

TRAVAUX DIRIGES SUR LA TRIGONOMETRIE

Angle orienté, mesure principale d'un angle

Exercice 1

ABC est un triangle rectangle en A , direct, tel que $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{6} [2\pi]$ et ACD est un triangle équilatéral direct.

1. Faites une figure.
2. Déterminez la mesure principale des angles suivant : $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$; $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AC})$; $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BA})$; $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$

Exercice 2

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{3}$.

1. Déduez-en que $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = -\frac{\pi}{3}$.
2. Justifie de même que $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = -\frac{\pi}{3}$.
3. On désigne maintenant par A' ; B' et C' les milieux respectifs de $[BC]$; $[AC]$; $[AB]$, déterminez une mesure de $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$; $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA'})$; $(\overrightarrow{CA'}, \overrightarrow{CB'})$; $(\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{C'A})$; $(\overrightarrow{B'A}, \overrightarrow{C'B})$.

Exercice 3

Soit C le cercle trigonométrique de centre O et d'origine I . Soit M , N et P trois points du cercle trigonométrique repérés respectivement par les réels $-\frac{9\pi}{4}$, $\frac{18\pi}{5}$ et $-\frac{47\pi}{6}$.

1. Donnez la mesure principale des angles de vecteurs : $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$; $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON})$; $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OP})$.
2. Déterminez la mesure principale des angles orientés : $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$; $(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP})$; $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP})$.

Exercice 4

Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Placez sur le cercle trigonométrique le point M et N , images respectives des nombres réels $\frac{373\pi}{6}$ et $-\frac{207\pi}{4}$.

Déterminez la mesure principale de chacun des angles orientés suivants :

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}), (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OI}), (\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OJ}), (\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OM})$$

Formules trigonométriques

Exercice 5

Simplifiez les expressions suivantes :

1. $\sin(x + \pi) + \cos(x - \pi) - \sin(x - 2\pi) + \cos(x + 5\pi)$.
2. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) - \sin\left(x + \frac{5\pi}{2}\right)$.
3. $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \frac{1}{\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} - \tan\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) - \frac{1}{\tan\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)}$.
4. $\cos(\pi + x) + \cos(\pi - x) + \cos(-x)$.
5. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$.

Exercice 6

Démontre les identités suivantes

- 1) $(\sin(x) + \cos(x))^2 = 1 + 2 \sin(x) \cos(x)$;
- 2) $\sin^4(x) + \cos^4(x) = 1 - 2 \sin^2(x) \cos^2(x)$;
- 3) $(\sin(x) - \cos(x))^2 = 1 - 2 \sin(x) \cos(x)$;
- 4) $\tan(x) = \frac{\sin(2x)}{1 + \cos(2x)}$;
- 5) $\frac{\sin(x) + \sin(5x)}{\cos(x) + \cos(5x)} = \tan(3x)$;
- 6) $\frac{\sin(3x) + \sin(7x)}{\cos(3x) - \cos(7x)} = \cotan(2x)$;
- 7) $\frac{\sin(x) + \sin(3x) + \sin(5x)}{\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x)} = \tan(3x)$;

- 8) $\frac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)} = \tan(y)$;
 - 9) $\frac{\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \cos 5x} = \tan 3x$;
 - 10) $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$;
 - 11) $2 \cos(a+b) \sin(a-b) = \sin 2a - \sin 2b$;
 - 12) $\tan 2a - \tan a = \frac{2 \sin a}{\cos a + \cos 3a}$;
 - 13) $\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}$;
- Déduis - en l'expression de $\tan a - \tan b$

Exercice 7

I Détermine l'angle α en radians, dans les cas suivants :

- 1) $\begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{2} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$; 2) $\begin{cases} \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}$; 3) $\begin{cases} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$; 4) $\begin{cases} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$;
- 5) $\begin{cases} \cos \alpha = -\frac{1}{2} \\ \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$; 6) $\begin{cases} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$; 7) $\begin{cases} \cos \alpha = -1 \\ \sin \alpha = 0 \end{cases}$; 8) $\begin{cases} \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$.

II En utilisant les formules de transformations ou d'addition calcule les expressions

1. $A = (\sin(x) - \sin(y))^2 + (\cos(x) - \cos(y))^2$ avec $x - y = \frac{\pi}{3}$;
2. $B = \sin(\frac{\pi}{2} - x) + \cos(\pi - x) + \tan(\frac{3\pi}{2} + x) + \cotan(-x)$;
3. $C = \cotan(-x) + \tan(\frac{\pi}{2} - x) + \cotan(2\pi - x) + \sin(\frac{\pi}{2} + x) - \cos(x)$;
4. $D = \cotan(2\pi - x) + \cos(-x) + \tan(2\pi + x) + \cotan(-x)$.

