

Avants - Propos :

Conformément au nouveau programme de mathématiques, ce présent manuel est le résultat d'un travail réalisé par un comité d'enseignants du secondaire qui répond au souci du ministère de l'éducation nationale pour la mise en œuvre de **l'approche par compétence (A.P.C)** dans les classes de **11^{ème} L (11^{ème} Lettres)** au Mali et ayant pour **objectif** d'uniformisé le niveau des élèves venant des classes antérieures afin de les offrir les mêmes chances dans la poursuite de leurs études universitaires. Il permet en outre d'harmonisée la pédagogie des mathématiques et de mettre à la disposition des élèves l'acquisition d'une formation solide.

Chacun des chapitres recouvrant l'ensemble du programme, est composé de **04** parties :

■ Situation - Problème :

Une **activité ouverte** permettant d'aborder en grande partie les connaissances nouvelles.

■ Activités préparatoires :

Les **activités préparatoires**, approches simples des nouvelles notions à partir des connaissances acquises dans les classes antérieures.

■ Le cours :

Rien que **l'essentiel dans un langage clair et simple** avec des **démonstrations**. Chaque définition ou théorème est suivi d'un exemple simple, court, en situation, pouvant servir de référence et d'aide à la démonstration.

■ Exercices et problèmes :

- **Les exercices** : Inédits et ordonnés suivant **la progression du cours**, ils contribuent à l'acquisition et à l'assimilation du cours.
- **Les problèmes** : Variés, ce sont des **problèmes de synthèse** ou des problèmes ouverts pour aller plus loin dans l'acquisition de vos connaissances sans aller au-delà du programme en vigueur.

Nous souhaitons donc que l'utilisation de ce livre ne se substitue pas au travail des professeurs en classe, mais qu'il constitue un support efficace, utile aux élèves pour mieux comprendre les mathématiques dans toute sa diversité. A cet effet, nous tenons à remercier **les éditions SAMASSA** et tous ceux qui voudront bien nous faire part de leurs remarques, critiques, suggestions ou autres solutions plus élégantes que les miennes, que nous publierons dans une future édition.

Les auteurs

SOMMAIRE

1

Calculs dans $\mathbb{N}$ 63

- 1- Situation problème.
- 2- Activité préparatoire
- 3- Ensemble des entiers naturels (définition et propriétés).
- 4- Diviseurs et multiples d'un entier naturel.
- 5- PGCD et PPCM de deux entiers naturels a et b .

2

Activités graphiques 63

- 1- Situation problème.
- 2- Activité préparatoire
- 3- Utilisation des tables de valeurs.
- 4- Fonctions affines et droite non parallèles à l'axe des ordonnées.
- 5- Interprétation géométrique du coefficient directeur d'une droite.
- 6- Résolution des équations du type $f(x) = 0$ et $f(x) = y$.

3

Fonctions homographiques...156

- 1- Situation problème.
- 2- Activité préparatoire
- 3- Forme canonique d'une fonction homographique.
- 4- Représentation d'une fonction homographique.
- 5- Variation d'une fonction homographique

4

Dénombrement ...156

- 1- Situation problème.
- 2- Activité préparatoire
- 3- Intersection d'ensembles finis.
- 4- Union d'ensembles finis.
- 5- Ensembles complémentaires.
- 6- Cardinal d'un ensemble finis

5

Probabilité...156

- 7- Situation problème.
- 8- Activité préparatoire
- 9- Définition et propriétés.
- 10- Éléments caractéristiques d'une série statistique.

Calculs dans $\mathbb{R}$

I- Rappels et compléments des propriétés dans $\mathbb{R}$

1) Ensemble des entiers naturels

L'ensemble des entiers naturels est noté : $\mathbb{N}$ tel que : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, +\infty\}$

NB :

L'ensemble des entiers naturels privé de zéro est noté $\mathbb{N}^*$ tel que : $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \dots, +\infty\}$

2) L'ensemble des entiers relatifs

L'ensemble des entiers relatifs est noté : $\mathbb{Z}$ tel que : $\mathbb{Z} = \{-\infty, \dots, -2; 0, 1, 2, 3, 4, \dots, +\infty\}$.

NB :

L'ensemble des entiers relatifs positifs est noté : $\mathbb{Z}^+$ tel que : $\mathbb{Z}^+ = \{0; +1; \dots, +\infty\}$

L'ensemble des entiers relatifs négatifs est noté : $\mathbb{Z}^-$ tel que : $\mathbb{Z}^- = \{-\infty, \dots, -2; -1, \dots, 0\}$

L'ensemble des entiers relatifs privés de zéro est noté : $\mathbb{Z}^*$ tel que :

$$\mathbb{Z}^* = \{-\infty, \dots, -2; -1, \dots, +1; +2; \dots, +\infty\}$$

L'ensemble des entiers relatifs positifs et privés de zéro est noté : $\mathbb{Z}_+^*$ tel que :

$$\mathbb{Z}_+^* = \{+1; +2; \dots, +\infty\}$$

L'ensemble des entiers relatifs négatifs et privés de zéro est noté : $\mathbb{Z}_-^*$ tel que :

$$\mathbb{Z}_-^* = \{-\infty, \dots, -2; -1\}$$

3) L'ensemble des nombres rationnels

L'ensemble des nombres rationnels est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire comme quotient de deux entiers relatifs.

L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$ tel que : $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{P}{Q} \text{ avec } P \in \mathbb{Z}; q \in \mathbb{Z}^* \right\}$

4) L'ensemble des nombres réels

Certains nombre comme : $\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et π ne peuvent pas s'écrire comme quotient de deux entiers relatifs. Ce sont des nombres irrationnels et l'ensemble des nombres irrationnels et rationnels forment l'ensemble des nombres réels.

L'ensemble des entiers relatifs est noté : $\mathbb{R}$ tel que :

$$\mathbb{R} = \{-\infty; -\sqrt{2}; \frac{-3}{2}; -2; 0; 1; 2; \sqrt{2}; \frac{3}{2}, \dots, +\infty\}.$$

RETENONS : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

II- Puissances entières – Puissances rationnelles

1) Les puissances entières

a- Définition

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle puissance entière de a ou encore a à la puissance n , le réel noté par a^n tel que $a^n = a \times a \times a \times \dots \times a \}$ n fois

b- Opérations sur les puissances entières

$$(a \times b)^n = a^n \times b^n \quad ; \quad a^m \times a^n = a^{m+n} \quad ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad ; \quad a^n = \frac{1}{a^{-n}} \quad ; \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\text{NB: } a^0 = 1 \quad ; \quad a^1 = a \quad ; \quad a^{-1} = \frac{1}{a}$$

2) Les puissances rationnelles

a- Définition

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle puissance rationnelle de a ou encore Racine n ième de a , le réel noté par $a^{\frac{1}{n}}$ tel que $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$.

b- Opérations sur les puissances rationnelles

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}} \quad ; \quad \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a \quad ; \quad \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^0 = a^0 = 1$$

3) Les radicaux

a- Définition

Soit a un réel positif. On appelle radical de a ou racine carrée de a , le réel noté par $\sqrt{a}$.

b- Opérations sur les radicaux

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \quad ; \quad \sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^n = a^{\frac{n}{2}} \quad ; \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\text{En particulier : } \sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2 = a.$$

NB: Si a est positif $\sqrt{a^2} = a$

Si a est négatif $\sqrt{a^2} = -a$

Si $a \geq 0$ alors l'équation : $x^2 = a$ admet deux solutions $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$

Exercice d'application

1) Calculer les nombres réels suivants à l'aide d'une puissance entière.

$$A = \frac{8^3 \times 5^4 \times 7^3}{5^3 \times 7^5 \times 2^6} ; B = \left(\frac{(8^6 \times 5^4 \times 7^8)^{\frac{1}{2}}}{3^3 \times 4^5 \times 4^6} \right)^3 ; C = \frac{((5)^3 \times (-2^{-1})^2)^4}{8}$$

2) Soit a un nombre entier naturel.

Déterminer l'entier a satisfaisant aux conditions indiquées :

$$2^{4+a} = 64 ; 3^{12} = 9^{3a} ; 7^{4-a} = 1 ; 5^a \times 25 = 125 ; (7^a)^3 = 1 ; \frac{13^{a-4}}{13} = 169$$

3) Ecrire sous forme de puissance rationnelle les expressions suivantes :

$$\sqrt[3]{3^2} ; \frac{5}{\sqrt[7]{5^2}} ; \sqrt[4]{7^3} \times \sqrt[6]{7^9} ; \frac{\sqrt[11]{4^3} \times \sqrt[7]{2^3}}{\sqrt[4]{8^3} \times \sqrt[6]{7^2}}$$

4) Mettre sous forme $a\sqrt{b}$ les expressions suivantes :

$$A = 7\sqrt{20} + 4\sqrt{20} - 3\sqrt{5} ; B = 2\sqrt{54} - \sqrt{6} + \sqrt{24} + 3\sqrt{96}$$

5) Rendre rationnelle le dénominateur des fractions suivantes :

$$\frac{3}{\sqrt{7}} ; \frac{5}{\sqrt{3}+1} ; \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-2} ; \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}+2} ; \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}+5} ; \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{7}} ; \frac{5-3\sqrt{2}}{3\sqrt{7}-\frac{5}{2}}$$

$$6) \text{ On pose : } x = \frac{\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{4}}}{\sqrt{3+\sqrt{2}}} ; y = \frac{\sqrt{20-\sqrt{320}}}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$$

Vérifier que : $4x - y = 0$

Activité graphique

1- Rappels :

a- Coordonnées d'un point :

Activité :

Le plan étant muni d'un repère (O, I, J) , On considère un point A qui n'est situé ni sur (OI) ni sur (OJ) . La parallèle à (OI) passant par A coupe (OJ) en Q et la parallèle à (OJ) passant par A coupe (OI) en P .

