

FONCTIONS POLYNÔMES DU SECOND DEGRÉ

Classe : 11^{ème} Lettre & 11^{ème} SES

1. Définition :

On appelle fonction polynôme du second degré, toute fonction p de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
 $p(x) = ax^2 + bx + c$ (Avec a ; b et c des nombres réels tel que $a \neq 0$)

NB : Dans toute la suite le réel $a \neq 0$.

2. Forme canonique d'un polynôme du second degré:

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) un polynôme du second degré.

On appelle forme canonique de $p(x)$ toute expression de la forme

$$P(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$. On obtient ainsi: $p(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$

D'où la forme canonique du trinôme $ax^2 + bx + c$ est :

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \quad \text{ou encore} \quad ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

$$\text{avec : } \alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{\Delta}{4a}$$

Evaluation

Mettre sous forme canonique les expressions suivantes

a) $2x^2 - x + 4$ b) $-3x^2 + 4x - 1$ c) $5x^2 - 2x + 7$

3. Représentation graphique et variation d'un trinôme du second degré

On rappelle que la forme canonique du trinôme $ax^2 + bx + c$ est :

$$p(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

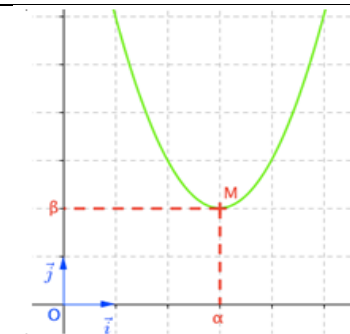
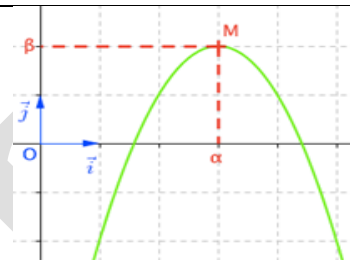
La forme canonique du trinôme $ax^2 + bx + c$ est utile pour tracer sa courbe représentative.

La courbe (C), représentant la fonction $P : x \rightarrow ax^2 + bx + c$ dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, est une parabole, **translaté** de la parabole $y = ax^2$.

Son sommet S a pour abscisse $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et pour ordonnée β .

Donc le sommet S a pour coordonnée $S(\alpha; \beta)$.

Suivant le signe de a , on obtient le tableau de variation de la fonction p :

Signe de a	Tableau de variation	Courbe représentative								
Pour $a > 0$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>α</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$p(x)$</td><td>$\searrow$</td><td>(β)</td><td>$\nearrow$</td></tr></table>	x	$-\infty$	α	$+\infty$	$p(x)$	$\searrow$	(β)	$\nearrow$	
x	$-\infty$	α	$+\infty$							
$p(x)$	$\searrow$	(β)	$\nearrow$							
Pour $a < 0$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>α</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$p(x)$</td><td>$\nearrow$</td><td>(β)</td><td>$\searrow$</td></tr></table>	x	$-\infty$	α	$+\infty$	$p(x)$	$\nearrow$	(β)	$\searrow$	
x	$-\infty$	α	$+\infty$							
$p(x)$	$\nearrow$	(β)	$\searrow$							

Propriété :

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$, avec $a \neq 0$.

- Si $a > 0$, f admet un minimum pour $x = \alpha$. Ce minimum est égal à β .
- Si $a < 0$, f admet un maximum pour $x = \alpha$. Ce maximum est égal à β .

Evaluation

Représente les polynômes suivants : a) $2x^2 - x + 4$ b) $-3x^2 + 4x - 1$ c) $5x^2 - 2x + 7$

4. Résolution de l'équation du second degré :

Définition : On appelle discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$, le nombre réel, noté Δ , égal à $b^2 - 4ac$.

Exemple :

Le discriminant de l'équation $3x^2 - 6x - 2 = 0$ est :

$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 36 + 24 = 60$. En effet, $a = 3$, $b = -6$ et $c = -2$.

Propriété : Soit Δ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution réelle.
- Si $\Delta = 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

5. Forme factorisée du trinôme $ax^2 + bx + c$

Propriété : Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta = 0$: Pour tout réel x , on a : $f(x) = a(x - x_0)^2$.

- Si $\Delta > 0$: Pour tout réel x , on a : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

- Admis -

Remarque : Si $\Delta < 0$, on n'a pas de forme factorisée de f .

Le Récapitulatif

$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Racines de : $ax^2 + bx + c = 0$	Pas de racine	Une racine double $= \frac{-b}{2a}$	$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
factorisation $ax^2 + bx + c$	Pas de facteur	$a(x - x_0)^2$	$a(x - x_1)(x - x_2)$

Evaluation :

1) Trouver les racines de chacune des polynômes du second degré

a) $2x^2 + 5x - 3 = 0$ b) $4x^2 + 20x + 25 = 0$ c) $x^2 - 4x + 16 = 0$, d) $4x^2 + 19x - 5$

b) $9x^2 - 6x + 1$

2) En déduire une factorisation de chacun

6. Signe d'un trinôme – Inéquation du second degré

Remarque préliminaire :

Pour une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$:

- si $a > 0$, sa représentation graphique est une parabole tournée vers le haut :



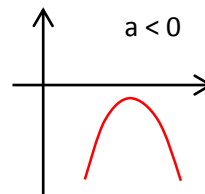
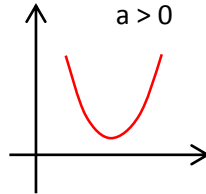
- si $a < 0$, sa représentation graphique est une parabole tournée vers le bas :



Propriété : Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$:

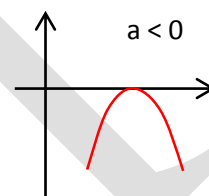
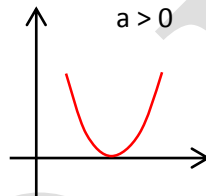
x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	



L'équation $f(x)=0$ n'a pas de solution donc la courbe de f ne traverse pas l'axe des abscisses.

- Si $\Delta = 0$:

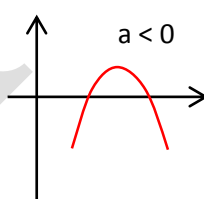
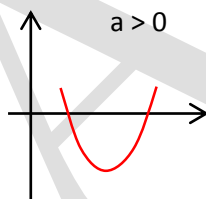
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	0	Signe de a



L'équation $f(x)=0$ a une solution unique donc la courbe de f admet son extremum sur l'axe des abscisses.

- Si $\Delta > 0$:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a



L'équation $f(x)=0$ a deux solutions donc la courbe de f traverse l'axe des abscisses en deux points.

Evaluation :

Etudier le signe des polynômes du second degré suivants :

a) $2x^2 + 5x - 3 = 0$ b) $4x^2 + 20x + 25 = 0$ c) $x^2 - 4x + 16 = 0$

7. Somme et produit des racines du second degré

Activité :

Soit l'équation du second degré : $15x^2 - 11x - 4 = 0$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ cette équation

Comparer la somme des solutions à $\frac{11}{15}$ et le produit des solutions à $\frac{-4}{15}$ puis justifier vos réponses.

Synthèse :

Théorème :

- Si l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions (racines) distinctes ou confondues leur somme $S = \frac{-b}{a}$ et le produit $P = \frac{c}{a}$
- Deux nombres réels ont pour somme S et pour produit P si et seulement si ils sont les solutions de l'équation : $x^2 - Sx + P = 0$.

Evaluation

Exercice 1 : Dans les cas suivants trouve les deux dont la somme et le produit sont donnés :

a) $S = 5$ et $P = 6$; b) $S = -1$ et $P = -2$; c) $S = P = 3$.

Exercice 2 : Déterminer les dimensions d'un champ rectangulaire dont le périmètre est 64m et l'aire est 240m².

Exercice 3 : L'aire d'un terrain rectangulaire est de 1971m². Le périmètre de ce terrain est de 200m. Calculer la longueur L et la largeur ℓ de ce terrain.