III Écris chaque expression en fonction de $\cos \alpha$, ou $\sin \alpha$, ou des deux

$$\begin{aligned} A &= \cos(\alpha - \pi) + \cos(\alpha + \pi); & B &= \sin(\alpha - 3\pi) + \sin(\alpha + 3\pi) \\ C &= \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2} + \pi\right) + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2} - \pi\right); & D &= \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2} - 3\pi\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \pi - \alpha\right) \end{aligned}$$

IV 1. Vérifie que $\cos^2 \frac{\pi}{12} = \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)^2$; $\sin^2 \frac{\pi}{12} = \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)^2$

Déduis - en $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$ (sachant qu'ils sont positifs).

2. En remarquant que $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$, calcule $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$. Calcule $\cos \frac{3\pi}{8}$ et $\sin \frac{3\pi}{8}$

V 1. Montre que , pour tout réel x , on a $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$.

2. Calcule $\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12}$ et $\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12}$.

Déduis - en que $\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}$

3. Démontre que pour tout élément x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, on a :

$$\sqrt{1 + \sin 4x} = |\sin 2x + \cos 2x|.$$

4. Calcule $\cos x$ et $\sin x$ dans chacun des cas :

(a) $\cos 2x = \frac{7}{25}$ et $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$;

(b) $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ et $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;

5. Calcule $\sin 2x$ et $\cos 2x$ dans chacun des cas :

(a) $\sin x = \frac{1}{3}$ et $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

$$(b) \cos x = -\frac{3}{5} \text{ et } x \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2} \right];$$

$$(c) \tan x = -3 \text{ et } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0 \right];$$

6. Calcule :

$$A = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8};$$

$$B = \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8} + \sin^2 \frac{7\pi}{8}.$$

(On pourra d'abord calculer $A + B$ et $A - B$)

VI Écrire $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$, $\sin 3x$ en fonction de $\sin x$. Déduis - en que : $\tan 3x = \frac{3 - \tan^2 x}{1 - 3 \tan^2 x}$.

Exercice 8

1. (a) Résous dans $\mathbb{R}^2$ le système :
$$\begin{cases} \sqrt{2}x - 2y = 0 \\ 2\sqrt{2}x + y = 3 \end{cases}$$

(b) En déduis dans $[0; \pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$ les solutions du système
$$\begin{cases} \sqrt{2} \sin x - 2 \cos y = 0 \\ 2\sqrt{2} \sin x + \cos y = 3 \end{cases}$$

2. x et y étant deux nombres réels de l'intervalle $[0, \pi]$ on considère le système d'équation (S)

$$\begin{cases} \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3} + 1}{4} \\ \sin x \sin y = \frac{\sqrt{3} - 1}{4} \end{cases}$$

(a) Démontre que le système (S) est équivalent au système suivant
$$\begin{cases} \cos(x + y) = \frac{1}{2} \\ \cos(x - y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

(b) Résous (S)

3. On considère le système d'équation (S) :
$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{6} \\ \sin x \cdot \sin y = -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

Démontre que :

(a) $\cos(x + y) - \cos(x - y) = -2 \sin x \sin y$

(b) Le système (S) est équivalent au système suivant : (S') :
$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{6} \\ \cos(x - y) = 0 \end{cases}$$

Résous (S')

4. Résous $(x; y) \in [0; 2\pi] \times [0; 2\pi]$ le système
$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{4} \\ \cos(x) \cos(y) = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Équations - Inéquations trigonométriques

Exercice 9

1. Détermine $\cos x$ sachant que :

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $x \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[$; b) $\sin x = -\frac{1}{4}$ et $x \in \left] -\frac{\pi}{2}; 0 \right[$;

2. Calcule $\cos 2x$ dans chacun des suivants :

a) $\cos x = -\frac{1}{3}$; b) $\cos x = \frac{4}{5}$; c) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. Calcule $\sin 2x$ dans chaque cas :

a) $\sin x = \frac{3}{5}$ et $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$; b) $\cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $x \in [\pi; 2\pi]$; c) $\sin x = -\frac{3}{5}$ et $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right]$

Exercice 10

Sachant que $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, quelles sont les valeurs possibles de $\cos \frac{\alpha}{2}$ et $\cos 3\alpha$.

Exercice 11

Résous les équations suivantes :

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; b) $\cos x = -\frac{1}{2}$; c) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

d) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$; e) $\cos\left(\frac{5\pi}{6} - 2x\right) = \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$; f) $2\cos^2 x - 1 = 0$ c) Résous dans $[0; 2\pi]$ les équations suivantes et place les points associés aux solutions sur le cercle trigonométrique

1) $\cos 5x \cos x - \sin 5x \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos 3x = \sin x$

Exercice 121. Étant donné deux réels a et b (non tous nuls), montre qu'il existe un réel α ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$) tel que : $a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \alpha)$ quelque soit le réel x .

2. Application

(a) Résous les équations suivantes :

$\cos x - \sin x = 1$; $\sqrt{3} \cos x + \sin x = \sqrt{2}$; $\cos x - \sqrt{3} \sin x = -1$.

(b) Montre que l'équation que $3 \cos x - 4 \sin x = 6$ est sans solution.3. Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\tan\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$; b) $\tan^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 3$; c) $2 \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$;

d) $\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

Exercice 131. Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes d'inconnue x puis place sur le cercle trigonométrique les points images des solutions.

a) $2 \cos(x) - 1 = 0$; b) $2 \sin(2x) - \sqrt{3} = 0$; c) $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right) = 0$;

d) Vérifie que : $4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 1)^2$ puis résous $-4 \sin^2(x) + 2(\sqrt{3} - 1) \cos(x) + 4 - \sqrt{3} = 0$

2. (a) Calcule $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$ et résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $4x^2 + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})x - \sqrt{6} = 0$.(b) Déduis-en la résolution dans $[0; 2\pi]$ de : $-4 \sin^2(y) + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cos(y) + \sqrt{6} = 0$.
Place les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.3. (a) Résous $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) + \sin(x) = -1$; $\cos(x) + \sin(x) = 3$.(b) Après avoir vérifié que : $\sin(2x) = (\sin(x) + \cos(x))^2 - 1$ résous les équations suivantes :
 $1 - \frac{1}{2} \sin(2x) + \sin(x) + \cos(x) = 0$ et $1 + \frac{1}{2} \sin(2x) + \sin(x) + \cos(x) = 0$ 4. (a) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos x + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$.(b) Résous de même : $\sin x + \sin(2x) + \sin(3x) = 0$ puis $\cos x + \cos(2x) + \cos(3x) + \cos(4x) = 0$.

5. Démontre que : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ sachant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$

Exercice 14

Résous les inéquations suivantes :

1) $x \in [0; 2\pi[$, $\cos(2x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $x \in [0; \pi[$, $\tan(x) \geq \sqrt{3}$;

3) $x \in \mathbb{R}$, $\sin\left(\frac{x}{3}\right) \geq \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$; 4) $x \in \mathbb{R}$, $2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 1$;

5) $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{3} \cos(x) + \sin(x) \geq 1$; 6) $x \in \mathbb{R}$, $4 \cos^2(x) - 2(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \cos(x) + \sqrt{6} \leq 0$.

7) Factorise $f(x)$ puis déduis-en une résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x) = 0$ dans les cas suivants :
 $f(x) = \sin(3x) + \sin(x) + 2 \sin(2x)$; $f(x) = \cos(3x) + \cos(x) + 2 \cos(2x)$.8) Résous dans D les inéquations suivantes et représente les images de leurs solutions sur le cercle trigonométrique ;

a) $\frac{1 - 2 \cos x}{2 \sin x - \sqrt{3}} \geq 0$, $D =]-\pi; \pi]$ b) $\frac{2 \cos 2x - 1}{1 + 2 \cos 2x} < 0$, $D = [0; 2\pi[$

Exercice 15

- (a) Vérifie que $3 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2$
 (b) Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2t^2 + (1 - \sqrt{2})t - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$.
 (c) Dédus de la question a) la solution de l'équation :

$$2\cos^2 x + (1 - \sqrt{2})\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$
- Résous alors dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$ l'inéquation :

$$2\cos^2 x + (1 - \sqrt{2})\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$$
- Représente sur le cercle trigonométrique les images des solutions de cette inéquation.

Exercice 16

- A. On considère le polynôme p , définie par $p(x) = 4x^3 - 2\sqrt{3}x^2 - 2x + \sqrt{3}$.
- Calcule $p(\frac{\sqrt{2}}{2})$ puis factorise $p(x)$ sous forme de produit de facteurs du premier degré.
 - Résous dans $\mathbb{R}$: a) $p(x) = 0$; b) $p(x) \leq 0$.
 - En déduis la résolution dans $\mathbb{R}$ de :
 (a) $4\cos^3 x - 2\sqrt{3}\cos^2 x - 2\cos x + \sqrt{3} = 0$.
 (b) $4\cos^3 x - 2\sqrt{3}\cos^2 x - 2\cos x + \sqrt{3} < 0$
- B. Soit la fonction f définie par $f(t) = \frac{p(\sin t)}{4\sin^2 t - 3}$ où p est le polynôme définie dans la partie A.
- Calcule $f(t)$
 - Vérifie si f est paire ou impaire.
 - Détermine D_f .
 - Simplifie $f(t)$.
 - Résous l'inéquation $f(t) \geq 0$ avec $t \in [-\pi; \pi]$

