

GEOMETRIE PLANE

EXERCICE 1 :

1. Détermine deux vecteurs normaux et deux vecteurs directeurs aux droites suivantes : $(d) : 3x - 2y - 4 = 0$; $(d') : y = -x + 2$
2. Détermine l'équation cartésienne de la droite (d_1) passant par $A(-1; 2)$ et d'un vecteur normal $\vec{n} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix} \right)$
3. Détermine l'équation cartésienne de la droite (d_2) passant par $B(1; 3)$ et d'un vecteur directeur $\vec{U} \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \right)$
4. Détermine l'équation cartésienne de la droite (d_3) passant par $C(1; 3)$ et parallèle à la droite (d_4) d'équation $x + 2y - 1 = 0$
5. Détermine l'équation cartésienne de la droite (d_5) passant par $D(3; 2)$ et perpendiculaire à la droite (d_6) d'équation $-x - y + 3 = 0$
6. Détermine une équation normale de la droite $(D) : \sqrt{3}x + y - 2 = 0$

EXERCICE 2 :

Soit A et B deux points distincts du plan $\mathcal{P}$
Détermine la ligne de niveau de l'application f dans chacun des cas suivants :

1. $M \mapsto \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 13$; $AB = 12$
2. $M \mapsto \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -36$; $AB = 12$
3. $M \mapsto MA^2 - MB^2 = 0$; $AB = 6$
4. $M \mapsto MA^2 + MB^2 = 18$; $AB = 6$
5. $M \mapsto 3MA^2 - 3MB^2 = -204$; $AB = 7$

EXERCICE 3 :

1. a. Trouve l'expression analytique de la translation de vecteur $\vec{U} \left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{2} \right)$
b. Dédus l'image A' du points $A(1; 2)$ par cette translation
2. Trouve l'expression analytique de la projection orthogonale d'axe $(\Delta) : -x + y - 1 = 0$
3. Trouve l'expression analytique de la projection d'axe $(\Delta) : -x + y - 1 = 0$ parallèlement à la droite (D) d'équation $x + 4y = 0$
4. Trouve l'expression analytique de l'homothétie h de centre $\Omega \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix} \right)$ et de rapport -2
5. Trouve l'expression analytique de la symétrie orthogonale d'axe $(D) : x - 2y = 0$
6. Trouve l'expression analytique de la symétrie orthogonale d'axe $(d) : x = \frac{1}{2}$

7. Trouve l'expression analytique de la symétrie d'axe $(\Delta) : x - 2y = 0$ parallèlement à la droite (D) d'équation $x + y + 1 = 0$
8. Trouve l'expression analytique de la rotation de centre $O \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$
9. Trouve l'expression analytique de la rotation de centre $\Omega \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$

EXERCICE 4 :

Soit P la projection orthogonale d'expression

$$\text{analytique} \begin{cases} x' = \frac{1}{10}(9x + 3y - 1) \\ y' = \frac{1}{10}(3x + y + 3) \end{cases}$$

1. Détermine les points invariants par la projection P
2. Détermine $P \circ P$

EXERCICE 5 :

On considère l'application affine f définie du plan $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point $M(x; y)$ associe le

$$\text{point } M'(x'; y') \text{ tel que } \begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y + 5 \end{cases}$$

1. f est-elle bijective ? Justifie la réponse
2. Détermine l'ensemble des points invariants par f
3. Détermine la nature et les éléments caractéristiques de f

EXERCICE 6 :

On considère l'application affine f définie du plan $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point $M(x; y)$ associe le point

$$M'(x'; y') \text{ tel que } \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 1 \\ y' = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + 2 \end{cases}$$

1. Détermine l'ensemble des points invariants par f
2. Détermine la matrice de l'application linéaire associée à f
3. Montre que f est une isométrie.
4. En-dédus la nature et les éléments caractéristiques de f
5. Détermine l'expression analytique de f^{-1}

EXERCICE 7 :

On considère l'application affine f définie du plan $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point $M(x; y)$ associe le point

$$M'(x'; y') \text{ tel que } \begin{cases} x' = -\frac{1}{3}(4x + 2y - 1) \\ y' = -\frac{1}{3}(-2x - y + 2) \end{cases}$$

1. Quel est la nature de f ?
2. Détermine les éléments caractéristique de f

EXERCICE 8 :

On considère l'application affine f définie du plan $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point $M(x; y)$ associe le point

$$M'(x'; y') \text{ tel que } \begin{cases} x' = x - \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} \\ y' = \sqrt{3}x + y - \sqrt{3} \end{cases}$$

1. f est-elle bijective? Justifie la réponse
2. Détermine l'ensemble des points invariants par f
3. Détermine la nature et les éléments caractéristiques de f

EXERCICE 9 :

On considère l'application affine f définie du plan $\mathcal{P}$ dans lui-même qui à tout point $M(x; y)$ associe

$$\text{le point } M'(x'; y') \text{ tel que } \begin{cases} x' = \frac{1}{3}(4x - 2y - 6) \\ y' = \frac{1}{3}(2x - y - 12) \end{cases}$$

1. Démontre que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a une direction fixe que l'on précisera
2. Démontre que $f \circ f = f$
3. a. Détermine l'ensemble des points invariants par f
b. En-déduis la nature et les éléments caractéristiques de f

EXERCICE 10 : Soit $\mathcal{P}$ le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ et soit f l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à tout point $M(x; y)$ fait correspondre le point $M'(x'; y')$ tel

$$\text{que } \begin{cases} x' = \frac{1}{5}(-3x - 4y + 3) \\ y' = \frac{1}{5}(-4x + 3y + 14) \end{cases}$$

1. Démontre que f est un antidéplacement.
2. a. Démontre qu'il existe une droite (Δ) et un vecteur $\vec{u}$ de la direction de (Δ) tels que $f = s \circ t = t \circ s$ où s est la symétrie orthogonale de base (Δ) et t la translation de vecteur $\vec{u}$
b. Détermine une équation de la droite (Δ) et les composantes du vecteur $\vec{u}$

EXERCICE 11 :

Soit P le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ et soit f l'application de P dans P qui à tout point $M(x; y)$ fait correspondre le point

$$M'(x'; y') \text{ tel que } \begin{cases} x' = 2x - 3y + 1 \\ y' = x - 2y + 2 \end{cases}$$

1. Démontre f est bijective puis détermine sa bijection réciproque f^{-1}
2. Détermine l'ensemble des points invariants par f
3. f est-elle un antidéplacement? Justifie la réponse
3. a. En-déduis qu'il existe une droite (Δ) et un vecteur $\vec{u}$ de la direction de (Δ) tels que $f = s \circ t = t \circ s$ où s est la symétrie orthogonale de base (Δ) et t la translation de vecteur $\vec{u}$
b. Quelle est donc la nature de f ?

- c. Détermine l'équation de la droite (Δ) et les composantes du vecteur $\vec{u}$

EXERCICE 12 :

Soit P le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ et soit f l'application de P dans P qui à tout point $M(x; y)$ fait correspondre le point

$$M'(x'; y') \text{ tel que } \begin{cases} x' = y + 1 \\ y' = x - 3 \end{cases}$$

1. f est-elle bijective? Justifie la réponse.
2. f est-elle un antidéplacement? Si oui précise sa nature ainsi que ses éléments caractéristiques.

EXERCICE 13 :

Dans le plan orienté, on considère le carré $ABCD$ direct de centre O

1. Détermine les éléments caractéristiques de la similitude directe S de centre A qui transforme B en O
2. Détermine le rapport et l'angle de la similitude directe S' qui transforme B en O et A en D

EXERCICE 14 :

Dans le plan orienté, $AFED$ est un carré de côté 1 tel que $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$

Soit l la longueur du segment $[AB]$ du rectangle $ABCD$. ($l > 1$)

1. On suppose qu'il existe une similitude directe f transformant respectivement les points A, B, C, D en B, C, E, F . Détermine la valeur de l
2. a. Quels sont l'angle et le rapport de la similitude f ?
b. Montre que le centre de la similitude f est le point d'intersection des droites (AC) et (EB) .
On pourra utiliser $f \circ f$

EXERCICE 15 :

Soit $ABCD$ un carré de sens direct et soit O son centre.

1. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Détermine $r(A), r(B)$ et $r(C)$
2. Soient I et J des points tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$
a. Montre que $r(I) = J$
b. Montre que le triangle OIJ est rectangle et isocèle

EXERCICE 16 :

1. Déterminez l'expression analytique de la translation le vecteur $\vec{U}(\frac{1}{2})$
2. a. Construisez un triangle ABC équilatéral puis un vecteur $\vec{U}$
b. Construisez les images A', B' et C' images respectives des points A, B et C par la translation de vecteur $\vec{U}$.
c. Déduisez la nature du triangle $A'B'C'$