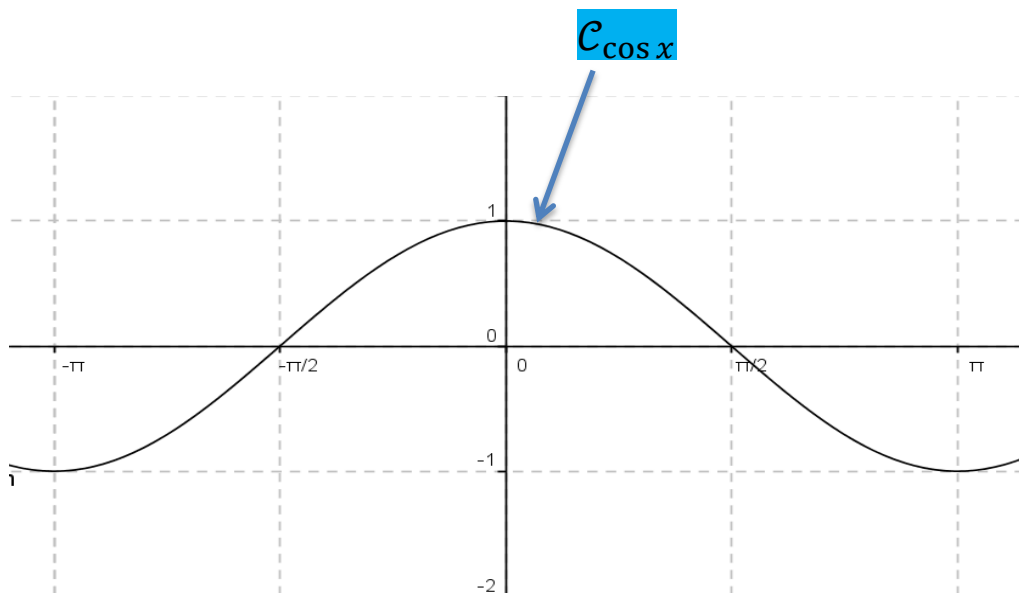
3) Représentation graphique des fonctions sinus et cosinus à partir d'une table de valeurs

a) Pour la fonction cosinus

Table de valeurs

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	-1	0	1	0	-1

Courbe représentative de la fonction cosinus

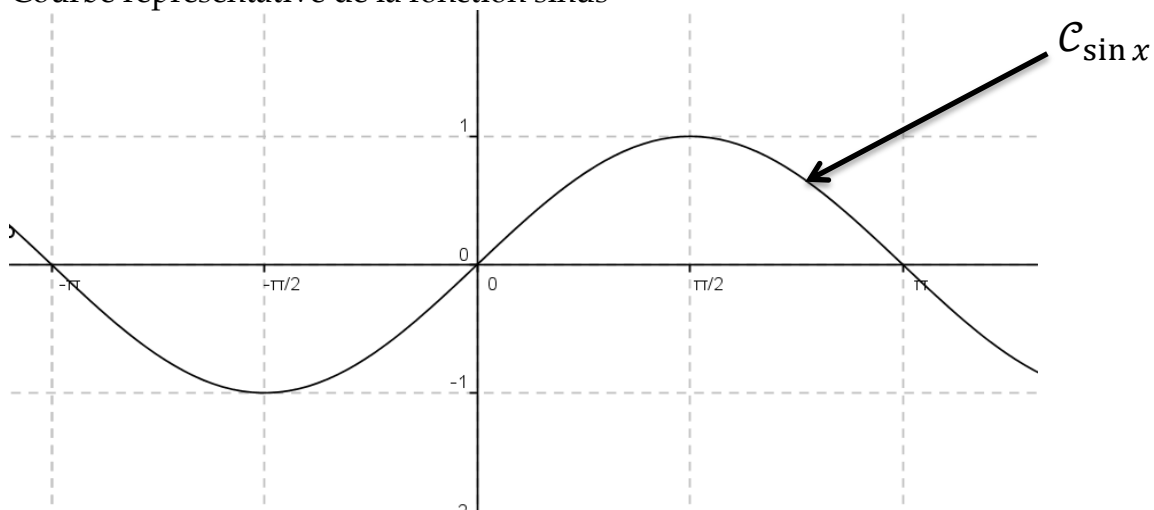


b) Pour la fonction sinus

Table de valeurs

x	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	1	0	-1	0	1	0	-1

Courbe représentative de la fonction sinus



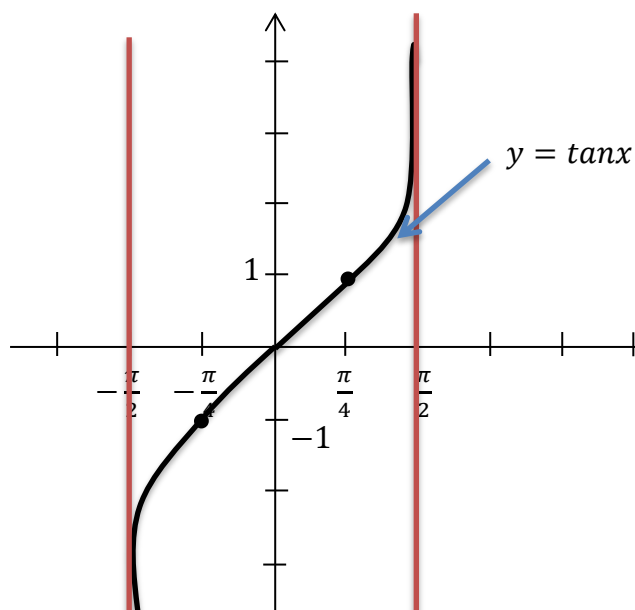
4) Représentation graphique des fonctions tangentes et cotangentes à partir d'une table de valeurs

a) Pour la fonction tangente

Table de valeurs

x	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$
$\tan x$	-1	0	1

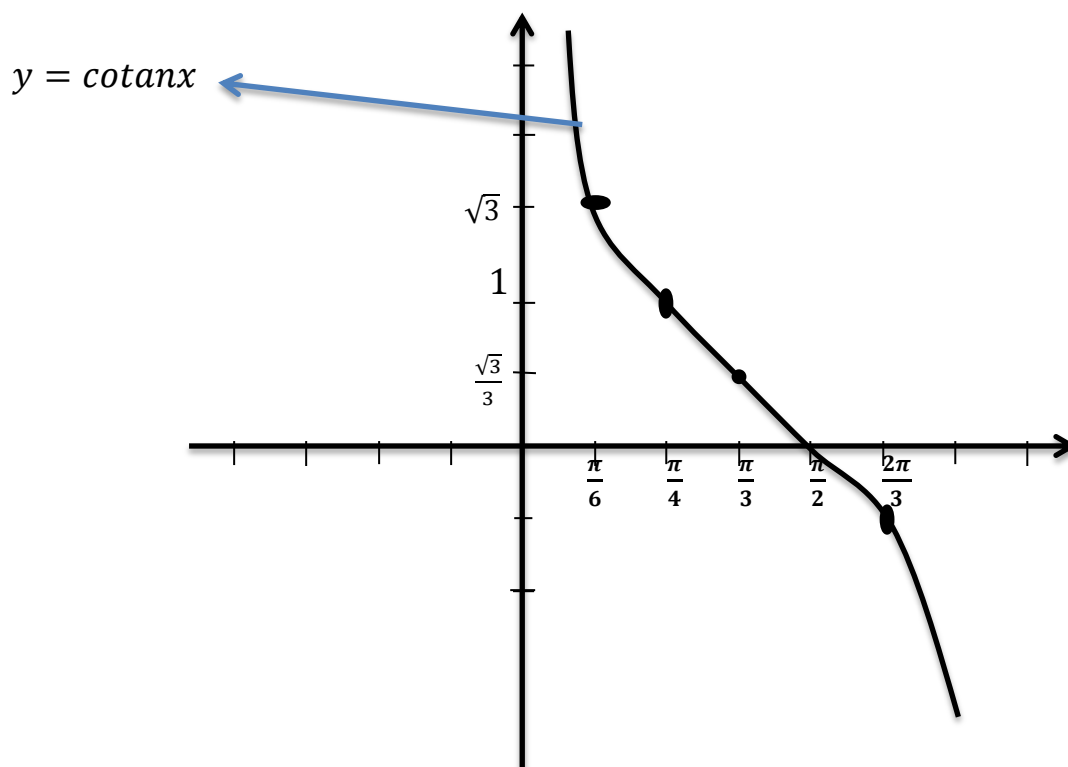
Courbe représentative de la fonction tangente



b) Pour la fonction cotangente

Table de valeurs

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cotan x$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0



Evaluation :