Exercice 17

- A, B, C sont les mesures des angles d'un triangle. Démontre que :
 a) $\cos\left(\frac{B+C}{2}\right) = \sin\frac{A}{2}$; b) $\tan\left(\frac{B+C}{2}\right) = \frac{1}{\tan\frac{A}{2}}$
- On pose : $A = a \sin x \cos y$; $B = a \sin x \sin y$; $C = a \cos x$
 Démontre que : $A^2 + B^2 + C^2 = a^2$.
- x et y sont deux éléments de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que : $\sin x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et $\cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
 (a) Vérifie que $\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$ et calcule $\cos x$.
 (b) Calcule $\sin y$ et en déduis la valeur de y .
 (c) Calcule $\cos(x+y)$, $\sin(x+y)$.
 (d) Calcule $\cos(x-y)$, $\sin(x-y)$ et en déduis la valeur de x

Exercice 18

- x étant un nombre réel, démontre que :
 $\cos 5x = \cos x(16\cos^4 x - 20\cos^2 x + 5)$ et $(1 - \cos x)(4\cos^2 x + 2\cos x - 1)^2 = 1 - \cos 5x$.
- Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos 5x = 1$.
- Dédus des questions précédentes les valeurs exactes de $\cos \frac{2\pi}{5}$; $\cos \frac{4\pi}{5}$ et $\cos \frac{\pi}{5}$.

Exercice 19

1. En remarquant que $\sin 5x = \sin(4x + x)$, démontre que :

$$\sin 5x = 16 \sin^5 x - 2 \sin^3 x + 5 \sin x$$

2. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sin 5x = 0$; vérifie que $\frac{\pi}{5}$ et $\frac{2\pi}{5}$ sont des solutions de cette équation.

3. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $16X^5 - 20X^3 + 5X = 0$

4. En déduis des questions précédentes les valeurs exactes de $\sin \frac{\pi}{5}$ et $\sin \frac{2\pi}{5}$

Exercice 20

1. Soit la fonction $f(x) = \frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{x + \cos 3x + \cos 5x}$

(a) Transforme $\sin x + \sin 5x$ et $\cos x + \cos 5x$.

(b) Résous dans $[0, 2\pi]$, l'équation (E) : $(1 + 2 \cos 2x) \cos 3x = 0$

(c) Déduis des questions précédentes l'ensemble de définition D_f de la fonction f et montre

$$\text{que } \forall x \in D_f, \text{ on a : } f(x) = \frac{\sin 3x}{\cos 3x}$$

(d) Résous dans $[0, 2\pi] \cap D_f$, l'inéquation : $f(x) < 1$.

2. On considère la fonction $f(x) = \cos^2 x + \sqrt{3} \cos x \cdot \sin x - 1$

(a) Montre que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2 \sin x \cdot \cos \left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

(b) Résous dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$.

(c) Déduis les solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans $[0; \pi]$.

(d) Résous dans $[0; \pi]$, l'inéquation $f(x) \leq 0$.

Exercice 21

1. Afin de doter son village en infrastructure sportive, une élite veut construire un stade de tennis.

A partir de la maquette le stade de tennis est délimité par les points $M(\cos x, \sin x)$ du plan

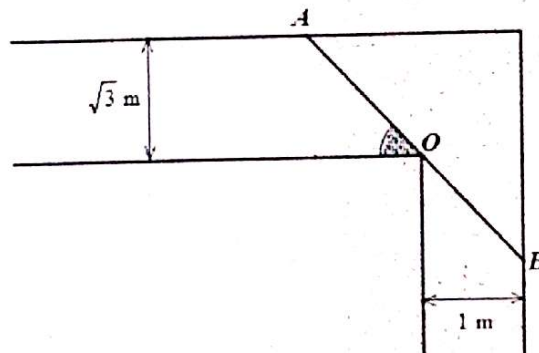
$(x \in]-\pi, \pi])$ tels que $\cos^2 x + \frac{\sqrt{2}-1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0$. Pour éviter que la pelouse soit boueuse, il sera recouvert d'une couche de béton d'épaisseur 15 cm. Le mètre cube de béton coûte 10000F. (prendre 100m^2 comme unité d'aire).

Tache :

Quel est le budget à prévoir pour la construction du stade de tennis?

2. Un couloir de largeur de $\sqrt{3}$ mètres, tourne à l'angle droit et sa largeur n'est plus alors que 1 mètre.

Sur la figure, une droite passe par le point O , fait avec l'un des murs un angle α et coupe deux autres murs en A et B



(a) Exprime en fonction de α les longueurs OA , OB et AB .

(b) On pose $AB = f(\alpha)$.

$$\text{Démontre que : } f(\alpha) = \frac{4 \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)}{\sin 2\alpha}$$

(c) Détermine α pour que :

i. $AB = 4$

ii. $OA = OB$