Si A appartient à (OI) , on pose $P = A$ et $Q = 0$.

Si A appartient à (OJ) , on pose $P = 0$ et $Q = A$.

Place ces points dans le repère.

Définition :

L'**abscisse** x_A du point A est l'abscisse du point P sur (OI) .

L'**ordonnée** y_A du point A est l'abscisse du point Q sur (OJ) .

Le couple $(x_A ; y_A)$ s'appelle **les coordonnées** du point A dans le repère (O, i, j) .

Exemples : déterminer les coordonnées des points $B ; C ; D$.

b- Distance entre deux points :

Soient $A\left(\frac{x_A}{y_A}\right)$ et $B\left(\frac{x_B}{y_B}\right)$ deux points dans le repère (O, i, j) .

On appelle distance de A à B , le réel positif ou nul noté : **AB ou $d(A ; B)$** tel que :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Remarque:

- Il faut que le repère soit orthonormé car cette propriété repose sur le théorème de PYTHAGORE.
- $(x_B - x_A)^2 = (x_A - x_B)^2$, donc l'ordre dans le quel on fait la différence des abscisses (et des ordonnées) de A et B importe peu.

c- Coordonnées du milieu d'un segment :

Soient $A\left(\frac{x_A}{y_A}\right)$ et $B\left(\frac{x_B}{y_B}\right)$ deux points dans le repère (O, i, j) et I le milieu du segment $[A ; B]$. I est le milieu du segment $[A ; B]$ si et seulement si :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Remarque:

L'abscisse du point I est la moyenne arithmétique des abscisses des points A et B (tout comme l'ordonnée).

Exercices d'application

Dans chacun des cas suivants : calculer la longueur puis le milieu du segment $[A ; B]$.

a- $A\left(\frac{-2}{3}\right)$ et $B\left(\frac{1}{2}\right)$; **b-** $A\left(\frac{0}{-4}\right)$ et $B\left(\frac{1}{1}\right)$; **c-** $A\left(\frac{-2}{-2}\right)$ et $B\left(\frac{0}{0}\right)$

2- Equations de droites – parallélisme et perpendicularité:

a- Equation d'une droite :

On appelle équation de droite toute égalité liant l'abscisse et l'ordonnée d'un point **A** qui appartient à cette droite.

Ainsi Toute droite admet une équation de la forme : $y = ax + b$ (**dite équation réduite**).

Exemples: (D) : $y = 3x - 2$; (D') : $y = \frac{1}{3}x - 7$

NB : Pour la droite (D'), dire que $y = \frac{1}{3}x - 7$ équivaut à dire que :

$-x + 3y + 21 = 0$ (**sous la forme : $ax + by + c = 0$**).

$ax + by + c = 0$ (**dite équation cartésienne**).

$x = c$

Remarque :

- Une droite admet une infinité d'équations.
- Toute droite non parallèle à l'axe (OI) et l'axe (OJ) a pour équation $y = ax + b$ **ou** $ax + by + c = 0$.
- Toute droite parallèle (OJ) a pour équation $x = c$.
- Les coefficients (**a et b**) sont des réels uniques.

b- Coefficient directeur d'une droite :

Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme : $y = ax + b$. le nombre **a** s'appelle le **coefficient directeur** de cette droite.

NB :

- La droite d'équation $y = ax + b$ est **parallèle** à la droite d'équation $y = ax$.
- Si $ax + by + c = 0$ est l'**équation cartésienne** d'une droite, alors son vecteur directeur $\vec{U}$ a pour coordonnées $\vec{U}(-b ; a)$.

c- Interprétation graphique du coefficient directeur d'une droite :

Dans un repère (O ; I ; J) donné, la valeur de **a** permet de suivre l'inclinaison de la droite d'équation $y = ax + b$, ou ce qui revient au même, la droite d'équation $y = ax$ par rapport à l'axe des abscisses.

d- Droites parallèles - droites sécantes – droites perpendiculaires :

Soit (D) et (D') deux droites d'équation respectives : $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$.

- **(D)** est **parallèle** à **(D')** si et seulement si $a = a'$.
- **(D)** et **(D')** sont **sécantes** si et seulement si $a \neq a'$.
- **(D)** et **(D')** sont **perpendiculaires** si et seulement si $aa' = -1$.

Exercice d'application

Dans chacun des cas suivants, indiquer les droites qui sont parallèles, sécantes ou perpendiculaires :

$$(\mathbf{D}_1) : y = 4x + 7 ; (\mathbf{D}_2) : y = -3x + 9 ; (\mathbf{D}_3) : y = -2x ; (\mathbf{D}_4) : x = -2 .$$

$$(\mathbf{D}_5) : y = -x + 9 ; (\mathbf{D}_6) : y = x - 9 ; (\mathbf{D}_7) : y = -2x - 1 ; (\mathbf{D}_8) : y = x + 1$$

$$(\mathbf{D}_9) : y = -x + 9 ; (\mathbf{D}_{10}) : y = -x - 9 ; (\mathbf{D}_{11}) : y = \frac{-1}{4}x + 1 ; (\mathbf{D}_{12}) : x = -3$$

e- Comment tracer une droite dans le repère :

Soit la droite **(D)** d'équation : $y = ax + b$.

Méthode1:

Pour tracer deux droites, **deux points** suffisent. Il faut donc calculer l'image par f de deux valeurs distinctes x_1 et x_2 puis tracer la droite passant par les points de coordonnées $(x_1 ; f(x_1))$ et $(x_2 ; f(x_2))$.

Méthode2:

On utilise l'ordonnée à l'origine **b** et le coefficient directeur **a** de la droite **(D)** d'équation : $y = ax + b$.

Pour cela, on place le point de coordonnées $(0 ; b)$ sur l'axe des ordonnées puis on construit un deuxième point de **(D)** en utilisant le fait que lorsque x varie de h alors $f(x)$ varie de ah .

NB :

Pour les droites de la forme $x = c$, on trace la droite passant par deux points d'abscisse $x = c$ et d'ordonnées quelconques différentes.

Exemple :

Tracer la représentation graphique de la droite **(D)** : $y = -x + 1$.

Remarque :

- Si deux droites sont parallèles à l'axe des ordonnées, alors elles sont parallèles.
- Si deux droites sont telles que l'une est parallèle à l'axe des ordonnées et pas l'autre, alors elles sont sécantes.
- Si deux droites sont sécantes, pour trouver les coordonnées du point d'intersection, on résout le système formé à partir des équations de ces deux droites.

Exercice d'application :

Parmi les équations suivantes, indiquer celles qui sont des équations de droite. Lorsque c'est le cas, tracer la droite d'équation $y = ax + b$ correspondant et donner le coefficient directeur, lorsqu'il existe.

a) $y = -2x + 7$ b) $x = -\pi$ c) $y = \sqrt{x^2}$

d) $-5x + 2y + 7 = 0$ e) $y = \frac{3}{x-5}$ f) $\frac{x-1}{3y} = \frac{2}{3}$

f) Détermination d'une équation d'une droite passant par deux points distincts

Méthode :

Soient $A\left(\frac{x_A}{y_A}\right)$ et $B\left(\frac{x_B}{y_B}\right)$ deux points distincts.

- Si $x_A = x_B$, alors une équation de la droite est $x = x_A$.
- Si $x_A \neq x_B$, alors on calcule le coefficient directeur **a** tel que : $\mathbf{a} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
puis la valeur de **b** telle que : $y_A = ax_A + b$ ou $y_B = ax_B + b$

Exercice d'application

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation de la droite (**D**) passant par les points A et B puis tracer la.

a- $A\left(\frac{-2}{1}\right)$ et $B\left(\frac{1}{1}\right)$ **b-** $A\left(\frac{0}{3}\right)$ et $B\left(\frac{-1}{2}\right)$ **c-** $A\left(\frac{-1}{2}\right)$ et $B\left(\frac{3}{1}\right)$

g- Détermination d'une équation d'une droite parallèle à une autre droite :

Méthode :

Soit la droite (**D**) d'équation : $y = ax + b$. Pour déterminer l'équation de la droite (**D'**) d'équation $y' = ax + b'$ passant par $A\left(\frac{x_A}{y_A}\right)$ et parallèle à (**D**),
On cherche uniquement la valeur de b' telle que : $y_A = ax_A + b'$.

