

Mathématiques 11^{ème} Sciences Économiques et Sociales

Production de Mathematikos

Nota

Ce polycopié tient lieu de **Notes de cours** et ne dispense en aucune façon la présence aux cours proprement dit de *Mathématiques*.

Mea Culpa

Comme dans toutes notes de cours, des erreurs sont encore présentes dans ce polycopié.

N'hésitez pas à me les communiquer à l'adresse : www.mathematikos.ml

Approche Par Compétence

MATHÉMATIQUES 1 1^{ÈME} SCIENCES ÉCONOMIQUES ET SOCIALES

03 heures par semaine

Programme Pédagogique

UNITÉ D'APPRENTISSAGE 1

Chapitre I : Activités Graphiques

Chapitre II : Systèmes d'équations linéaires

Chapitre III : Fonction polynôme du second degré

Chapitre IV : Calculs de Pourcentage

UNITÉ D'APPRENTISSAGE 2

Chapitre V : Fonction homographique

Chapitre VI : Suites Numériques

Chapitre VII : Statistique

UNITÉ D'APPRENTISSAGE 3

Chapitre VIII : Dérivation des fonctions

Chapitre IX : Dénombrement - Probabilité

Publication de Mathematikos – version révisée de septembre 2024

Le Chargé Principal de Cours

SAMATE L@mine, Professeur des Lycées.



CHAPITRE 1

ACTIVITÉS GRAPHIQUES

Domaine : Sciences, Mathématiques et Technologies

Compétences : Résoudre une situation problème

Composantes : Mettre à l'essai des pistes de solution et partager les informations relatives à la démarche scientifique et mathématique
Manifestations : Établir les relations entre les données retenues et inventorier les pistes de solutions

Ressources éducatives : Professeur, élèves, matériels didactiques

Stratégies d'animation : Travaux en groupe (pédagogie active).



Contenu

Séquence 1 : Fonction affine

1. Tableau de valeurs

Approche 1 en groupe de travail

Une étude météorologique sur la ville de Kidal dans une journée a fourni les résultats consignés dans le tableau suivant où x désigne l'heure et $f(x)$ la température exprimée en degré Celsius.

x	5	7	11	15
$f(x)$	6	10	18	26

Consignes

Construire les points correspondant à cette évolution de température journalière puis les joindre entre eux.

Synthèse Partielle 1

La représentation de température obtenue est une droite. On dit que cette température évolue suivant une fonction affine.

2. Fonction affine et équation cartésienne

Synthèse Générale 1

a) Définition

Étant donné un couple (m, p) de nombre réels non nuls. On nomme fonction affine associée à ce couple, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y = f(x) = mx + p$.

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.

b) Lien avec une équation cartésienne

La fonction affine est la forme réduite de l'équation cartésienne du type $ax + by + c = 0$.

Si une droite (D) a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec a, b et c des réels.

Cette équation peut se mettre sous la forme réduite :

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$$

En posant $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$

On obtient $y = mx + p$ qui est une forme réduite de (D).

Remarque

a) Si le réel $p = 0$, la fonction est une *fonction linéaire* $f(x) = mx$.

b) Si le réel m est nul, la fonction se réduit à la *fonction constante* $f(x) = p$.

Évaluation 1

Préciser parmi les fonctions suivantes celles qui sont affines :

a) $f(x) = 2x + 4y^2$ b) $g(x) = 5x + 4xy$ c) $h(x) = 2x + 1$.

d) $y = -x + 2$ e) $y = 5$ f) $f(x) = -x$

3. Coefficient directeur et ordonnées à l'origine

Synthèse Générale 2

Soit la fonction affine définie par $f(x) = y = mx + p$.

Le réel m est la *pente* ou le *coefficient directeur* ou *coefficient angulaire* ou *taux de variation* de la droite correspondante à la fonction affine.

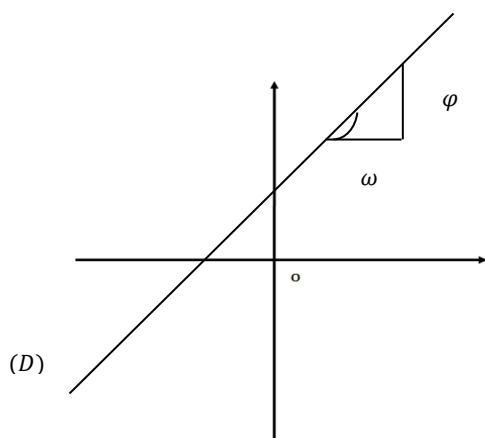
Le réel p est l'*ordonnée à l'origine*.

a) Interprétation graphique de la pente

Soit la fonction affine $f(x) = mx + p$.

