

NOMBRE DERIVE

I. Limite en zéro d'une fonction

Exemples :

1) Soit la fonction f définie sur $] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{(x+1)^2 - 1}{x}$.

L'image de 0 par la fonction f n'existe pas. On s'intéresse cependant aux valeurs de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0.



x	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	...	0,001	0,01	0,1	0,5
$f(x)$	1,5	1,9	1,99	1,999	?	2,001	2,01	2,1	2,5

On constate que $f(x)$ se rapproche de 2 lorsque x se rapproche de 0.

On dit que la limite de f lorsque x tend vers 0 est égale à 2 et on note : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$.

2) Soit la fonction g définie sur $] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

A l'aide de la calculatrice, on constate que $g(x)$ devient de plus en plus grand lorsque x se rapproche de 0.

On dit que la limite de g lorsque x tend vers 0 est égale à $+\infty$ et on note :

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty.$$

II. Dérivabilité

1) Taux d'accroissement

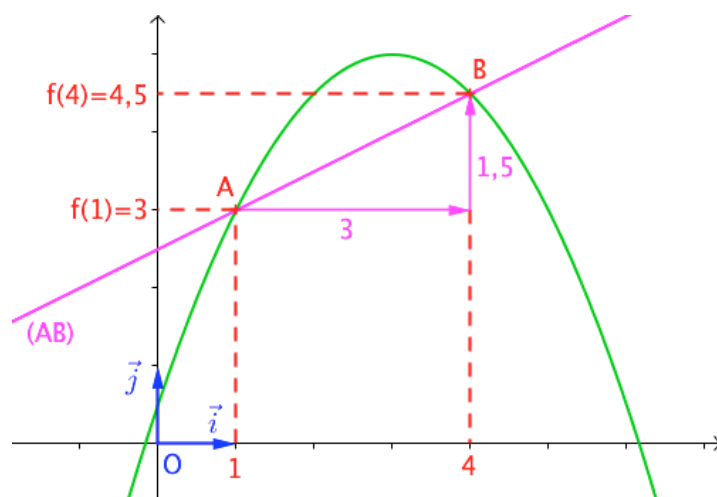
Exemple :

Soit une fonction f définie sur un intervalle I .

Soit A et B deux points de la courbe représentative de f d'abscisses respectives 1 et 4.

Le coefficient directeur de la droite (AB) est égal à : $\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{4,5 - 3}{4 - 1} = 0,5$.

Ce quotient est appelé le taux d'accroissement de f entre 1 et 4.



2) Application en économie :

On considère la fonction notée C où $C(q)$ représente le coût total de production de q unités.

On appelle coût marginal de la $q+1^{\text{e}}$ unité produite, noté $C_m(q)$, le coût supplémentaire induit par la production d'une unité supplémentaire.

C'est le taux d'accroissement de la fonction C entre q et $q+1$.

En effet, $\frac{C(q+1) - C(q)}{q+1 - q} = C(q+1) - C(q) = C_m(q)$.

Méthode : Calculer un taux d'accroissement

- 1) Soit la fonction carrée f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
 - a) Calculer le taux d'accroissement de f entre 2 et 3.
 - b) Soit h un réel non nul. Calculer le taux d'accroissement de f entre 2 et $2+h$.
- 2) On considère le coût de production C de q objets définie par $C(q) = q^2 + q$.
 - a) Calculer le coût marginal du 15^{e} objet.
 - b) Exprimer le coût marginal du q^{e} objet.

$$1) a) \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{3^2 - 2^2}{1} = 5$$

$$b) \frac{f(2+h) - f(2)}{2+h - 2} = \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} = \frac{4h + h^2}{h} = 4 + h$$

$$2) a) C_m(14) = C(15) - C(14) = 15^2 + 15 - (14^2 + 14) = 30$$

$$b) C_m(q-1) = C(q) - C(q-1) = q^2 + q - ((q-1)^2 + q - 1) = 2q$$

3) Fonction dérivable

Soit une fonction f définie sur un intervalle I .
 Soit un réel a appartenant à I .
 Soit A et M deux points de la courbe représentative de f d'abscisses respectives a et $a+h$, avec $h \neq 0$.

