

APPLICATIONS DE LA DERIVATION

I. Application à l'étude des variations d'une fonction

Théorème : Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I .

- Si $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I .

- Si $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I .

- Admis -

Remarque :

Les propriétés réciproques restent vraies.

Méthode : Dresser le tableau de variations d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 5$.

1) Etudier les variations de f et dresser le tableau de variation.

2) Dans repère, représenter graphiquement la fonction f .

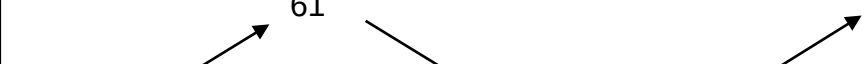
1) Pour tout x réel, on a : $f'(x) = 3x^2 + 9x - 12$.

Commençons par résoudre l'équation $f'(x) = 0$:

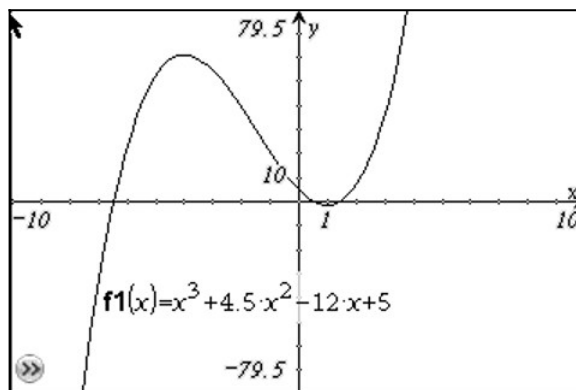
Le discriminant du trinôme $3x^2 + 9x - 12$ est égal à $\Delta = 9^2 - 4 \times 3 \times (-12) = 225$

L'équation possède deux solutions : $x_1 = \frac{-9 - \sqrt{225}}{2 \times 3} = -4$ et $x_2 = \frac{-9 + \sqrt{225}}{2 \times 3} = 1$

On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$\bigcirc$	$-$	$\bigcirc$	$+$
f					

2)



II. Extremum d'une fonction

Théorème : Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle ouvert I . Si la dérivée f' de f s'annule et change de signe en un réel c de I alors f admet un extremum en $x = c$.

- Admis -

Méthode : Rechercher un extremum

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 3x + 4$ admet-elle un extremum sur $\mathbb{R}$?

Pour tout x réel, on a : $f'(x) = 10x - 3$

Et : $f'(x) = 0$ pour $x = \frac{3}{10}$.

On dresse alors le tableau de variations :

x	$-\infty$	$\frac{3}{10}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	$\bigcirc$	+
f			

En effet : $f\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{71}{20}$.

La fonction f admet donc un minimum égal à $\frac{71}{20}$ en $x = \frac{3}{10}$.

III. Application à l'étude des variations d'une suite

Propriété : Soit une fonction f définie sur $[0; +\infty[$ et une suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$.

- Si f est croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$, alors la suite (u_n) est croissante.
- Si f est décroissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Démonstration :

- f est croissante sur $[0; +\infty[$ donc par définition d'une fonction croissante, on a pour tout entier n : comme $n+1 > n$, $f(n+1) \geq f(n)$ et donc $u_{n+1} \geq u_n$.
- Démonstration analogue pour la décroissance.

Méthode : Etudier les variations d'une suite à l'aide de la fonction associée

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on donne la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{1}{n+1}$.

Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

On considère la fonction associée f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

Ainsi $u_n = f(n)$.

Etudions les variations de f définie sur $[0; +\infty[$:

$$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}.$$

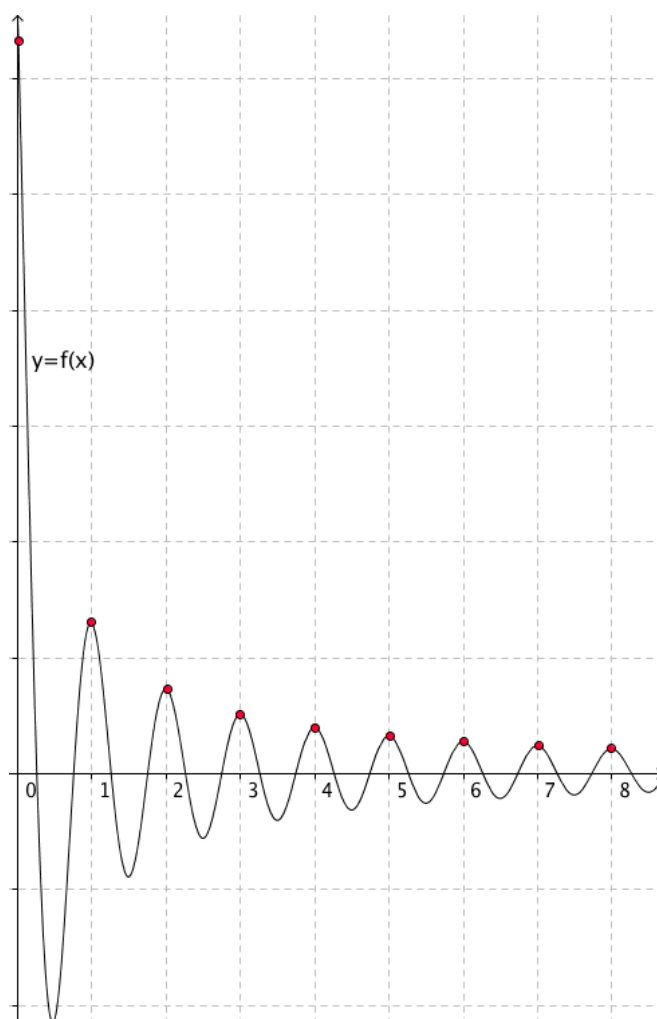
Pour tout x de $[0; +\infty[$, on a : $f'(x) < 0$.

Donc f est décroissante sur $[0; +\infty[$. On en déduit que (u_n) est décroissante.

Remarque :

La réciproque de la propriété énoncée plus haut est fausse.

La représentation suivante montre une suite décroissante alors que la fonction f n'est pas monotone.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.
www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales