

Systèmes

Classe : 11^{ème} SES

Durée : 12 H

Domaine : SMT

Discipline : Mathématique

Thème : Systèmes

Compétences :

- Résoudre une situation problème
- Communiquer des messages en utilisant le langage et le symbolisme mathématique.

Composantes et manifestations :

- Participer à des échanges d'informations à Caractère Scientifique, mathématique ou technologiques.
- Partager les informations relatives à la démarche Scientifique et mathématique.

Ressources Educatives

Ressources humaines : Professeurs ; élèves

Ressources Matérielles : tableau, livres, règle, équerre,

Stratégies d'animation : Travaux en groupes

Déroulement des activités

Situation-Problème :

Activité1 :

Dans un théâtre, la salle compte 400 places. Les « parterres » sont à 150 F et les « balcons » à 120 F. Quand le théâtre est plein, la recette est de 53400 F.

Combien y a-t-il de « parterres » ? de « balcons » ?

Activité2 :

Dans un musée, il y a trois tarifs pour les tickets d'entrée :

- ▢ Le tarif « adultes » ;
- ▢ Le tarif « enfants » ;
- ▢ Le tarif « groupes de plus de deux personnes ».

34 32 34 / 66 34 32 34

De plus, le dimanche, les tarifs « adultes » et « enfants » sont réduits de 50 % de leur prix normal. Pendant trois jours consécutifs, on note le nombre de tickets délivrés de chaque sorte et la recette de la journée.

- Le premier jour, on délivre 70 tickets « adultes, 28 tickets « enfants » et 140 tickets « groupes ». La recette est de 78400 F.
- Le deuxième jour, on délivre 120 tickets « adultes, 40 tickets « enfants » et 60 tickets « groupes ». La recette est de 96000 F.
- Le trois jour est un dimanche, on délivre 150 tickets « adultes, 150 tickets « enfants » et 75 tickets « groupes ». La recette est de 82500 F.

Quels sont les tarifs des entrées à ce musée ?

I. Système d'équations du 1er degré à 2 inconnues :

1. Définition :

Etant donné 2, 3, ... équations du premier degré dans $\mathbb{R}^2$, le système formé par ces équations est appelé système de 2, 3, ... équations du premier degré dans $\mathbb{R}^2$.

Ainsi a, b, c, a', b', c' é tant des nombres réels donnés,

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$$

Est un système de deux équations du premier degré dans $\mathbb{R}^2$.

Exemples :

2. Différentes méthodes de résolutions :

a) 1^{er} méthode : Méthode par substitution

Dans la méthode par substitution, on exprime une des deux inconnues en fonction de l'autre à l'aide d'une des équations, et l'on reporte (ou l'on substitue) le résultat obtenu dans l'équation restante.

Exemple :

$$(S) \begin{cases} 6x - 5y = 10 & (1) \\ 8x + 3y = 52 & (2) \end{cases}$$

➤ Dans l'équation (1) exprimons x en fonction de y : $6x - 5y = 10 \Leftrightarrow x = \frac{5y + 10}{6}$ (1')

➤ Dans l'équation (2) remplaçons x par sa valeur et calculons la valeur y :

$$8x + 3y = 52 \Leftrightarrow 8\left(\frac{5y + 10}{6}\right) + 3y = 52 \Leftrightarrow \frac{20y + 40}{3} + 3y = 52 \Leftrightarrow 20y + 40 + 9y = 156 \Leftrightarrow 29y = 116 \Leftrightarrow y =$$

➤ Remplaçons y par sa valeur dans l'équation (1') et calculons la valeur de x :

$$\text{➤ } x = \frac{5y + 10}{6} \Leftrightarrow x = \frac{5(4) + 10}{6} \Leftrightarrow x = \frac{20 + 10}{6} \Leftrightarrow x = \frac{30}{6} \Leftrightarrow x = 5$$

34 32 34 / 66 34 32 34

Conclusion : nous avons montré que le système (s) admet une solution unique : le couple $((5; 4))$.

b) 2^{ème} méthode : Méthode par combinaison

Dans la méthode par combinaison, on multiplie l'une ou les deux équations par des nombres convenablement choisis de telle manière que l'une des inconnues disparaisse par addition membre à membre.