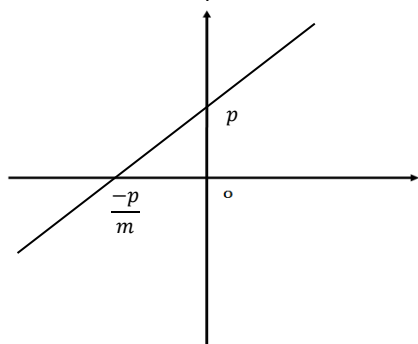
La pente représente la tangente de l'angle que fait la droite (D) de f avec l'horizontal. C'est-à-dire si $m = \frac{\theta}{\omega}$ on a :





b) Interprétation graphique de l'ordonnée à l'origine

Soit la fonction affine de représentation la droite (D). On a :



L'ordonnée à l'origine est le point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées. C'est-à-dire pour $x = 0$, $f(x) = p$.

c) Interprétation analytique et mécanique de la pente et l'ordonnée à l'origine

Soit la fonction affine $f(x) = mx + p$.

- Cette fonction représente le terme général d'une *progression arithmétique* de raison m et de premier terme p .
- Cette fonction représente la distance parcourue par un mobile à l'instant x de vitesse m et de distance initiale p .

Remarque

Les droites de type $y = p$ sont parallèles à l'axe des abscisses dont perpendiculaires à l'axe des ordonnées.

Si $y = 0$, c'est l'axe des abscisses.

Les droites de type $x = k$ sont parallèles à l'axe des ordonnées dont perpendiculaires à l'axe des abscisses.

Si $x = 0$, c'est l'axe des ordonnées.

4. Vecteur directeur

Le vecteur directeur d'une droite est tout vecteur non nul dont la direction est celle de cette droite.

Soit la droite (D) d'équation $y = mx + p$ qui est sécante à l'axe des ordonnées.

Un vecteur directeur de cette droite est $(1, m)$.

Si A et B sont deux points d'une droite, $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de cette droite.

Un vecteur directeur de la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ est $\vec{u}(-b, a)$.

Évaluation 2

Déterminer un vecteur directeur de la droite (D) dans les cas suivants :

- (D) a pour équation $2x - 3y + 1 = 0$
- (D) a pour équation $y = -x + 3$
- (D) passe par $A(-1; 2)$ et $B(3; 0)$.

5. Représentation d'une fonction affine

Synthèse Générale 3

Définition

Étant donnée une fonction affine $f(x) = mx + p$, avec m et p des réels non nuls. On nomme graphe ou représentation graphique de f , le sous-ensemble de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dont les éléments sont les couples $(x; f(x))$ pour tout x réel. Ce graphe est une droite.

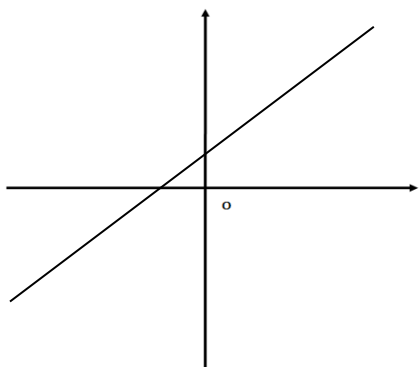
Tracé de la droite d'une fonction affine

La fonction affine f définie par $f(x) = mx + p$ est représentée graphiquement dans un repère par une droite passant par le point de coordonnées $(0, p)$ et parallèle à celle qui représente l'application linéaire $x \mapsto mx$.

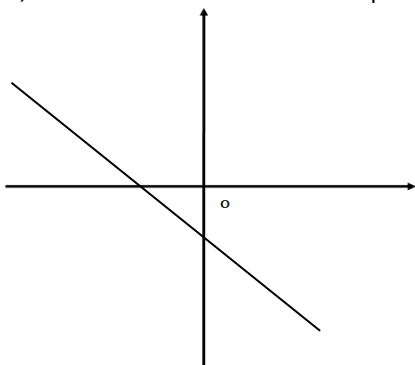
Pour construire la droite de la fonction affine définie par $f(x) = mx + p$, on utilise un tableau de valeurs à double entrée en x et y . Cette droite passe par les points $(x, f(x))$.

Forme générale

-Si $m > 0$, l'allure de la droite est donnée par :



-Si $m < 0$, l'allure de la droite est donnée par :



Évaluation 3

Construire la droite représentant les fonctions affines:

a) $f(x) = 2x + 1$ b) $g(x) = -x + 3$

6. Formule explicite d'une fonction affine définie par deux réels et leurs images respectives

Approche 2 en groupe de travail

Soit la fonction f telle que $f(0) = 1$ et $f(1) = 2$

Consignes

Trouver la formule explicite de la fonction affine f .

Synthèse Partielle 2

A partir de deux points et leurs images, on peut trouver la formule de la fonction affine associée.

Synthèse Générale 4

Soit à déterminer explicitement la fonction affine f telle que

$$f(A) = B \text{ et } f(C) = D \text{ pour tous } A, B, C \text{ et } D.$$

On a :

f étant affine $f(x) = mx + p$

$$\text{Pour } x = A, f(A) = B \Rightarrow mA + p = B \quad (1)$$

$$\text{Pour } x = C, f(C) = D \Rightarrow mC + p = D \quad (2)$$

On forme le système d'inconnues m et p :

$$\begin{cases} mA + p = B \\ mC + p = D \end{cases}$$

La résolution par la méthode d'addition donne :

$$\begin{cases} m = \frac{B-D}{A-C} \\ p = \frac{AD-BC}{A-C} \end{cases}$$

D'où la formule explicite $f(x) = \left(\frac{B-D}{A-C}\right)x + \frac{AD-BC}{A-C}$.

Évaluation 4

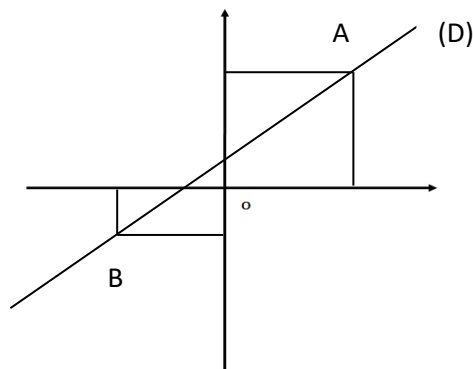
Déterminer explicitement la fonction affine f telle que :

$$f(1) = 3 \text{ et } f(2) = 1.$$

7. Formule explicite d'une fonction affine définie par sa représentation graphique

Synthèse Générale 5

Pour déterminer la formule explicite d'une fonction affine f représentée par la droite (D) dans le repère, on procède ainsi :



La fonction affine est la forme $f(x) = mx + p$.

La droite (D) passe par les points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$

En procédant comme dans le cas précédent, on forme le

$$\text{système : } \begin{cases} y_A = mx_A + p \\ y_B = mx_B + p \end{cases}$$

On détermine m et p par résolution du système.

$$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \text{ et } p = \frac{x_A y_B - x_B y_A}{x_A - x_B}$$

$$\text{D'où } f(x) = \left(\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \right) x + \frac{x_A y_B - x_B y_A}{x_A - x_B}.$$

Évaluation 5

Soit la droite (Δ) passant par les points A et B de coordonnées respectives $(-1,0)$ et $(0,1)$.

Donner l'expression de la fonction affine de cette représentation.

8. Formule explicite d'une fonction affine définie par un point et le coefficient directeur**Synthèse Générale 6**

Soit la droite (D) de la fonction affine définie par $f(x) = y = mx + p$ qui est sécante à l'axe des ordonnées. Un vecteur directeur de cette droite est $(1, m)$.

Si la droite (D) passe par $A(x_A, y_A)$, on peut écrire :

$$y_A = mx_A + p \Rightarrow p = y_A - mx_A.$$

En remplaçant p par son expression, on a $y = mx + y_A - mx_A$ d'où l'équation de (D).

$$\text{D'où } f(x) = mx + y_A - mx_A$$

Évaluation 6

Écrire une équation de la fonction affine représentée par la droite (Δ) passant par le point $A(-3,0)$ de coefficient directeur $m = 2$.

9. Formule explicite d'une fonction affine définie par un vecteur directeur et un point**Synthèse Générale 7**

Soit une fonction affine de représentation graphique (D) et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha; \beta)$.

$A(x_A; y_A)$ étant un point de (D), pour tout point quelconque $M(x; y)$ de (D), les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & \alpha \\ y - y_A & \beta \end{vmatrix} = 0$ implique $\beta(x - x_A) - \alpha(y - y_A) = 0$

$$\text{Soit finalement } y = \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\alpha y_A - \beta x_A}{\alpha}.$$

Évaluation 7

Déterminer la fonction affine de la droite (Δ) passant par le point $A(-1,2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1,3)$.

