

Classe : 11ème SES

CHAPITRE 2

SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

Domaine : Sciences, Mathématiques et Technologies

Compétences : Résoudre une situation problème

Composantes : Mettre à l'essai des pistes de solution et partager les informations relatives à la démarche scientifique et mathématique

Manifestations : Établir les relations entre les données retenues et inventorier les pistes de solutions

Ressources éducatives : Professeur, élèves, matériels didactiques

Stratégies d'animation : Travaux en groupe (pédagogie active).



Contenu

Séquence 1 : Système d'équation et Matrices

1. Système et matrice d'ordre 2

Approche 1 en groupe de travail

Soit le système : $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + 3y = -5 \end{cases}$

Consignes

Préciser le nombre d'inconnue, leur coefficient et le nombre d'équation de ce système d'équations.

Synthèse Partielle 1

On dit qu'on a un système d'ordre 2 et le tableau des coefficients d'ordre 2 est appelé matrice.

Synthèse Générale 1

Définition

-On appelle système d'équation dans $\mathbb{R}^2$ ou système d'ordre 2, le système défini par :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Où a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 et c_2 sont des réels

-On appelle matrice des coefficients de ce système, le tableau défini par :

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

-On appelle matrice colonne ou uni colonne la matrice des constantes du système définie par :

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

-On appelle matrice complète du système le tableau défini par :

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array} \right)$$

Évaluation 1

Déterminer la matrice système, la matrice colonne et la matrice complète des systèmes d'équations suivants :

$$\text{a) } \begin{cases} -x + 2y + 1 = 0 \\ 3x + y = 5 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 4x - y = 0 \\ 3x - 2 = 0 \end{cases}$$

2. Système et matrice d'ordre 3

Synthèse Générale 2

Définition

-On appelle système d'équation dans $\mathbb{R}^3$ ou système d'ordre 3, le système défini par :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Où $a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2, a_3, b_3, c_3$ et d_3 sont des réels.

-On appelle matrice des coefficients de ce système, le tableau défini par :

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

-On appelle matrice colonne ou uni colonne la matrice des constantes du système définie par :

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}.$$

© SAMATE L@mine

-On appelle matrice complète du système le tableau

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array} \right).$$

Évaluation 2

Déterminer les matrices associées aux systèmes

suivants :
$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x - y + 2z = 1 \\ 4x - y + z = 0 \end{cases}$$

Séquence 2 : Déterminant d'une matrice

Déterminant d'ordre 2 et 3

Approche 2 en groupe de travail

On considère les vecteurs $\vec{u}(1; 2)$ et $\vec{v}(7; -1)$.

Consignes

Calculer $\det(\vec{u}, \vec{v})$.

Synthèse Partielle 2

On dit que l'on a calculé le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Synthèse Générale 3

a) Définition déterminant d'ordre 2

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$

On nomme déterminant de A, le réel noté $\det(A)$ tel que :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

b) Définition déterminant d'ordre 3

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$

On appelle déterminant de A, le réel $\det(A)$ tel que :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1^{(+)} & b_1 & c_1 \\ a_2^{(-)} & b_2 & c_2 \\ a_3^{(+)} & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

c) Calcul du déterminant par la méthode classique

$$\det(A) = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2$$

d) Calcul du déterminant par la règle de Sarrus

Pour le calcul de $\det(A)$ par la règle de Sarrus, on utilise la disposition suivante :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \nearrow a_1 b_1 c_1 \\ \nearrow a_2 b_2 c_2 \\ \nearrow a_3 b_3 c_3 \\ \searrow a_1 b_2 c_3 \\ \searrow a_2 b_1 c_3 \\ \searrow a_3 b_2 c_1 \end{array}$$

$$= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2$$

On convient que :

Les flèches descendantes ($\searrow$) correspondent aux termes précédés du signe positif (+)

Les flèches ascendantes ($\nearrow$) correspondent aux termes précédés du signe négatif (-)

Évaluation 3

Déterminer le déterminant des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 6 & 5 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Séquence 3 : Résolution de systèmes linéaires d'équations

1. Système d'équation d'ordre 2

Approche 3 en groupe de travail

Soit le système d'équation (S) :
$$\begin{cases} -x + y = 2 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Consignes

Montrer que le couple $(-1 ; 1)$ vérifie (S).

