

Classe : 11^{ème} S-E-S**Chapitre : 3**

Durée : 6H

Fonction polynôme du second degré :**Domaine :** Sciences, Mathématiques et Technologiques**Compétences :** Résoudre une situation problème, Communiquer des messages utilisant le langage et le symbolisme Mathématiques.**Composantes :** Diagnostiquer la situation problème, mettre à l'essai des pistes de solutions, partager les informations relatives à la démarche et formuler les résultats.**Manifestations :** Sélectionner les données mathématiques, scientifiques et technologiques qui sont en rapport avec la situation, établir des relations entre les données retenues, inventorier des différentes pistes de solution, Choisir une piste et l'appliquer.**Contenu :****Ressources Educatives :****Ressources humaines :** Professeur, élèves,**Ressources Matérielles :** Chiffon, craie, règle, équerre ...**Stratégies d'animation :** Travaux en groupe (pédagogie active).**Séquence1 : Généralités (6h)****Activité :**

Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes :

a) $f(x) = (2x - 3)(x + 2)$

b) $g(x) = (x + 3)^2 - 5$

Synthèse :**Définition :**On appelle fonction polynôme du second degré toute fonction $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui à x associe $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

Exemple : les fonctions suivantes :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x^2 - 5x + 3$$

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 - 1$$

Sont des fonctions polynômes du second degré.

Forme canonique d'un polynôme du degré :**Activité :**Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) un polynôme du second degré.

Vérifier que $P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$

Synthèse :

L'écriture

$$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] \text{ avec } \Delta = b^2 - 4ac$$

est la forme canonique de $P(x)$. Δ est appelé le discriminant de $P(x)$.**Evaluation :**

Mettre sous forme canonique :

$$P(x) = -2x^2 + 4x + 3 ; h(x) = x^2 + 3x + \frac{1}{2}$$

Factorisation d'un polynôme de degré 2 :Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$- \text{Si } \Delta > 0, P(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \text{ avec } x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

 x_1 et x_2 sont appelés racines ou zéros du polynôme $P(x)$.

$$- \text{Si } \Delta = 0, P(x) = a(x - x_0)^2 \text{ avec } x_0 = \frac{-b}{2a}$$

 x_0 est appelé racine ou zéro du polynôme $P(x)$. $- \text{Si } \Delta < 0$, on ne peut pas factoriser $P(x)$.**Exemple :**

Factoriser, si possible :

$$2x^2 - 3x + 1 ; 4x^2 - 12x + 9 ; x^2 + x + 1$$

Remarque :Soit l'équation $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

$$- \text{Si } a + b + c = 0 \text{ alors } x_1 = 1 \text{ et } x_2 = \frac{c}{a}.$$

$$- \text{Si } a - b + c = 0 \text{ alors } x_1 = -1 \text{ et } x_2 = -\frac{c}{a}.$$

Somme et Produit des solutions :Soit l'équation (E): $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).Si (E) admet deux solutions x_1 et x_2 alors la

$$\text{somme } S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \text{ et le produit } P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}.$$

Remarque :Deux nombres x_1 et x_2 dont la somme est S et le produit est P sont solution de l'équation :