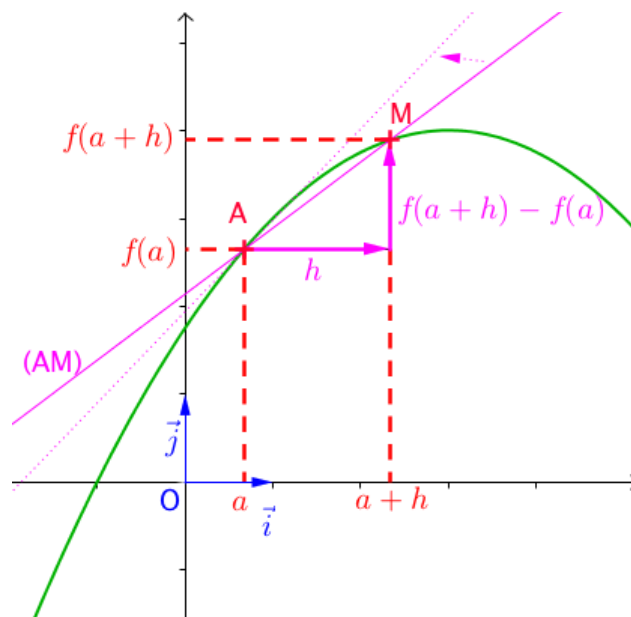
Le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$

est :
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{a+h - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Lorsque le point M se rapproche du point A , le taux d'accroissement est égal à la limite

de $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ lorsque h tend vers 0.

Ce taux s'appelle le nombre dérivé de f en a .



Définition : On dit que la fonction f est dérivable en a s'il existe un nombre réel L , tel

que :
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = L.$$

L est appelé le nombre dérivé de f en a et on le note $f'(a)$.

Méthode : Déterminer le nombre dérivé d'une fonction

Soit la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3$.

Déterminer le nombre dérivé de f en $x=1$.

On commence par calculer $\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ pour $h \neq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \frac{(1+h)^2 - 3 - (-2)}{h} \\ &= \frac{1+2h+h^2 - 3 + 2}{h} \\ &= \frac{2h+h^2}{h} = 2+h \end{aligned}$$

Donc :
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2+h) = 2$$

On en déduit que f est dérivable en $x=1$. Le nombre dérivé de f en 1 vaut 2.

On note : $f'(1) = 2$.

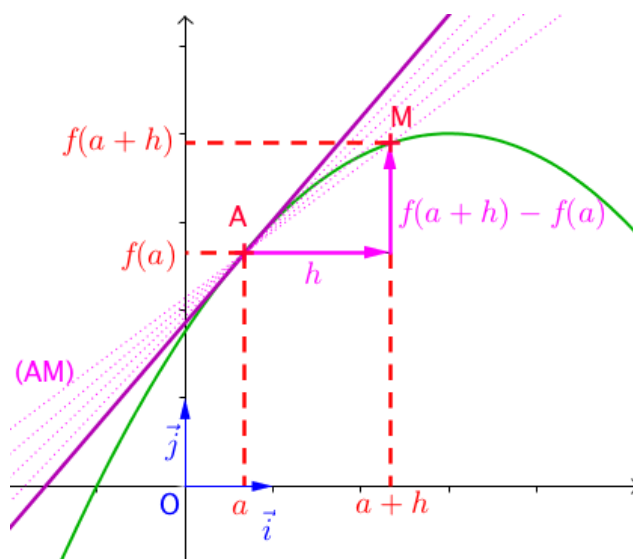
III. Tangente à une courbe

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et dérivable en un nombre réel a appartenant à I .

$f'(a)$ est le nombre dérivé de f en a .

A est un point d'abscisse a appartenant à la courbe représentative C_f de f .

Définition : La tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse a est la droite passant par A de coefficient directeur le nombre dérivé $f'(a)$.