Exercice d'application

Donner une équation de la droite parallèle à la droite d'équation :
 $y = -5x + \frac{2}{3}$ et passant par le point A(1 ; 4).

h- Détermination des coordonnées du point d'intersection de deux droites :

Méthode :

Soient **(D)** et **(D')** deux droites sécantes et d'équations respectives :

$$y = ax + b \text{ et } y' = a'x + b'.$$

Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection des droite **(D)** et **(D')**, on résout le système formé par les deux équations :

$$y = ax + b \text{ et } y' = a'x + b' \text{ telle que : } \begin{cases} y = ax + b \\ y' = a'x + b' \end{cases}$$

i- Représentation paramétrique d'une droite D :

- Droite passant par un point $A\left(\frac{x_0}{y_0}\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\left(\frac{a}{b}\right)$

$$D\left(A ; \vec{u}\right) = \left\{ M\left(\frac{x}{y}\right) \in P ; \overrightarrow{AM} = k\vec{u} \text{ avec } k \in \mathbb{R} \right\}$$

$$M\left(\frac{x}{y}\right) \in D \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\vec{u} \Leftrightarrow \left(\frac{x - x_0}{y - y_0}\right) = k\left(\frac{a}{b}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = ka + x_0 \\ y = kb + y_0 \end{cases}$$

Ce système est un système d'équations paramétrique ou encore une représentation paramétrique de D.

- Droite passant par deux points $A\left(\frac{x_A}{y_A}\right)$ et $B\left(\frac{x_B}{y_B}\right)$ notée $D(A ; B)$

Il suffira de savoir que $D(A ; B) = D\left(A ; \overrightarrow{AB}\right)$ et poser que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}\left(\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}\right)$

$$M\left(\frac{x}{y}\right) \in D(A ; B) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \left(\frac{x - x_A}{y - y_A}\right) = k\left(\frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}\right) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = k(x_B - x_A) + x_A \\ y = k(y_B - y_A) + y_A \end{cases}$$

Réciproquement dans le plan rapport à un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, tout système de la forme

$$\begin{cases} x = \lambda a + x_0 \\ y = \lambda b + y_0 \end{cases} \text{ est une représentation paramétrique d'une droite D passant par le}$$

point $A\left(\frac{x_0}{y_0}\right)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}\left(\frac{a}{b}\right)$

- Représentation ou équation cartésienne de $D(A ; \vec{u})$

$$M\left(\frac{x}{y}\right) \in D(A; \vec{u}) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}) = 0 \text{ or } A\left(\frac{x_A}{y_A}\right); \overrightarrow{AM}\left(\frac{x-x_A}{y-y_A}\right) \text{ et } \vec{u}\left(\frac{x_0}{y_0}\right)$$

$$\text{Alors on a : } \det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_A & x_0 \\ y-y_A & y_0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow y_0(x-x_A) - x_0(y-y_A) = 0 \text{ d'où } D(A; \vec{u}): y_0(x-x_A) - x_0(y-y_A) = 0$$

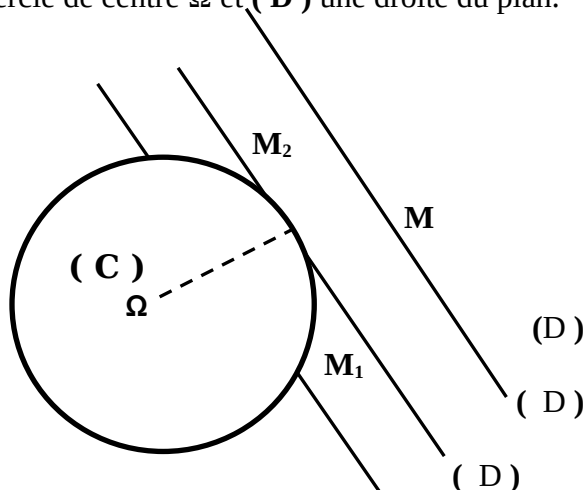
Exercice d'application

Dans chacun des cas suivants, démontrer que les deux droites **(D)** et **(D')** sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur points d'intersection.

- a- **(D)** : $y = 3x + 1$ et **(D')** : $y = -5x + 3$
b- **(D)** : $3y = 2x + \frac{1}{2}$ et **(D')** : $4x = 2y + 9$

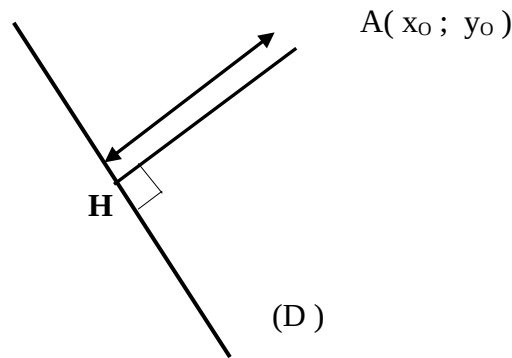
a- Position relative d'une droite et d'un cercle :

Soit **(C)** un cercle de centre Ω et **(D)** une droite du plan.



- Si $(C) \cap (D) = \emptyset$, alors $d((C); (D)) > r$.
- Si $(C) \cap (D) = [M]$, alors $d((C); (D)) = r$ et **(D)** est tangente à **(C)**.
- Si $(C) \cap (D) = [M_1; M_2]$, alors $d((C); (D)) < r$.

le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère la droite **(D)** d'équation : $ax + by + c = 0$ et un point $A(x_0; y_0)$.



$$d((C) ; (D)) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

b- Reconnaissance de l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tel que :
 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ (en utilisant la forme canonique)

Soit (C) un cercle d'équation : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, pour trouver le centre et le rayon en utilisant la forme canonique qui se présente sous la forme :

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + ax) + (y^2 + by) + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[x^2 - 2\left(-\frac{a}{2}\right)x \right] + \left[y^2 - 2\left(-\frac{b}{2}\right)y \right] + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right] + \left[\left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \right] + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} + c = 0$$

$$<=> \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c\right) = 0$$

$$<=> \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}\right) = 0$$

$$<=> \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}\right)$$

$$<=> \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$$

Alors l'ensemble des points M cherché est le **cercle de centre** $\Omega\left(\frac{-a}{2}; \frac{-b}{2}\right)$ et de **rayon**

$$r = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$$

EXERCICES

Exercices 1 :

Déterminer une équation réduite de chacune des droites suivantes :

1) $(D_1) : 2x + y = 3$; **2)** $(D_2) : 2y = -x + 3$; **3)** $(D_3) : -y = -2x - 4$

4) $(D_4) : 2x + y - 5 = 0$; **5)** (D_5) passe par $A\left(\frac{2}{3}\right)$ et de pente -2

6) (D_6) passe par $B\left(\frac{1}{0}\right)$ et de coefficient directeur $\frac{1}{2}$

Exercices 2 :

1) Déterminer une équation de la droite (D) passant par les points A et B dans chacun des cas suivants :

$$\mathbf{a-} A\left(\frac{-2}{3}\right) \text{ et } B\left(\frac{1}{2}\right) \quad ; \quad \mathbf{b-} A\left(\frac{0}{-4}\right) \text{ et } B\left(\frac{1}{1}\right) \quad ; \quad \mathbf{c-} A\left(\frac{-2}{-2}\right) \text{ et } B\left(\frac{1}{0}\right)$$

$$\mathbf{d-} A\left(\frac{0}{3}\right) \text{ et } B\left(\frac{\frac{3}{2}}{-1}\right) \quad ; \quad \mathbf{e-} A\left(\frac{\frac{2}{3}}{-2}\right) \text{ et } B\left(\frac{\frac{4}{3}}{1}\right) \quad ; \quad \mathbf{f-} A\left(\frac{-1}{-1}\right) \text{ et } B\left(\frac{5}{5}\right).$$

2) Déterminer une équation de la droite (D') parallèle à la droite (D) et passant par le point A dans chacun des cas suivants :

$$\mathbf{a-} (D) : y = -x + 1 \text{ et } A\left(\frac{-2}{3}\right) \quad ; \quad \mathbf{b-} (D) : y = 2x + \frac{1}{2} \text{ et } A\left(\frac{0}{1}\right).$$

$$\mathbf{c-} (D) : y = -\frac{3}{2}x - 1 \text{ et } A\left(\frac{-1}{-1}\right) \quad ; \quad \mathbf{d-} (D) : y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2} \text{ et } A\left(\frac{-2}{4}\right).$$

$$\mathbf{e-} (D) : y = x \text{ et } A\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right) \quad ; \quad \mathbf{f-} (D) : y = -x\sqrt{3} + 1 \text{ et } A\left(\frac{-2}{3}\right).$$

Exercices 3 :

Soit un triangle ABC tel que : $A\left(\frac{1}{-2}\right)$; $B\left(\frac{5}{2}\right)$ et $C\left(\frac{-3}{1}\right)$.

- 1) Déterminer une équation des médiatrices du triangle ABC.
- 2) En déduire les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercices 4 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

On donne les points $A\left(\frac{9}{2}\right)$; $B\left(\frac{-3}{5}\right)$ et $C\left(\frac{2}{0}\right)$.

- 1) Donner l'équation réduite de la droite (AB). Quel est son coefficient directeur ?
- 2) Donner une équation de droite passant par C et de coefficient directeur $\frac{7}{2}$.

- 3) Montrer que ces deux droites sont sécantes et déterminer algébriquement puis graphiquement les coordonnées de leur point d'intersection.

