

FONCTIONS POLYNOMES DU SECOND DEGRE

11^{ème} SES

1- Définition :

On appelle fonction polynôme du second degré toute fonction de la forme $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \in \mathbb{R}^*$; $b \in \mathbb{R}$; $c \in \mathbb{R}$ ou x est la variable réelle

Application : dites si les fonctions données sont des fonctions polynômes du second degré.

2- Forme canonique d'un polynôme du second degré

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$

$$= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \text{ est la forme canonique de } P(x).$$

Si l'on pose $\Delta = b^2 - 4ac$ appelé le discriminant réel. Donc on peut encore écrire le polynôme $P(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$

Application : déterminer la forme canonique des polynômes suivantes :

a- $P(x) = -2x^2 + 8x + 6$

b- $P(x) = 3x^2 - 6x + 24$

c- $G(x) = -u^2 + 5u - 4$

d- $R(x) = t^2 - 4t + 7$

3- Application à la représentation graphique d'une fonction trinôme quelconque

Activité :

Soit à construire la représentation graphique (C_f) de la fonction

$$f : x \mapsto x^2 - 2x - 1$$

- a- Déterminer la forme canonique de $f(x)$.
- b- Construire le sommet O' de coordonnées $(1; -2)$.
- c- Construire l'axe de symétrie d'équation (D) : $x = 1$.
- d- Construire la branche de la parabole (C_f) droite de (D) , en plaçant les points $x > 1$; $A(2; -1)$ et $B(3; 2)$.
- e- Compléter la construction.

Solution

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ qui admet comme forme canonique

$$P(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]. \text{ Posons } \alpha = -\frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Donc $P(x)$ s'écrit sous la forme $P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$

Pour faire la représentation graphique d'une fonction trinôme du second degré, on peut construire la parabole d'équation $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

Pour cela :

- Placer le sommet $O'(\alpha; \beta)$ de la courbe de P
- Tracer la droite (D) d'équation $x = \alpha$
- Construire (C) , la branche de la parabole (C_p) située à droite de (D)
- Compléter (C_p) en construisant le symétrique (C') de (C) par rapport à (D)

Donc on a $(C_p) = (C') \cup (C)$

Remarque :

La représentation graphique de $P(x)$ est l'image de la parabole d'équation $y = ax^2$, par la translation de vecteur $\vec{u}(\alpha; \beta)$.

L'équation $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$ est l'équation réduite de la parabole (C_p) .

Application :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $g(x) = x^2 + 2x - 3$ et C_g sa courbe représentative.

- Démontrer que pour tout nombre réel x , $f(x) = (x + 1)^2 - 4$.
- En déduire que C_g est l'image de la parabole d'équation $y = x^2$ par la translation que l'on précisera.
- Construire C_g partir de la parabole d'équation : $y = x^2$.

4- Forme Factorisée : Equation du second degré

4-1- Définition d'une équation du second degré

On appelle équation du second degré toute écriture pouvant se mettre sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a , b et c sont des réels tels que a est non nul et x la variable réelle.

Exemple : donner chacun deux exemples d'équations

4-2- Forme factorisée

Pour factoriser une équation du second degré à une inconnue on peut utiliser la forme canonique ou on calcule le discriminant réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

Méthode par la forme canonique :

$$P(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right] \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right]$$

$$P(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) = a \left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right)$$

D'où $P(x) = a \left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right)$ est la forme factorisée de $P(x)$.

4-3- Résolution d'équation du second degré une inconnue

Pour résoudre une équation du second degré à une inconnue on peut utiliser la forme canonique ou en procédant comme suite :

$$P(x) = 0 \iff a \left(x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right) = 0 \implies x + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \text{ ou } x + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} = 0$$

$$x = -\frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = -\frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

→ Si $\Delta > 0$ alors l'équation admet deux solutions distinctes $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}. \text{ L'ensemble solution noté } S = \{x_1; x_2\}$$

→ Si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une solution unique double $x_1 = x_2 = x_0 = -\frac{b}{2a}$.

$$\text{L'ensemble solution est } S = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$$

→ Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'admet pas de solution. L'ensemble solution est le vide.

Remarque

Pour résoudre une équation du second degré à une inconnue dans $\mathbb{R}$ de type $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$, on peut calculer le discriminant réel $\Delta = b^2 - 4ac$ et on observe les cas suivants :

→ Si $\Delta > 0$ alors l'équation a deux solutions distinctes $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

→ Si $\Delta = 0$ alors l'équation a une unique solution $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

→ Si $\Delta < 0$ alors l'équation n'admet pas de solution.

Application :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations

a- $x^2 - 3x + 2 = 0$

b- $3x^2 - 12x + 9 = 0$

c- $4x^2 - 4x + 1 = 0$

d- $x^2 + 2x + 1 = 0$

e- $2x^2 - 7x + 9 = 0$

f- $5x^2 - 6x + 1 = 0$