Exemples : $(S) \begin{cases} 6x - 5y = 10 & (1) \\ 8x + 3y = 52 & (2) \end{cases}$

✓ Eliminons x :

$$\begin{cases} 6x - 5y = 10 \\ 8x + 3y = 52 \end{cases} \begin{array}{l} \times -8 \\ \times 6 \end{array} \Leftrightarrow (S)(+) \begin{cases} -48x + 40y = -80 \\ 48x + 18y = 312 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 58y = 232 \\ y = 4 \end{cases}$$

✓ Eliminons y :

$$\begin{cases} 6x - 5y = 10 \\ 8x + 3y = 52 \end{cases} \begin{array}{l} \times 3 \\ \times 5 \end{array} \Leftrightarrow (S)(+) \begin{cases} 18x - 15y = 30 \\ 40x + 15y = 260 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 58x = 290 \\ x = 5 \end{cases}$$

Conclusion : nous avons montré que le système (s) admet une solution unique : le couple $((5; 4))$.

c) 4^{ème} méthode : Méthode par déterminant

Soit le système de deux équations du premier degré à deux inconnues x et y :

$$\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$$

Où a, b, c, a', b', c' sont des nombres réels donnés.

Le déterminant du système est : $Dét = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$

$$\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$$

Le déterminant secondaire en x : $\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$

$$D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b$$

Le déterminant secondaire en y : $\begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$

$$D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$$

34 32 34 / 66 34 32 34

✚ Si $\text{Dét} \neq 0$, le système admet une solution unique (x, y) tel que :

$$x = \frac{D_x}{\text{Dét}} \text{ et } y = \frac{D_y}{\text{Dét}} \text{ et } S = \{(x, y)\}$$

✚ Si $\begin{cases} \text{Dét} = 0 \\ D_x \neq 0 \text{ ou } D_y \neq 0 \end{cases}$, le système n'a pas de solution ;

✚ Si $\begin{cases} \text{Dét} = 0 \\ D_x = 0 \text{ et } D_y = 0 \end{cases}$, le système admet une infinité de solutions.

Activité :

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

a. $(x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} 5x - 2y = 19 \\ 7x + 8y = 5 \end{cases} ;$

Solution :

a. $(x, y) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} 5x - 2y = 19 \\ 7x + 8y = 5 \end{cases}$

$$\text{Dét} = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 5 \times 8 - (-2) \times 7 = 40 + 14 = 54$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 19 & -2 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 152 + 10 = 162$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 5 & 19 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 25 - 133 = -108$$

$$x = \frac{D_x}{\text{Dét}} = \frac{162}{54} = 3 \text{ et } y = \frac{D_y}{\text{Dét}} = \frac{-108}{54} = -2 \text{ et } S = \{(3; -2)\}$$

II. Système d'équations linéaires à trois (3) inconnues :

soit (S) un système de trois équations du premier degré dans $\mathbb{R}^3$.

$$(S) \ (x; y; z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

1. Différentes méthodes de résolutions :

a. Méthode de substitution :

Dans la méthode par substitution, on exprime une des trois inconnues en fonction des autres à l'aide d'une des équations, et l'on reporte (ou l'on substitue) le résultat obtenu dans l'équation restante.

Activité :

$$(x; y; z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} 2x - 3y + z = -3 & (1) \\ 5x - y + 3z = 8 & (2) \\ -x + 3y - 4z = -13 & (3) \end{cases}$$

34 32 34 / 66 34 32 34

Solution :

Dans (1) $\Rightarrow z = -2x + 3y - 3$. En remplaçant z par sa valeur dans les deux autres équations :

$$(2) \Rightarrow 5x - y + 3z = 8 \Rightarrow 5x - y + 3(-2x + 3y - 3) = 8 \Rightarrow -x + 8y = 17$$

$$(3) \Rightarrow -x + 3y - 4z = -13 \Rightarrow -x + 3y - 4(-2x + 3y - 3) = -13 \Rightarrow 7x - 9y = -25$$

On a le système qui devient :

$$\begin{cases} -x + 8y = 17 & (1') \\ 7x - 9y = -25 & (2') \end{cases}$$

Dans (1') $\Rightarrow x = 8y - 17$. En remplaçant x par sa valeur dans (2'). On a :

$$(2') \Rightarrow 7x - 9y = -25 \Rightarrow 7(8y - 17) - 9y = -25 \Rightarrow y = 2.$$

En remplaçant $y = 2$ dans (1'), on obtient $x = -1$

Et enfin remplaçant $x = -1$ et $y = 2$ dans (1), on obtient $z = 5$.

$$S = \{(-1 ; 2 ; 5)\}$$

b. Méthode pivot de Gauss :

soit (S) un système de trois équations du premier degré dans $\mathbb{R}^3$.

$$(S) \ (x; y; z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

La résolution se fera en deux :

→ Transformation de (S) en un système équivalent (S') plus simple que (S) c'est-à-

dire : $(S') \ (x; y; z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} ax + by + cz = d \\ my + nz = t \\ n'z = t' \end{cases}$

→ Résolution de (S') .