Exercices 5 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

On donne les points $A\left(\frac{3}{-1}\right)$; $B\left(\frac{-1}{-3}\right)$

- 1) Donner une équation cartésienne du cercle (C) et de diamètre $[AB]$.
- 2) Soit (D) la droite passant par $C\left(\frac{1}{-1}\right)$ et de vecteur directeur $\vec{U}\left(\frac{2}{-3}\right)$.

Donner une équation cartésienne puis paramétrique de (D) .

- 3) Déterminer les points d'intersections de (C) et (D) .

Exercices 6 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Donner une équation cartésienne :

- 1) De la droite (D_1) passant par $A\left(\frac{1}{1}\right)$ et de vecteur directeur $\vec{U}\left(\frac{2}{3}\right)$.
- 2) De la représentation paramétrique :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$t \longmapsto (5t + 1 ; -t + 2)$$
- 3) De la droite perpendiculaire à $(D) : 2x - 3y + 4 = 0$ et passant par $K\left(\frac{-1}{-1}\right)$.
- 4) Du cercle de diamètre $[AB]$; avec $A\left(\frac{4}{3}\right)$ et $B\left(\frac{1}{0}\right)$.
- 5) Du cercle de centre $A\left(\frac{4}{3}\right)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

Exercices 7 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Déterminer l'ensemble des points $M\left(\frac{x}{y}\right)$ vérifiant les équations de cercles suivants :

1) (C) : $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$; 2) (C) : $x^2 + y^2 + x - 1 = 0$

3) (C) : $x^2 + y^2 + 1 = 0$; 4) (C) : $2x^2 + 2y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$

5) (C) : $-x^2 - y^2 + 3x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{4} = 0$; 6) (C) : $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$

Exercices 8 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

On donne le cercle (C) et la droite (D) d'équations respectives :

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 8 = 0 \quad \text{et} \quad 2x - 3y + 1 = 0.$$

- 1) Construire le cercle (C) et la droite (D) dans le même repère.
- 2) Construire les deux tangentes au cercle (C) parallèles à la droite (D).
- 3) Déterminer les coordonnées d'un point et d'un vecteur normal de chacune d'elles.
- 4) En déduire les équations de ces deux tangentes.

Système d'équations

1- Résolution de systèmes d'équations dans $\mathbb{R}^2$:

a- Définition :

On appelle système de deux équations du premier degré à deux inconnues, tout système

$$\text{de la forme : } \begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$$

Où : a, b, c, a', b', c' sont tous des réels.

b- Résolution :

Pour résoudre de tels systèmes, nous disposons des méthodes suivantes :

➤ **Méthode d'addition :**

Qui consiste à déterminer les valeurs de x et y par addition des équations (1) et (2) après avoir multiplié respectivement les équations (1) et (2) par des réels de signe opposé pour éliminer x ou y .

➤ **Méthode de substitution :**

Qui consiste à déterminer la valeur d'une des inconnues dans une des équations puis de la remplacer par sa valeur dans l'autre. On obtient ainsi une équation du premier degré à une inconnue que l'on sait résoudre.

➤ **Méthode de comparaison :**

Qui consiste à déterminer la valeur d'une des inconnues dans les deux équations (par exemple x) puis on fait $x = x$. On obtient ainsi une équation du premier degré en y que l'on résout.

➤ **Méthode des déterminants :**

Qui consiste à déterminer les valeurs de x et y en utilisant :

$$\text{Soit à résoudre dans } \mathbb{R}^2 \text{ le système : } \begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$$

$$\bullet \text{ On pose : } D_p = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = (a \times b') - (a' \times b)$$

D_p est appelé le déterminant principal du système

1^{er} Cas : Si $D_p \neq 0$, le système admet une solution unique $(x; y)$.

On cherche les déterminants secondaires D_x et D_y

- Le déterminant $D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = (c \times b') - (c' \times b)$

- Le déterminant $D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = (a \times c') - (a' \times c)$

Ainsi $x = \frac{D_x}{D_p}$ et $y = \frac{D_y}{D_p}$ d'où $s = \left\{ \frac{D_x}{D_p} ; \frac{D_y}{D_p} \right\}$

2^{ème} Cas : Si $D_p = 0$, on revient au système.

NB :

- D_p est appelé déterminant **principal**
- D_x est appelé déterminant **associé à x**
- D_y est appelé déterminant **associé à y**

Remarque : la méthode du déterminant n'est applicable que lorsque le système est sous la

forme : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

Exemple : Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre réel m le système suivant :

$$\begin{cases} mx + y = 2m - 1 \\ x + my = 1 \end{cases}$$

Solution

1^{er} cas : $D_p \neq 0$

On a $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$ ou $m \neq 1$

Le système admet donc une solution unique :

$$D_x = \begin{vmatrix} 2m-1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = 2m^2 - m - 1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & 2m-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -m + 1$$

Ainsi $x = \frac{D_x}{D_p} = \frac{2m+1}{m+1}$ **et** $y = \frac{D_y}{D_p} = \frac{-1}{m+1}$ **d'où** $\boxed{\mathbf{s}} = \left(\frac{2m+1}{m+1} ; \frac{-1}{m+1} \right)$

2^{ème} cas : $D_p = 0$

On a $m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ ou $m = -1$

- Si $m = 1$, le système devient :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow x + y = 1$$

Alors on pose : $y = h$, on a : $x = 1 - h$ et on a : $S = \{(1 - h ; h) ; h \in \mathbb{R}\}$

- Si $m = -1$, le système devient :

$$\begin{cases} -x + y = -3 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \vee 3 \neq 1$$

Alors les deux équations du système sont incompatibles et $S = \{\emptyset\}$

Exercice d'application

En utilisant les trois méthodes données si déçus, résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes :

a- $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ x - y = 4 \end{cases}$ b- $\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 3x + \frac{1}{2}y + 3 = 0 \end{cases}$ c- $\begin{cases} x + y + 5 = 0 \\ 3x + 4y - 7 = 0 \end{cases}$

2- Résolution de systèmes d'équations dans $\mathbb{R}^3$:

a- Définition :

On appelle système de trois équations du premier degré à trois inconnues,

$$\text{tout système de la forme : } \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

où $a, b, c, d, a', b', c', d', a'', b'', c'', d''$ sont tous des réels

b- Résolution :

Pour résoudre de telles systèmes, on utilise la méthode du **PIVOT DE GAUSS** ou encore appelé méthode **triangulaire**.

Cette méthode consiste à trouver une écriture triangulaire du système.

Pour cela on élimine **une** inconnue dans l'équation (2) ; **deux** inconnues dans l'équation (3)

Exercice d'application

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants :

$$\begin{array}{lll} \text{a- } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -4x - 3y + 2z = 4 \\ -3x - y + z = 0 \end{cases} & \text{b- } \begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ x - 9y + 5z = -7 \end{cases} & \text{c- } \begin{cases} x + 2y - z = 8 \\ 2x + y + 2z = -2 \\ x + y + 3z = -6 \end{cases} \end{array}$$

3- Programmation linéaire:

L'étude des problèmes pratiques de résolution des systèmes linéaires des inéquations du premier degré à deux inconnues x et y , nous conduisent souvent à étudier si l'ensemble S solution du système d'inéquation à deux inconnues admet un maximum (ou un minimum) de la forme $\alpha x + \beta y$ (avec α et β) des réels données.

Remarque : les inéquations ou les équations d'un système sont appelés des contraintes de Programmation linéaire.

Fonctions polynôme du second degré

ACTIVITES PREPARATOIRES



Activité 1 : (Résolution d'équations)

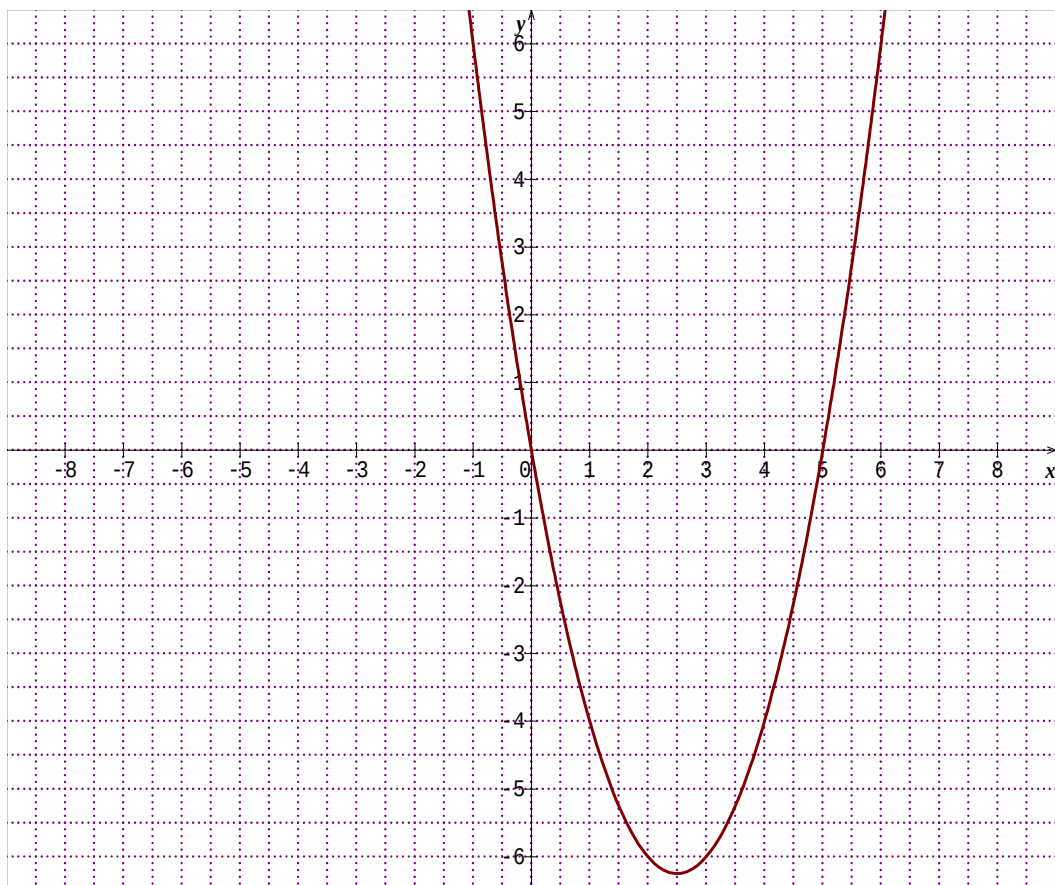
Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes au moyen, si nécessaire, d'une factorisation :

- a) $x^2 - 5x = 0$; b) $-2x^2 + 1 = 0$ c) $(x+3)(1-2x)(3-x) = 0$.
d) $-x^2 - 4 = 0$; e) $(x-2)^2 = 3$ f) $x^4 - 4 = 0$.

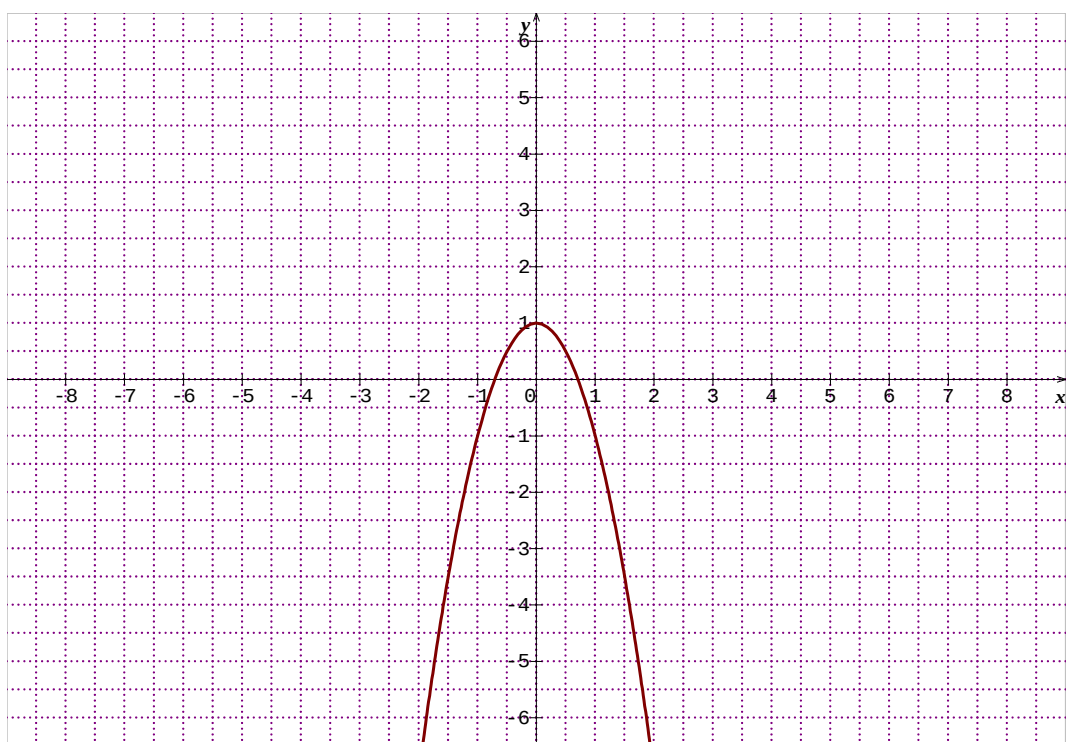
Activité 2 : (Résolution d'inéquations)

Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes au moyen d'une lecture graphique et en utilisant ci possible les solutions des équations précédentes :

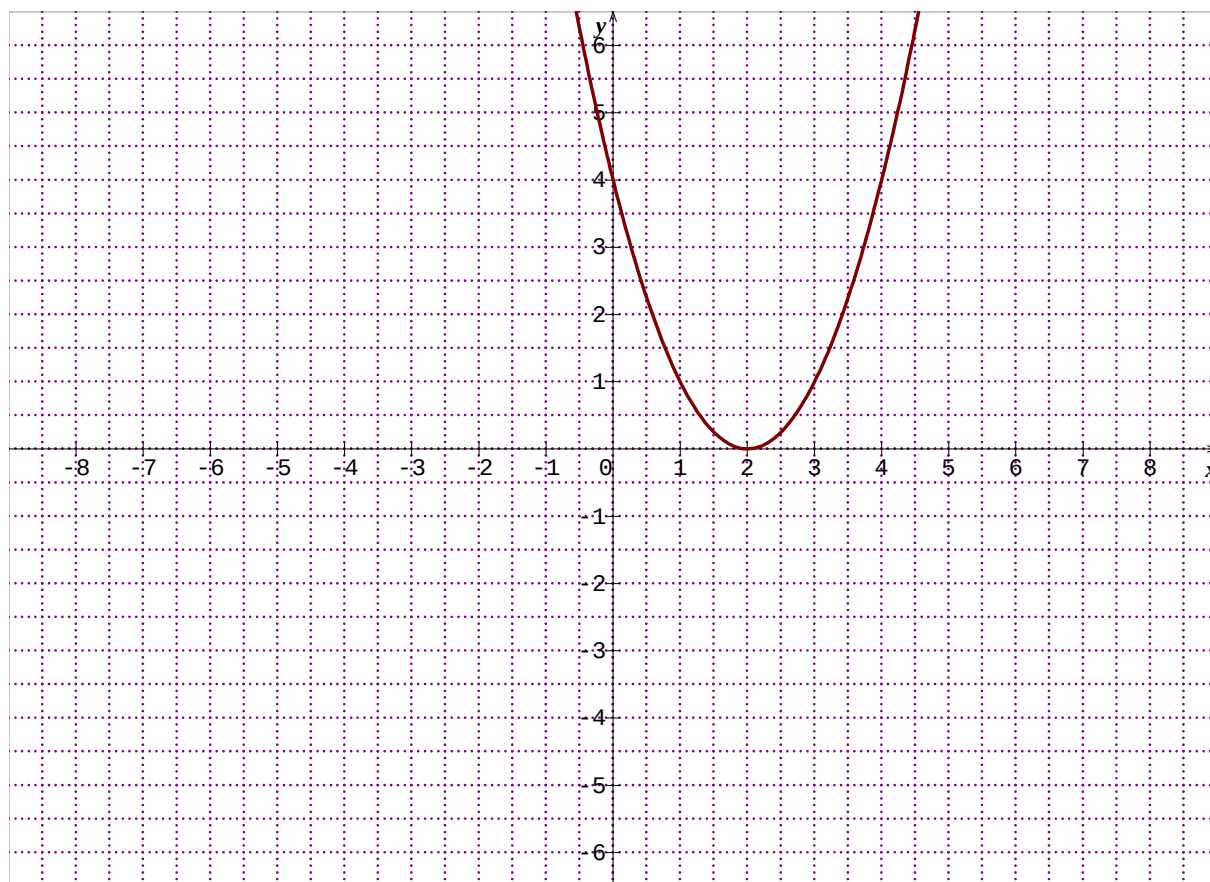
- a) $x^2 - 5x \leq 0$



b) $-2x^2 + 1 < 0$



c) $(x-2)^2 \geq 3$



Activité 3 : (Identités remarquables)

Déterminer les termes manquant dans chaque expression, afin d'obtenir la forme développée de : a) $x^2 - \dots + 4$; b) $x^2 + 6x + \dots$; c) $\dots - x + 9$; e) $x^2 - x + \dots$

Activité 4 : (développement)

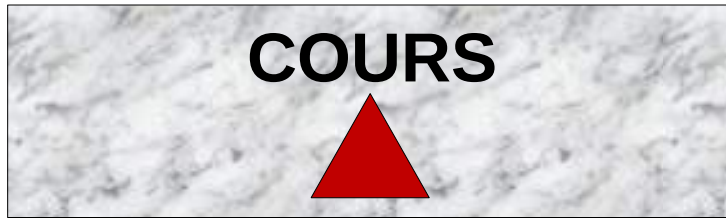
Développe et ordonne suivant les puissances décroissantes de x l'expression $P(x) = (x+2)(2x-1)(x+3)$.

Activité 5 : (zéro d'un polynôme)

Soit p un polynôme définie par : $p(x) = x^3 - 4x^2 + 8$.

a- Calcule : $p(-2)$; $p(-1)$; $p(0)$; $p(1)$; $p(2)$; $p(3)$; $p(4)$; $p(5)$.

b- En déduis les valeurs qui annulent le polynôme p .



I- Fonctions polynômes - Généralités :

1- Définition :

On appelle fonction polynôme, toute fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0. \text{ (Avec } a_n \neq 0 \text{)}$$

- $a_n ; a_{n-1} ; a_2 ; a_1 ; a_0$ Sont des réels appelés coefficients du polynôme $f(x)$.
- n est le degré du polynôme et a_n est le coefficient dominant du polynôme.

NB: Si : $a_n = a_{n-1} = \dots = a_2 = a_1 = a_0 = 0$, on dit que p est le polynôme nul.

2- Egalité de deux polynômes :

Deux polynômes sont égaux si et seulement si :

- Les deux polynômes sont de même degré.
- Les coefficients des termes de même degré sont égaux.

3- Zéro d'un polynôme :

Définition :

Soit α un nombre réel et p un polynôme non nul. On dit que α est un **zéro** ou est une **racine** du polynôme p si et seulement si $p(\alpha) = 0$

4- Factorisation d'un polynôme par $(x - \alpha)$ où α est un zéro de p

a- Théorèmes:

- Si α est un **zéro** du polynôme p , alors $p(x)$ est divisible par $(x - \alpha)$.
- Si α est un **zéro** du polynôme p , alors il existe un polynôme q tel que $p(x) = (x - \alpha) q(x)$ où q est un polynôme de degré inférieur à celui de p .

NB: $q(x)$ est appelé **quotient** dans la division Euclidienne de $p(x)$ par $(x - \alpha)$.

b- Détermination pratique du quotient q (division des polynômes):

Activité :

Soit $p(x)$ un polynôme définie par $p(x) = -x^3 + 3x^2 + 16x + 12$.

a- Calcule $p(-2)$.

b- Factorise $p(x)$ en utilisant :

- La méthode par identification
- La méthode de la division euclidienne
- La méthode d'Hörner

Solution

a- Calculons $p(-2)$

$$P(-2) = -(-2)^3 + 3(-2)^2 + 16(-2) + 12 = 0 \Rightarrow \alpha = -2 \text{ est un zéro de } P$$

b- Factorisons $p(x)$.

Méthode par identification :

Si $\alpha = -2$ est un zéro de p . Alors p est factorisable par : $(x - \alpha)$

$\Rightarrow (x - (-2)) = (x + 2)$ est un facteur de p . Ainsi on peut écrire :

$p(x) = (x + 2)(ax^2 + bx + c)$. (En développant $p(x)$), on a :

$$p(x) = ax^3 + x^2(b + 2a) + x(c + 2b) + 2c \quad \text{Or:} \quad p(x) = -x^3 + 3x^2 + 16x + 12.$$

$$\text{Par identification on a: } p(x) = p(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b + 2a = 3 \\ c + 2b = 16 \\ 2c = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 5 \\ c = 6 \end{cases}$$

D'où $p(x) = (x + 2)(-x^2 + 5x + 6)$.

Méthode de la division euclidienne :

$$\begin{array}{r} -x^3 + 3x^2 + 16x + 12 \quad x + 2 \\ -x^3 + 2x^2 \\ \hline 0 \quad 5x^2 + 16x + 12 \quad -x^2 + 5x + 6 \\ -5x^2 - 10x + 12 \\ \hline 0 \quad 6x + 12 \\ -6x - 12 \\ \hline 0 \end{array}$$

D'où $p(x) = (x + 2)(-x^2 + 5x + 6)$.

Méthode d'Hörner :

	- 1	3	16	12
-2		2	-10	-12
	- 1	5	6	0
↓ α	↓ a	↓ b	↓ c	

Or: $p(x) = (x - \alpha)(ax^2 + bx + c) \Rightarrow p(x) = (x + 2)(-x^2 + 5x + 6)$.

D'où $p(x) = (x + 2)(-x^2 + 5x + 6)$.

Théorème :

Soit f une fonction polynôme. Le réel α est un zéro de f d'ordre de multiplicité n si et seulement si dans la factorisation de f , il existe le **facteur** $(-\alpha)^n$.



1) Identifier les fonctions polynômes puis préciser leur degré dans chacun des cas suivants :

a- $p(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$; **b-** $p(x) = (2x - 1)^4 + \frac{1}{x}$; **c-** $p(x) = (x^2 + 1)(x - 1)$

d- $p(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{-x + 2}$; **e-** $p(x) = x^4 - 4x^2 + (x - 2)^4 + x^3$; **f-** $p(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

2) On considère le polynôme p définie par $p(x) = x^3 + 5x^2 - 3x - 15$.

Déterminer les réels : a ; b et c tel que $p(x) = (x + 5)(ax^2 + bx + c)$

3) Soit le polynôme p définie par : $p(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 5$.

Calculer : $p(-1)$; $p(0)$; $p(1)$. Puis en déduire le zéro du polynôme p .

II- Fonctions polynômes du second degré:

1- Définition :

On appelle fonction polynôme du second degré, toute fonction p de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
 $p(x) = ax^2 + bx + c$ (Avec a ; b et c des nombres réels tel que $a \neq 0$)

2- Forme canonique d'un polynôme du second degré:

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) un polynôme du second degré.

On a : $P(x) = ax^2 + bx + c$

$$\begin{aligned} &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left[x^2 + 2x \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right] \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \end{aligned}$$

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$. On obtient ainsi: $p(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$

D'où la forme canonique du trinôme $ax^2 + bx + c$ est :

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \quad \text{ou} \quad ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

$$\text{avec : } \alpha = \frac{-b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = -a\alpha^2 + c$$

3- Forme factorisée d'un polynôme du second degré:

a- Discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$

On appelle **discriminant** d'un trinôme $ax^2 + bx + c$, le nombre réel noté Δ tel que :
 $\Delta = b^2 - 4ac$.

b- Forme factorisée du trinôme $ax^2 + bx + c$

- Si $\Delta > 0$, le trinôme $ax^2 + bx + c$ admet deux racines distinctes x_1 et x_2 telles que :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Ainsi pour $\Delta > 0$, la forme factorisée du trinôme $ax^2 + bx + c$ est : $a(x - x_1)(x - x_2)$

- Si $\Delta = 0$, le trinôme $ax^2 + bx + c$ admet une racine double x_0 telle que : $x_0 = \frac{-b}{2a}$

Ainsi pour $\Delta = 0$, la forme factorisée du trinôme $ax^2 + bx + c$ est : $a(x - x_0)^2$

- Si $\Delta < 0$, le trinôme $ax^2 + bx + c$ n'admet aucune racine.

Ainsi pour $\Delta < 0$, la forme factorisée du trinôme $ax^2 + bx + c$ n'existe pas.

c- **Théorème : racines et factorisation du trinôme $ax^2 + bx + c$**

$\Delta = b^2 - 4ac.$	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Racines de : $ax^2 + bx + c$	Pas de racine	Une racine double : $x_0 = \frac{-b}{2a}$	$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
factorisation de : $ax^2 + bx + c$	Pas de facteur du premier degré	$a(x - x_0)^2$	$a(x - x_1)(x - x_2)$

4- **Identités remarquables utilisées pour factoriser un polynôme**

Soient a et b deux nombres réels non nuls ; on a :

$$\text{➤ } (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$\text{➤ } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

$$\text{➤ } (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

$$\text{➤ } (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

$$\text{➤ } (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

$$\text{➤ } (a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

$$\text{➤ } (a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.$$

$$\text{➤ } (a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3.$$

5- Triangle de PASCAL

Pour le calcul de $(a + b)^n$ ou $(a - b)^n$ avec $(n \in \mathbb{N})$ on peut utiliser le triangle de **PASCAL** qui est la suivant :

<u>Puissance de n</u>	<u>$(a+b)^n$</u>						
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	

Pour calculer $(a - b)^n$, on utilise les mêmes coefficients obtenus à partir du triangle de Pascal, mais chaque fois que b apparait avec une puissance impaire on met le signe «**-**»
NB : En posant : $a + b = S$ (**Somme**) et $ab = P$ (**Produit**), on a :

$$a^2 + b^2 = S^2 - 2P \quad \text{et} \quad a^3 + b^3 = S^3 - 3PS$$

6- Représentation graphique et variation d'un trinôme du second degré

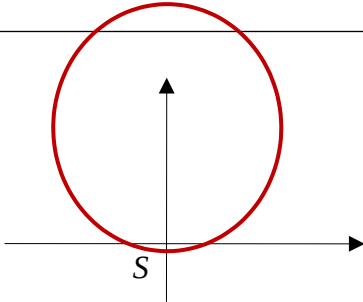
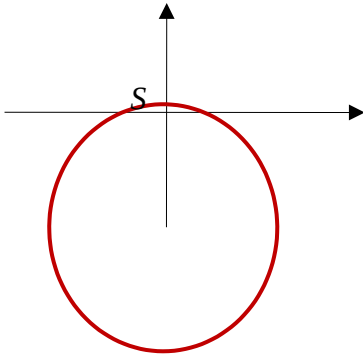
On rappelle que la forme canonique du trinôme $ax^2 + bx + c$ est :

$$p(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right].$$

La forme canonique du trinôme $ax^2 + bx + c$ est utile pour tracer sa courbe représentative.

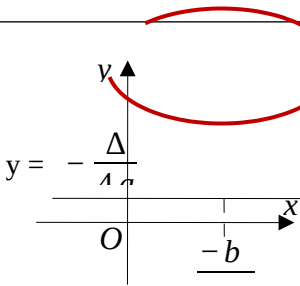
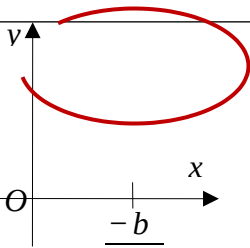
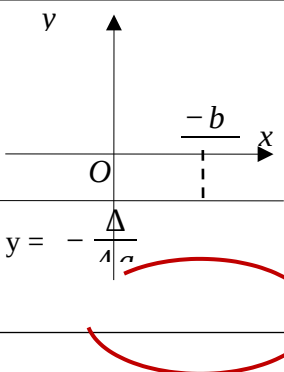
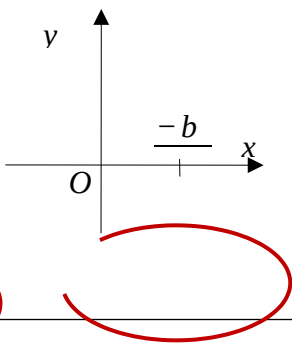
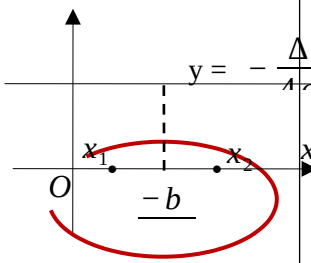
La courbe (C), représentant la fonction $P : x \rightarrow ax^2 + bx + c$ dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, est une parabole, translate de la parabole $y = ax^2$.

Son sommet S a pour abscisse $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et pour ordonnée $P(\alpha)$.

Valeurs de α	Tableau de variation	Courbe representative								
Pour $a > 0$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>α</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$p(x)$</td><td></td><td>$p(\alpha)$</td><td></td></tr></table>	x	$-\infty$	α	$+\infty$	$p(x)$		$p(\alpha)$		
x	$-\infty$	α	$+\infty$							
$p(x)$		$p(\alpha)$								
Pour $a < 0$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>α</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$p(x)$</td><td></td><td>$p(\alpha)$</td><td></td></tr></table>	x	$-\infty$	α	$+\infty$	$p(x)$		$p(\alpha)$		
x	$-\infty$	α	$+\infty$							
$p(x)$		$p(\alpha)$								

Suivant le signe de **a**, on obtient le tableau de variation de la fonction p :

7- Tableau récapitulatif et signe d'un trinôme du second degré

$\Delta = b^2 - 4ac.$	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$																					
Racines de : $ax^2 + bx + c$	Pas de racine	Une racine double $x_0 = \frac{-b}{2a}$	$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$																					
$a > 0$ Position de (C) par rapport à l'axe des abscisses																								
Tableau de signe de $ax^2 + bx + c$	<table border="1" data-bbox="499 1218 772 1326"><tr><td>x</td><td></td></tr><tr><td>p(x)</td><td>+</td></tr></table>	x		p(x)	+	<table border="1" data-bbox="798 1209 1085 1321"><tr><td>x</td><td>x_0</td><td></td></tr><tr><td>p(x)</td><td>+</td><td>0</td><td>+</td></tr></table>	x	x_0		p(x)	+	0	+	<table border="1" data-bbox="1173 1214 1490 1335"><tr><td>x</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td></td></tr><tr><td>p(x)</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr></table>	x	x_1	x_2		p(x)	+	0	-	0	+
x																								
p(x)	+																							
x	x_0																							
p(x)	+	0	+																					
x	x_1	x_2																						
p(x)	+	0	-	0	+																			
$a < 0$ Position de (C) par rapport à l'axe des abscisses																								
Tableau de signe de $ax^2 + bx + c$	<table border="1" data-bbox="509 1881 782 1991"><tr><td>x</td><td></td></tr><tr><td>p(x)</td><td>-</td></tr></table>	x		p(x)	-	x																		
x																								
p(x)	-																							

--	--	--	--

Le signe du trinôme, $P(x) = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$), se déduit de la position de sa courbe représentative (C) par rapport à l'axe des abscisses.

NB: Le trinôme: $ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$) est du signe de **a**, pour toutes les valeurs de la variable réelle x , sauf celles situées entre les racines s'il y en a

EVALUATION S

Dans chacun des cas suivants où p est un polynôme de degré 2, déterminer :

- a- la forme canonique de $p(x)$.
- b- Les racines éventuelles de $p(x)$ puis étudier le signe de $p(x)$.

- 1) $P(x) = x^2 + x - 1$.
- 2) $P(x) = -x^2 + x - 1$.
- 3) $P(x) = x^2 - 7x + 6$.
- 4) $P(x) = -5x^2 + x + 1$.
- 5) $P(x) = x^2 + 2x + 2$.
- 6) $P(x) = 4x^2 + 2x - 2$.
- 7) $P(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x - 1$.
- 8) $P(x) = x^2 + x + 1$.

EXERCICES

Fonctions polynômes (Généralités).

1 Dans chacun des cas suivants où p est un polynôme de degré 2, déterminer :

- c- la forme canonique de $p(x)$.
- d- Les racines éventuelles de $p(x)$ puis étudier le signe de $p(x)$.

9) $P(x) = x^2 + x - 1.$

10) $P(x) = -x^2 + x - 1.$

11) $P(x) = x^2 - 7x + 6.$

12) $P(x) = -5x^2 + x + 1.$

13) $P(x) = x^2 + 2x + 2.$

14) $P(x) = 4x^2 + 2x - 2.$

15) $P(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x - 1.$

16) $P(x) = x^2 + x + 1.$

2 Dans chacun des cas suivants où p est un polynôme de degré 2, déterminer :
les réels a ; b ; c ; d etc.....

1) $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

2) $q(x) = 2x^3 - 12x - 9$

$q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

3) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$

$f(x) = (2ax + 1)(-bx - 1)(x + c)$

4) $g(x) = 2x^3 - 12x - 9$

$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

5) $i(x) = x^2 + x - 1.$

$i(x) = (2x + a)(x - b)$

6) $k(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1.$

$k(x) = ax^2 + bx + c$

7) $l(x) = x^2 - 7x + 9.$

$l(x) = \left(\frac{-3a}{4}x - b\right)^2$

3 Parmi les fonctions numériques suivantes dire celles qui sont rationnelles puis en déduire leur ensemble de définition :

1) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$; 2) $g(x) = \frac{1}{x} + x^2 - 7x + 9$; 3) $h(x) = (-x + 8)^3$

4) $p(x) = \frac{-x^2 + 3x - 2}{x + 5}$; 5) $q(x) = \left(\frac{7x + 1}{-x - 1}\right)^3$; 6) $k(x) = \sqrt{\frac{x + 2}{-x + 3}}$;

7) $i(x) = \frac{x + 2}{(2x + 1)(x^2 - 1)}$

4 Dans chacun des cas suivants :

- a- Déterminer l'ensemble de définition D_f .
- b- Simplifier $f(x)$ sur D_f .
- c- Etudier, suivant les valeurs de x , le signe de $f(x)$.

1) $f(x) = \frac{5x^2 - 3x - 2}{(-x+1)(x+2)}$; 2) $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{-x^2 + 4x - 3}$; 3) $f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 - x + 2}{3x^2 - 6x + 3}$

5 1) Trouver deux fonctions polynômes f et g du premier degré telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $x^2 f(x) + (x-1)^2 g(x) = 1$

2) Soit la fonction polynôme $P : x \rightarrow 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$
Trouver deux nombres a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $p(x) = (x^2 + ax + b)^2 - x^4$.
En déduire une factorisation de P .

6 Développer $(x^2 + bx + c)^2$.

1) Montrer que $(x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9)$ est le carré d'un polynôme que l'on déterminera.

7 Déterminer les réels m , n et p pour que : $x^5 - 2x^4 - 6x^3 + mx^2 + nx + p$ soit factorisable par $(x-3)(x^2-1)$. Donner alors une factorisation.

8 Trouver le nombre réel k tel que la fonction polynôme suivante :
 $P : x \rightarrow 4x^4 - 20x^3 + 53x^2 - 10kx + 7k$ soit le carré d'une fonction polynôme de degré 2.

9 Soit p le polynôme défini par $p(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

On suppose que $p(x)$ admet trois racines distinctes x_1 , x_2 et x_3 .

- 1) Calculer : $x_1 + x_2 + x_3$; $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3$ et $x_1 x_2 x_3$ sans calculer les racines.
- 2) En déduire alors la valeur de $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$
- 3) Résoudre $p(x) = 0$. Vérifier les résultats obtenus au 1).

10 Soit $p(x) = 8x^3 - 48x^2 + 94x - 60$.

- 1) Déterminer les trois réels a , b et c tel que :
 $p(x) = a(2x-5)^3 + b(2x-5)^2 + c(2x-5)$.
- 2) En déduire une factorisation de $p(x)$.

11 Dans chacun des cas suivants, déterminer le polynôme $p(x)$ de degré 3 tel que :

- 1) $P(x)$ admet -1 , 1 et 2 pour racines et $p(0) = 4$.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p(x+1) - p(x) = x(x+1)$ et $p(1) = 0$.