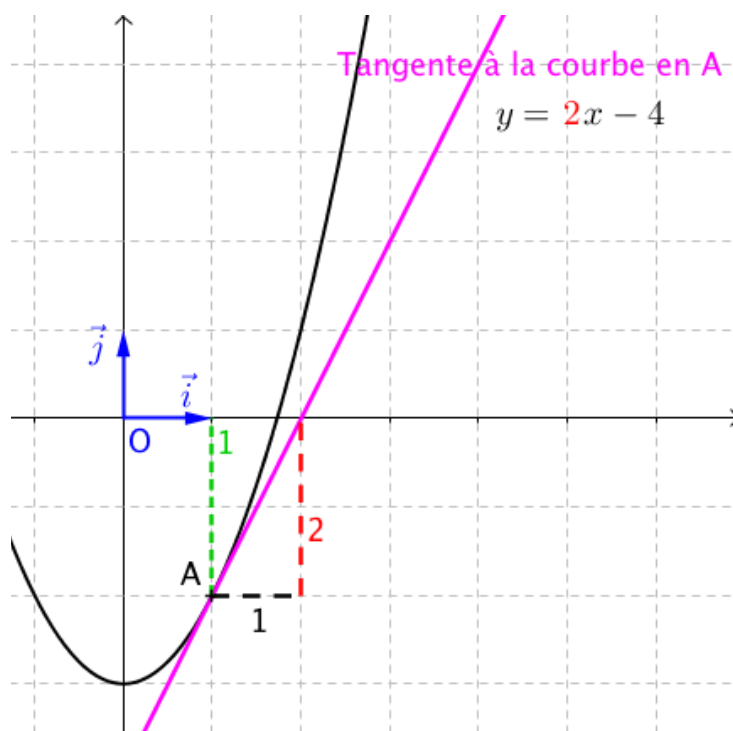
Méthode : Déterminer le coefficient directeur d'une tangente à une courbe

On considère la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3$ dont la dérivabilité en 1 a été étudiée plus haut.

Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 1.

On a vu que le nombre dérivé de f en 1 vaut 2.

Ainsi la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 1 est la droite passant par A et de coefficient directeur 2.



Propriété : Une équation de la tangente à la courbe C_f en A est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

- Admis -

Méthode : Déterminer une équation d'une tangente à une courbe

On considère la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3$.
Déterminer une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 1.

On a vu plus haut que le coefficient directeur de la tangente est égal à 2.

Donc son équation est de la forme : $y = 2(x - 1) + f(1)$, soit :

$$y = 2(x - 1) + (-2)$$

$$y = 2x - 4$$

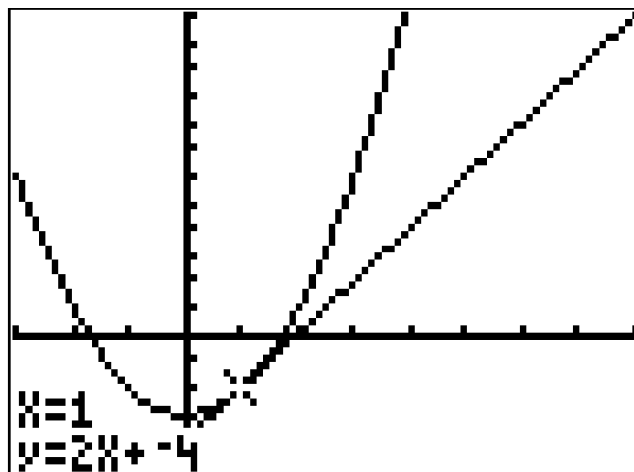
Une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 1 est $y = 2x - 4$.

A l'aide de la calculatrice, il est possible de tracer la tangente à une courbe en un point.

Une fois la courbe tracée sur la calculatrice :

Avec TI-83 : Touches « 2^{nde} » + « PGRM » (Dessin) puis « 5: Tangente » et saisir l'abscisse du point de tangence, ici 2. Puis « ENTER ».

Casio 35+ : Touches « SHIFT » + « F4 » (Skech) puis « Tang » et saisir l'abscisse du point de tangence, ici 2. Puis « EXE » + « EXE ».



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.
www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales