

TRIGONOMETRIE

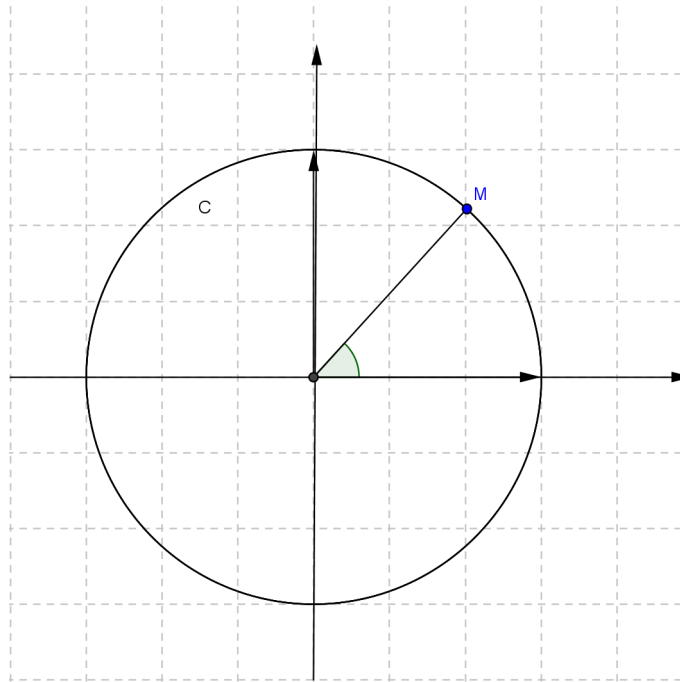
I- Etudes des angles orientés

1) Détermination et représentation d'un angle orienté

a) Cercle trigonométrique

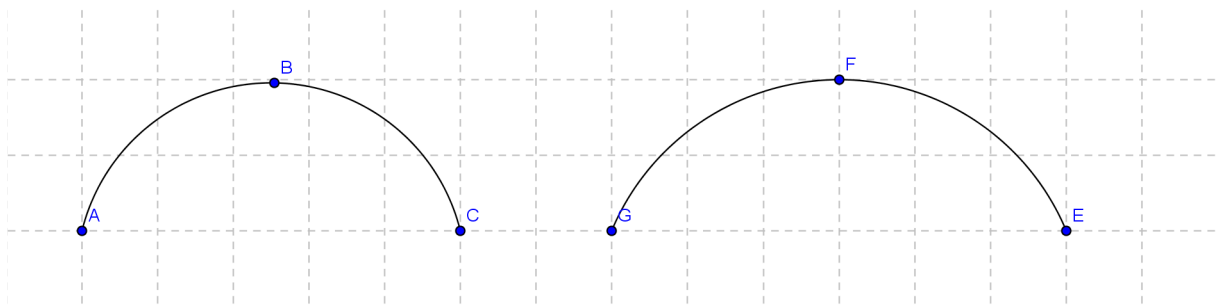
On appelle cercle trigonométrique le cercle de centre O et de rayon $r=1$.

On note peut noté $C(O;r)$



b) Angle orienté

Considérons les points A, B, C, E, F, G



Que constatez - vous pour les triplets (A, B, C) et (E, F, G)?

On constate que les triplets (A, B, C) et (E, F, G) sont de sens contraires.

- ✓ Le sens du triplet (A, B, C) est contraire au sens des aiguilles d'une montre donc on dit que son sens est négatif ou indirecte
- ✓ Le sens du triplet (E, F, G) a même sens que les aiguilles d'une montre alors on dit qu'il est de sens positif ou sens direct

Exemple : Donner le sens des angles $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ et $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE})$ représenter ci - dessous.



NB :

- ✓ Le repère (o, i, j) est dit de sens direct ; par contre le repère (o, j, i) est de sens indirect
- ✓ Dans un triangle ABC est de sens direct or ACB est de sens indirect.

c) Mesure principale d'un angle orienté

Activité : Sur un cercle trigonométrique et a l'aide du rapporteur placer les mesures des angles 30° et 390° . Que constatez - vous ?

Remarque :

Les deux mesures tombent sur le même point.

Soit α une mesure d'un angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ en radian respectivement en degré, alors on écrit $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \alpha \text{ rad}$ où $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \alpha^\circ$

L'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ comporte une infinité de mesure. Parmi toutes ces mesures il existe une et une seule noté θ qui appartient à l'intervalle $]-\pi; \pi]$ appelé mesure principale de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ égale à θ . On peut noter $\text{mes}(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \theta$.

- ✓ Méthode de décomposition

Si x est une mesure en radian sa mesure principale noté θ est telle que $x = \theta + 2k\pi$ avec $\theta \in]-\pi; \pi]$ et $k \in \mathbb{Z}$. Alors θ est appelé la mesure principale.