12 Soit l'équation : $x^3 + 9x^2 + 51x + 155 = 0$.

Déterminer le réel h tel que, en posant $X + h = x$, l'équation proposée s'écrive alors : $X^3 + pX + q = 0$

Où p et q sont des coefficients que l'on déterminera.

13 Soit les fonctions polynômes p et q définies par :

$$P(x) = 2x^5 - 19x^4 + 69x^3 - 118x^2 + 92x - 24 \quad \text{et}$$

$$q(x) = x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 36x - 36$$

1) a- Montrer que 2 est un zéro triple de p , puis en déduire les autres zéros de p .

b- Résoudre l'inéquation : $x \in [-5 ; 5] ; P(x) \leq 0$.

2) Calculer $q(2)$ et $q(3)$ puis en déduire les zéros de q .

3) Soit la fraction rationnelle $h : x \rightarrow \frac{p(x)}{q(x)}$

a- Déterminer l'ensemble de définition D_h de h puis simplifier $h(x)$.

b- Déterminer le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x .

14 Soit les fonctions polynômes f et g définies par :

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 6 \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - x - 2$$

1) Déterminer les zéros de f .

2) Soit la fraction rationnelle $h : x \rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$

c- Déterminer l'ensemble de définition D_h de h puis simplifier $h(x)$.

d- Montrer qu'il existe trois réels a ; b et c tels que : $\forall x \in D_h$ on a :

$$h(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

e- Déterminer le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x .

15 Soit la fonction polynôme h définie par : $h(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 2$.

1) Déterminer les réels a , b et c tels que : $h(x) = (x^2 - 2)(ax^2 + bx + c)$.

3) Soit la fraction rationnelle $f(x) = \frac{1}{h(x)} + \frac{3x}{x^4 - 4}$

a- Déterminer l'ensemble de définition de f .

b- Ecrire f sous forme $\frac{N(x)}{D(x)}$ où N et D sont deux polynômes.

c- Résoudre l'équation $f(x) = 0$

16 Soit la fonction rationnelle f définie par : $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 2}$.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2) Déterminer les réels a , b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$
- 3) Résoudre dans $\mathbb{R}$:
 - a- l'équation $f(x) = x$
 - b- l'inéquation $f(x) \leq x$

Fonctions polynômes du second degré

Dénombrement

1) Théorie des ensembles :

a) Activité 1 :

Combien de mot peut on former avec 4 lettres et sans répétition avec le mot : SELN ?

SELN ;	ESLN ;	LESN ;	NELS ;
SENL ;	 ;	 ;	 ;
SLNE ;	 ;	 ;	 ;
SLNE ;	 ;	 ;	 ;
SLEN ;	 ;	 ;	 ;
SNLE ;	 ;	 ;	 ;
SNEL ;	 ;	 ;	 ;

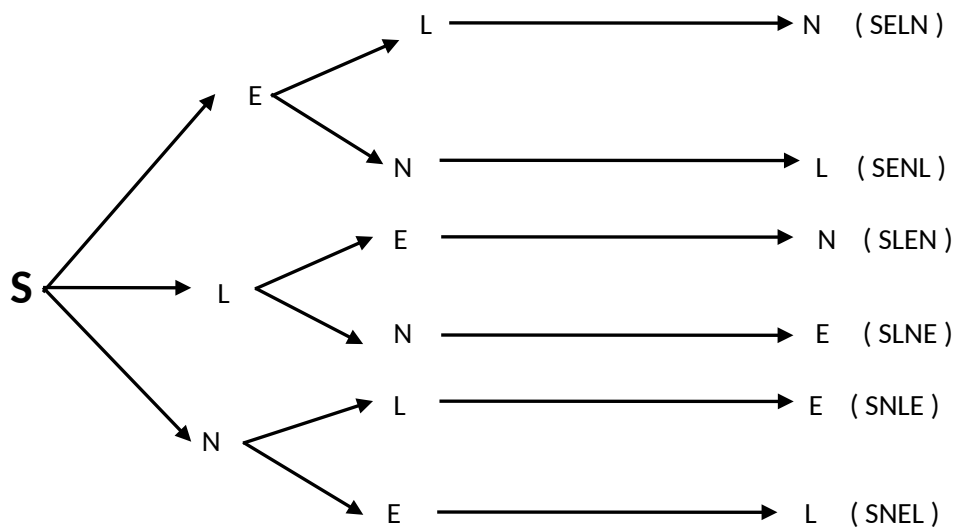
Pour **S** en 1^{ère}
Position

Pour **E** en 1^{ère}
Position

Pour **L** en 1^{ère}
Position

Pour **N** en 1^{ère}
Position

Ainsi on aura donc formé au total $6 \times 4 = 24$ mots. Ceci peut être résumé par l'arbre ou le diagramme suivant :



On a donc fait un arrangement de 4 lettres pour 4 places et d'une manière symbolique on écrit : $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

b) activité 2 :

Former un bureau de 3 personnes (un directeur, un secrétaire et un commis) ; combien de bureau peut on former ? Sachant que le bureau n'admet pas de doubles postes.

Solution :

$$\begin{array}{|c|} \hline D \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline S \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|} \hline C \\ \hline \end{array} = 45 \times 44 \times 43 = 85140$$

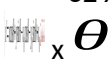
On a donc fait un arrangement de 45 personnes pour 3 élèves. On la note ainsi ${}_{45}P_3 = 45 \times 44 \times 43 = 85140$

c) **Activité 3 :**

Dans un jeu de 32 cartes ordinaires, on tire successivement 3 cartes.

- 1) Quel est le nombre de tirage possible ?
- 2) Quel est le nombre de tirage contenant 1 seule carte cœur ?
- 3) Quel est le nombre de tirage possible contenant 1 seule carte noire ?

Solution :

- 1) On a  = $32 \times 31 \times 30 = 29760$
- 2) On a :  $\times \theta$
- 3) On a :  Ω

2) Probabilité sur un ensemble fini :

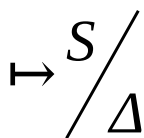
a- **Vocabulaire :**

- **Expérience aléatoire** : expérience dont le résultat dépend du hasard.
- **Eventualité** : résultat possible d'une expérience aléatoire.
- **Univers ou CardE = n**: ensemble de toutes les éventualités d'une expérience aléatoire.
- **Événement** : sous-ensemble de l'univers.
- **Événement élémentaire** : événement réduit à un seul élément.
- **Union de 2 ensembles**: Soit A et B deux ensembles finis. On appelle Union de A et B

l'ensemble des éléments de A ou B. On note : **AUB** = $\{x/x \text{ } \triangle \}$

- **Intersection de 2 ensemble** : L'intersection de deux ensembles A et B regroupent les éléments communs aux deux ensembles A et B. On note : **A**

N.B :



Exercices d'application :

Soit E et F deux ensembles tels que :

$$E = \{0, 1, 2, 3\}, F = \{1, 2, 0, a, b, c, 4, 8\}$$

- 1) Déterminer $E \cup F$ et $E \cap F$
- 2) Déterminer $\text{card}E$, $\text{card}F$, $\text{card}(E \cap F)$, $\text{card}(E \setminus F)$

Solution :

- 1) $E \setminus F = \{0, 1, 2, 3, 4, 8, a, b, c\}$
 $E \cap F = \{0, 1, 2\}$
- 2) $\text{Card } E = 4, \text{Card } F = 8$
 $\text{Card } (E \cup F) = 9, \text{Card } (E \cap F) = 3$

b- Propriétés :

$P_1 : \text{Card } \emptyset = 0$

$P_2 : \text{Soient } A \text{ et } B \text{ deux univers finis :}$

- $\text{Card } (A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card } (A \cap B)$
- $\text{Card } (A \setminus B) = \text{Card } A - \text{Card } (A \cap B)$

$P_3 : \text{Soient } A \text{ et } B, \text{ deux ensembles distinctes de } B, \text{ on appelle produit cartésien } A \times B \text{ l'ensemble défini par : } \{(x, y) / x \in A, y \in B\}$

Exemple:

Soient A et B deux ensembles tel que :

$$A = \{1, 2\}; B = \{a, b, c\}$$

- a) Donner les éléments de $A \times B$
- b) Déterminer $\text{Card } (A \times B)$

Solution :

- a) $A \times B = \{(1, a); (1, b); (1, c); (2, a); (2, b); (2, c)\}$
- b) $\text{Card } (A \times B) = \text{Card } A \times \text{Card } B = 2 \times 3 = 6.$

N.B :

- $A \times B \neq B \times A$ (le produit cartésien n'est pas commutatif)
- $\text{Card } (A \times B) = \text{Card } A \times \text{Card } B.$

$P_4 : \text{Complémentarité : On appelle complémentaire de } A \text{ dans } B \text{ l'ensemble des éléments de } B \text{ n'appartenant pas à } A \text{ on la note } B \setminus A$

Exemple :

Soit $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}; F = \{0, 3, 4, 5\}$

- a) Déterminer $E \setminus F$
- b) Déterminer $\text{Card } E \setminus F$

Solution

a) $E \setminus F = \{1, 2, 6, 7, 8\}$

b) $\text{Card } E \setminus F = \text{Card } E - \text{Card } F = 9 - 4 = 5$

N.B : Card $\vec{u}$ = Card E - Card F

EXERCICES