Synthèse Partielle 3

On dit que le couple $(-1 ; 1)$ est solution de (S).

Synthèse Générale 4

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système d'équation

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

On calcule le déterminant du système :

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

On calcule D_x (le déterminant par rapport à x), le déterminant obtenu en remplaçant dans le déterminant du système la 1^{ère} colonne par celle des termes indépendants:

$$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$$

On calcule de façon similaire le déterminant par rapport à y (en remplaçant dans le déterminant du système la 2^{ème} colonne par celle des termes indépendants).

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

-Si $D \neq 0$

Alors le système admet une unique solution telle que

$x = \frac{D_x}{D}$ et $y = \frac{D_y}{D}$, alors l'ensemble solution est $S = \{(x; y)\}$.

-Si $D = 0$

Et que $D_x \neq 0$ et $D_y \neq 0$, alors le système n'admet pas de solution $S = \emptyset$.

-Mais si $D_x = D_y = 0$, alors le système admet une infinité de solution.

Évaluation 4

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2y + y = 4 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} -x + 2y = 1 \\ 2x - 4y = -2 \end{cases}$$

2. Système d'équations d'ordre 3

Approche 4 en groupe de travail

On considère le système dans $\mathbb{R}^3$

$$(S): \begin{cases} x + y + z = 5 \\ -x + 2y - z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 2 \end{cases}$$

Vérifier que $x = 1, y = 2$ et $z = 3$ sont solutions de (S).

Synthèse Générale 5

Soit à résoudre le système d'équation dans $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

On calcule le déterminant du système

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Puis les déterminants par rapport à x, y et z obtenus en remplaçant dans le déterminant du système la 1^{ère} resp. la 2^{ème}, resp. la 3^{ème} colonne par celle des termes indépendants:

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

-Si $D \neq 0$

Alors le système admet une solution unique telle que

$$x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D} \text{ et } z = \frac{D_z}{D}.$$

D'où $S = \{(x; y; z)\}$

-Si $D = 0$

Dans ce cas le système est impossible ou indéterminé, c'est-à-dire :

-Si $D_x \neq 0, D_y \neq 0$ et $D_z \neq 0$, alors $S = \emptyset$

-Si $D_x = D_y = D_z = 0$, alors le système admet une *infinité* de solution.

Remarque

-Un système d'équation est dit **homogène** si tous les seconds membres du système sont nuls.

-Un système est **carré** s'il a le même nombre d'équation que d'inconnues.

Évaluation 5

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants :

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - y + z = 7 \\ x + 2y - z = 6 \\ -x + y + 2z = 11 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2x - y + 3z = 3 \\ -x + 3y + z = 2 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + y + z = -1 \\ -2x - 2y - 2z = 2 \\ -x - y - z = 1 \end{cases}$$

3. Système d'équation sur-abondant

Synthèse Générale 6

Définition

Un système est surabondant s'il a plus d'équations que d'inconnues.

Évaluation 6

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système d'équation

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 0 \\ -3x + 2y = 7 \end{cases}$$

4. Système d'équation sous-abondant

Synthèse Générale 7

Définition

Un système est sous-abondant s'il a moins d'équations que d'inconnues.

Évaluation 7

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système d'équation

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ 2x - y + z = -1 \end{cases}$$

Spéciale : Histoire de mathématiciens

Sarrus

Pierre-Frédéric Sarrus né le 10 mars 1798 à Saint-Affrique et mort le 20 novembre 1861, est un mathématicien français. Ses travaux portent sur les méthodes de résolution des équations numériques, et sur le calcul des variations. Mais il est surtout célèbre auprès des étudiants en mathématiques pour une règle de calcul des déterminants de taille trois, qui porte son nom. Celle-ci fut explicitée pour la première fois dans l'article *Nouvelles méthodes pour la résolution des équations* publié à Strasbourg en 1833.

(source : Wikipédia)



Mention légale – Mathematikos