Exemple : Déterminer en radian la mesure principale des angles $x = \frac{7\pi}{2}$ et

$$x = \frac{13\pi}{2}$$

Correction : $x = \frac{7\pi}{2} = \frac{8\pi - \pi}{2} = 4\pi - \frac{\pi}{2}$ d'où $-\frac{\pi}{2}$ est la mesure principale de x

- ✓ Méthode générale

On utilise l'encadrement suivant $-\pi < x - 2k\pi \leq \pi$ afin de trouver la valeur du nombre entier relatif k pour remplacer dans $\theta = x - 2k\pi$

$$x = \frac{7\pi}{2} \text{ on a : } -\pi < \frac{7\pi}{2} - 2k\pi \leq \pi \implies \frac{5}{4} < k \leq \frac{9}{4} \implies k \approx 2. \text{ Donc on a : } \theta = -\frac{\pi}{2}$$

Détermination en degré de la mesure principale d'un angle orienté

Soit x une mesure en degré d'un angle orienté et θ sa mesure principale ($\theta \in]-180^\circ; 180^\circ]$).

- ✓ Si $x \in]-180^\circ; 180^\circ]$ alors $\theta = x$
- ✓ Si $x \notin]-180^\circ; 180^\circ]$ alors $\theta = x - 360k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque :

- ✓ Si x en degré est positif alors on peut effectuer une division euclidienne de x par 360. On obtient $x = 360^\circ q + r$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $0 < r < 360^\circ$.

Si $r < 180^\circ$ alors le reste devient la mesure principale ($r = \theta$)

Si $r \geq 180^\circ$ alors $x = 360^\circ q + r + 360^\circ - 360^\circ = 360^\circ(q+1) + (r-360^\circ)$;

Si $(r-360^\circ) \in]-180^\circ; 180^\circ]$ alors $\theta = r - 360^\circ$

- ✓ Si x est négatif et non multiple de 180° , alors on applique la méthode précédente à $(-x)$ en remarquant que $-x = 360k + \theta$ avec $\theta \in]-180^\circ; 180^\circ]$.

Exemple : Trouver la mesure principale des angles $\alpha = \frac{2009\pi}{3}$; $\alpha = 3715^\circ$;
 $\alpha = 2796^\circ$.

d) Comment placer sur un cercle trigonométrique le point image des angles orientés

Activité :

Placer sur le cercle trigonométrique le point image des angles orientés suivants : $\frac{7\pi}{2}rd$; $\frac{\pi}{2}rd$; $\frac{2\pi}{3}rd$; $-\frac{5\pi}{2}$; $-\frac{3\pi}{4}$

2) Opération sur les angles orientés

Activité : Déterminer la somme et la différence de ses angles orientés

- a) $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$ b) $-\frac{\pi}{5}$ et $\frac{3\pi}{4}$ c) 35° et $\frac{2\pi}{3}$ d) $400gr$
et 120°

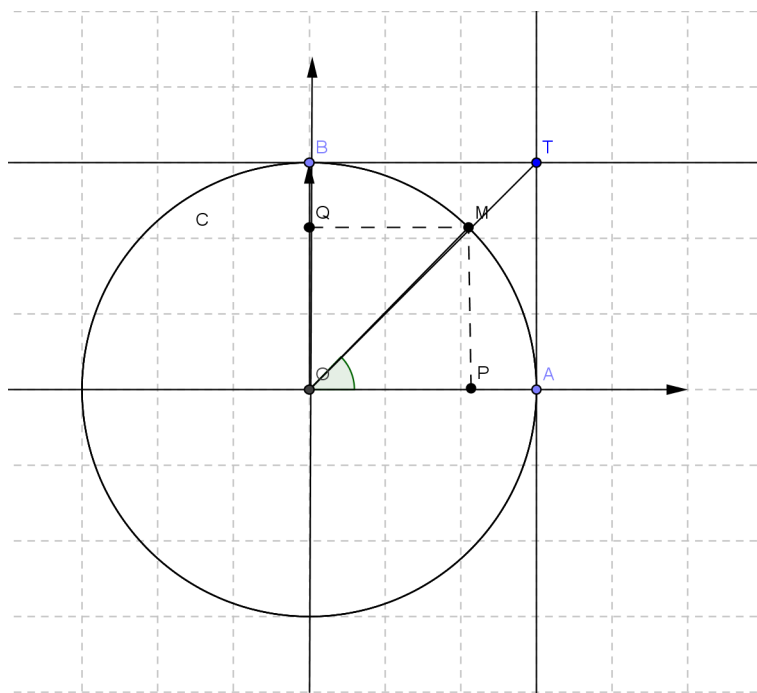
II- Détermination des rapports trigonométriques d'angles orientés

1) Définition des fonctions sinus cosinus tangente et cotangente à partir du cercle trigonométrique :

Considérons le cercle C de centre O et de rayon 1 ci-dessous

$$\text{On a : } \cos \alpha = \overline{OP}$$

$$\sin \alpha = \overline{OQ}$$



$$\tan \alpha = \overline{AT}$$

$$\cot \alpha = \overline{BT}$$

$$\text{NB : } -1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

$$-1 < \sin \alpha < 1$$

Ainsi la fonction sinus est définie par $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1]$

$$x \mapsto \sin x$$

La fonction cosinus définie par $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1; 1]$

$$x \mapsto \cos x$$

La fonction tangente est définie par : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \tan x$$

La fonction cotangente es définie par : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \cot x$$

Remarque :

- Si α augmente de $2k\pi$ le point M revient à sa position d'origine. On exprime ce fait en disant que les fonctions cosinus et sinus sont périodique et de période 2π

$$\forall x \in \mathbb{R}; \cos(x+2\pi) = \cos x \text{ et } \sin(x+2\pi) = \sin x$$

$$\cos(x+2k\pi) = \cos x \text{ et } \sin(x+2k\pi) = \sin x$$

- Le sinus d'un angle situé dans le quadrant I ou II est positif et négatif dans le quadrant III ou IV

- Le cosinus d'un angle situé dans le quadrant I ou II est positif et négatif dans le quadrant II ou IV.

2) Détermination des rapports trigonométriques des angles associés

Relation entre les images de : θ et $-\theta$; $\pi - \theta$ et θ ; $\frac{\pi}{2} - \theta$ et θ ; $\pi + \theta$ et θ ; $\frac{\pi}{2} + \theta$ et θ

$$\cos(\theta) = \cos(-\theta)$$

$$-\sin(\theta) = \sin(-\theta)$$

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta) \quad \text{tg}(\pi + \theta) = \text{tg}(\theta)$$

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta) \quad \text{cotg}(\pi + \theta) = \text{cotg}(\theta)$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta) \quad \text{tg}(\pi - \theta) = -\text{tg}(\theta)$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta) \quad \text{cotg}(\pi - \theta) = -\text{cotg}(\theta)$$

Remarque : Deux angles sont supplémentaires si leurs sommes fait 180° ou π rd

Deux angles supplémentaires ont même sinus et de cosinus opposés

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta) \quad \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{cotg}(\theta)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta) \quad \text{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \text{tg}(\theta)$$

Remarque : Deux angles sont dit complémentaires si leurs sommes fait 90° ou $\frac{\pi}{2}$ rd

Deux angles sont complémentaires si le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre.

III) Formules de transformation

Détermination des formules usuelles de transformation

Relation fondamentale de la trigonométrie : $\forall \theta \in \mathbb{R}; \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

1) Formules d'addition à partir du produit scalaire

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$$

Exemple :

a) Démontrer les relations suivantes : $tg(a+b) = \frac{tga + tgb}{1 - tga \cdot tgb}$ et

$$tg(a-b) = \frac{tga - tgb}{1 + tga \cdot tgb}$$

b) Exprimer $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$

c) Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$; $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$

d) Démontrer ces égalités : i)

$$i) \quad \cos x + \sqrt{3} \sin x = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

$$ii) \quad \cos x + \sqrt{3} \sin x = 2 \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$$

2) Formule de duplication

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

Posons $a = \frac{x}{2}$

$$\cos x = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = -2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + 1 = 2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$$

3) Formules de transformation de produit en somme

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

4) Formule de factorisation

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

IV) Résolution d'équations et d'inéquations trigonométrique sur $\mathbb{R}$

1) Résolution d'équations trigonométrique

a) Equations de types $\cos x = a$ ($a \in \mathbb{R}; x \in \mathbb{R}$)

Si le réel $a \notin [-1; 1]$ alors pas de solution

Si le réel $a \in [-1; 1]$ alors $\cos x = a \iff \cos x = \cos \alpha$ avec ($\cos \alpha = a$), les solutions de l'équations sont : $\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$$2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$$

b) Equation de types $\sin x = a$ avec ($a \in \mathbb{R}; x \in \mathbb{R}$)

Si le réel $a \notin [-1; 1]$ alors pas de solution

Si le réel $a \in [-1; 1]$ alors l'équation $\sin x = a \iff \sin x = \sin \alpha$ avec ($\sin \alpha = a$) les solutions de l'équation sont $\begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) Equation de $\tan x = a$ ($a \in \mathbb{R}; x \in \mathbb{R}$)

Résoudre l'équation $\tan x = a \iff \tan x = \tan \alpha$ ($\tan \alpha = a$) revient à trouver les solutions de : $x = \alpha + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Exemple : résoudre dans $]-\pi; \pi]$ l'équation $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Remarque :

Pour résoudre une équation de types $\cos A = \sin B$ on fait une

transformation donc on a : $\cos A = \cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \sin B$

d) Equation de types : $a \cos x + b \sin x = c$

Pour résoudre une telle équation on calcule le réel strictement positif $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ donc il existe un réel θ tel que

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{r} \\ \sin \theta = \frac{b}{r} \end{cases} \iff r(\cos \theta \cos x + \sin \theta \sin x) = \frac{c}{r} \iff r \cos(x - \theta) = c$$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\sqrt{3}\cos x + \sin x = 1 \text{ et } \sqrt{2}\sin(2x) + \sqrt{2}\cos(2x) = \sqrt{3}$$

2) Résolution d'Inéquation trigonométrique

Activité :

a) Résoudre l'inéquation $\cos x \leq \frac{1}{2}$ dans $[0; 2\pi]$

b) Résoudre $\forall x \in]-\pi; \pi[\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

Correction :

III- Représentation graphique des fonctions trigonométriques

1) Détermination de la période des fonctions **sinus** et **cosinus**

✓ La fonction cosinus est périodique de période 2π . Donc on dit qu'elle est paire.

Il suffit de l'étudier sur l'intervalle $[0; \pi]$ où $[-\pi; \pi]$.

✓ La fonction sinus est périodique de période 2π . Donc on dit qu'elle est impaire. Il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur 2π c'est - à - dire $[0; 2\pi]$. Parfois il est préférable de choisir $[-\pi; \pi]$ par ce qu'il est centré en zéro.

2) Détermination de la période des fonctions tangentes et cotangentes

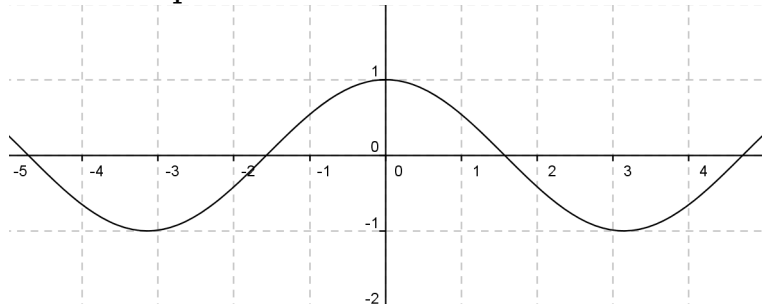
3) Représentation graphique des fonctions sinus et cosinus à partir d'une table de valeurs

a) Pour la fonction cosinus

Table de valeurs

X	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Cosx	-1	0	1	0	-1

Courbe représentative de la fonction cosinus

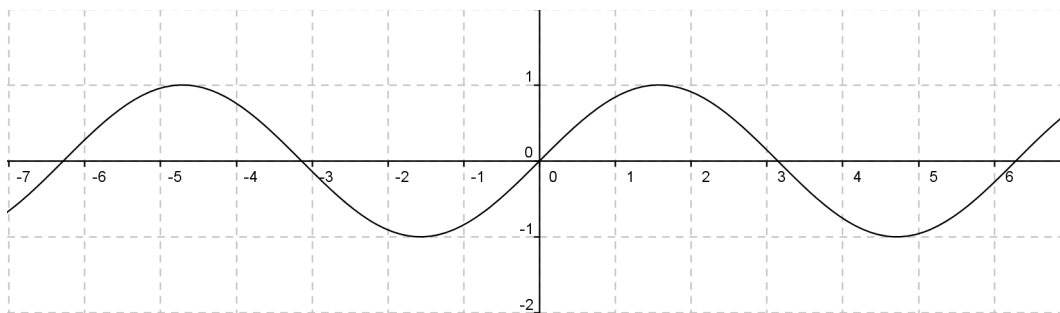


b) Pour la fonction sinus

Table de valeurs

X	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
Sinx	1	0	-1	0	1	0	-1

Courbe représentative de la fonction sinus



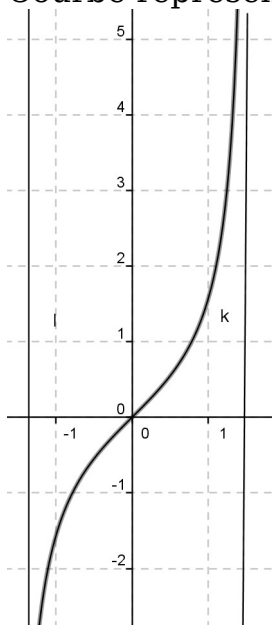
4) Représentation graphique des fonctions tangentes et cotangentes à partir d'une table de valeurs

a) Pour la fonction tangente

Table de valeurs

X	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$
Tanx	-1	0	1

Courbe représentative de la fonction tangente



b) Pour la fonction cotangente

Table de valeurs

X	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Cotanx	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