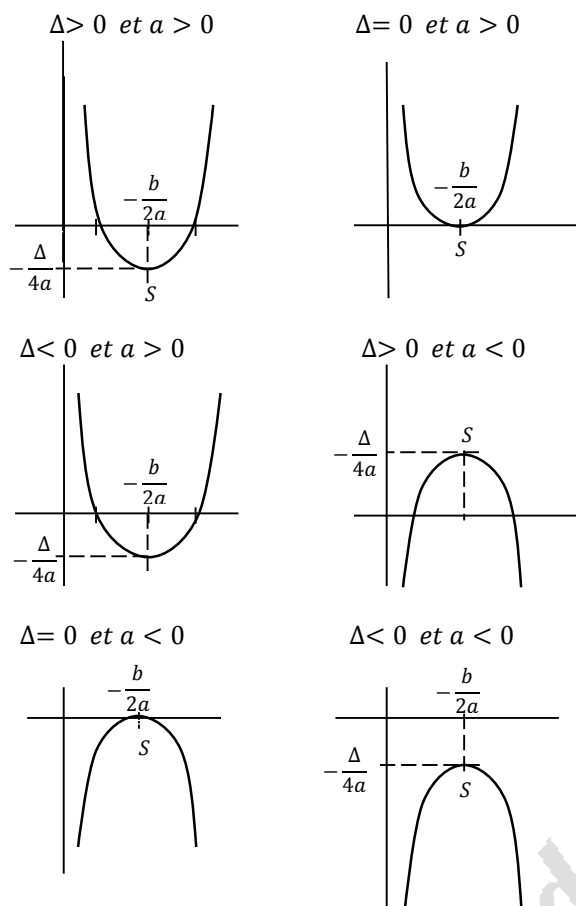
$$X^2 - SX + P = 0.$$

Evaluation :

1) Trouver les réels x et y tels que $\begin{cases} x + y = 5 \\ x \times y = 6 \end{cases}$

2) Soit l'équation $x^2 + 10x + 21 = 0$

Trouver les racines en utilisant la somme S et le produit P .**Représentation graphique :**Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) un polynôme du second degré.La représentation graphique de P dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est une parabole.Le sommet S de cette parabole a pour coordonnées $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.


Evaluation :

Représenter graphiquement dans un repère orthonormé la fonction $f(x) = x^2 + 2x + 3$.

Equation du second degré :
Activité :

Soit l'équation (E): $x^2 - 4x + 4 = 0$.

a) Montrer que (E) est équivalente à $(x - 2)^2 = 0$.

b) En déduire la résolution de (E).

Synthèse :
Définition :

On appelle équation du second degré à une inconnue, toute équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$

Exemple :

$$2x^2 - 4x + 7 = 0 ; x^2 + 7 = 0 ; -x^2 + 3x = 0$$

Résolution :

Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ . On peut :}$$

-Calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$

* Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'admet pas de solution $S = \emptyset$

* Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une solution double $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ d'où $S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$.

* Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet 2 solutions distinctes $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

D'où $S = \{x_1; x_2\}$

Evaluation :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

a) $2x^2 - 5x + 3 = 0$ b) $-3x^2 + 6x + 9 = 0$

c) $x^2 + 4x - 7 = 2x^2 - 3x + 2$

Signe d'un polynôme du second degré :

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

Pour étudier le signe de $P(x)$, on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

-Si $\Delta > 0$, on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$P(x)$	Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a

x_1 et x_2 sont les racines de $P(x)$.

-Si $\Delta = 0$, on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$P(x)$	Signe de a	0	Signe de a

x_0 est le zéro de $P(x)$.

-Si $\Delta < 0$, on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)$	Signe de a	

Evaluation :

Etudier le signe des fonctions suivantes :

$$f(x) = -2x^2 + 5x + 3 ; g(x) = 2x^2 - 7x + 15 ;$$

$$h(x) = -2x^2 - 4x - 3 .$$

Inéquation du second degré :
Définition :

Toute inéquation de forme réduite $ax^2 + bx + c > 0$; $ax^2 + bx + c \geq 0$; $ax^2 + bx + c < 0$ ou $ax^2 + bx + c \leq 0$ est une inéquation du second degré.

Résolution :

Soit l'inéquation (I): $ax^2 + bx + c < 0$ avec $a \neq 0$. Pour résoudre l'inéquation (I), on étudie le signe de $ax^2 + bx + c$.

Evaluation :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations

$$\text{suivantes : } 3x^2 + 6x - 9 \leq 0 ;$$

$$2x^2 + x - 1 \geq 0 ; 2x^2 + 5x - 2 > 0 .$$