10. Propriétés des fonctions affines**Synthèse Générale 8**

Étant données deux fonctions affines définies par $f(x) = mx + p$ et $g(x) = m'x + p'$ et k un nombre réel.

a) Somme $f + g$

$$f(x) + g(x) = (f + g)(x) = mx + p + m'x + p'$$

$$f(x) + g(x) = (m + m')x + p + p'$$

En posant $m + m' = \mu$ et $p + p' = \rho$

$$\text{Alors } f(x) + g(x) = \mu x + \rho.$$

On dira que la somme de deux fonctions affines est une fonction affine.

b) Multiplication par un réel kf

$$kf(x) = (kf)(x) = k(mx + p) = kmx + kp$$

$$\text{En posant } km = \mu \text{ et } kp = \rho$$

$$\text{Alors } kf(x) = \mu x + \rho$$

On dira que le scalaire d'une fonction affine par un réel est toujours une fonction affine.

Évaluation 8

On considère les fonctions affines définies par $f: \mapsto -2x + 3$ et $g: \mapsto 3x - 1$. Calculer $f(x) + g(x)$ et $-4f(x)$

Séquence 2 : Résolution d'équations associées à une fonction affine**1. Équation du type $f(x) = 0$** **Approche 3 en groupe de travail**

On considère la fonction affine $f(x) = x - 2$.

Consignes

- Construire la droite représentant la fonction f
- Trouver l'abscisse du point d'intersection de cette droite avec l'axe des abscisses.

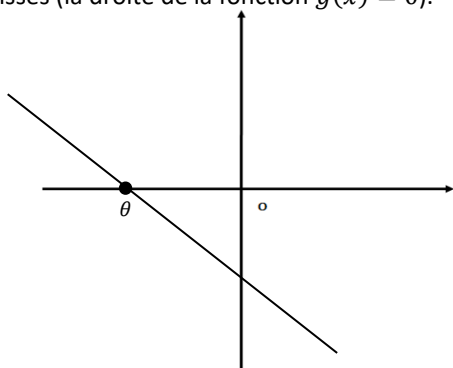
Synthèse Partielle 3

On dira que l'on a résolu l'équation $f(x) = 0$.

Synthèse Générale 9

Soit f une fonction affine telle que $f(x) = mx + p$.

Résoudre graphique $f(x) = 0$ c'est trouvé l'abscisse du point d'intersection de la droite représentant f avec l'axe des abscisses (la droite de la fonction $g(x) = 0$).



Alors l'ensemble solution est $S = \{\theta\}$.

Remarque

-Dans le cas de la résolution algébrique, on a $f(x) = 0$ implique $mx + p = 0$ alors $x = \frac{-p}{m}$ soit $S = \{\frac{-p}{m}\}$.

De cette manière on peut également trouver la solution à toutes équations de la forme $f(x) = k$ avec $k \neq 0$.

Évaluation 9

On donne la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$
Résoudre graphique $f(x) = 0$.

2. Équation du type $f(x) = y$

Approche 4 en groupe de travail

Soit la fonction affine telle $f(x) = x - 2$.

Consignes

- Construire la droite représentant la fonction f .
- Trouver l'abscisse du point d'intersection de cette droite avec la droite de la fonction $g(x) = y = 3x - 4$.

Synthèse Partielle 4

On dit que l'on a résolu l'équation $f(x) = g(x)$.

Synthèse Générale 10

Étant données les fonctions affines f et g telles que :
 $f(x) = mx + p$ et $g(x) = m'x + p'$.

Résoudre graphique $f(x) = g(x)$, c'est trouvé l'abscisse du point d'intersection des droites de f et de g .

Résoudre algébriquement $f(x) = g(x) \Rightarrow$

$$mx + p = m'x + p' \Rightarrow (m - m')x = p' - p \text{ Soit } x = \frac{p' - p}{m - m'}$$

La solution est $S = \left\{ \frac{p' - p}{m - m'} \right\}$

Évaluation 10

On considère les fonctions $f: x \mapsto 4x - 1$, $g: x \mapsto -x + 9$ et $h: x \mapsto 3x$.

Résoudre $f(x) = g(x)$ et $f(x) = h(x)$.

Séquence 3 : Fonction affine par intervalle

Approche 5 en groupe de travail

On considère la fonction affine f définie par $f(x) = |x + 2|$

Consignes

- Écrire f sans le symbole de la valeur absolue.

On désigne par f_1 et f_2 les deux fonctions affines trouvées.

- Construire les droites représentant f_1 et f_2 .

Synthèse Partielle 5

On dit que f est une fonction affine par intervalle.

Synthèse Générale 11

Définition

On nomme fonction affine par intervalles, toute fonction f définie sur une réunion d'intervalle sur chacun desquels f coïncide avec une fonction affine.

La réunion de ces intervalles forme $\mathbb{R}$.

Évaluation 11

On définit la fonction affine f par intervalles telle que :

$$\begin{cases} f(x) = -2x + 3 \text{ pour } x \in [-3; -1[\\ f(x) = 5 \text{ pour } x \in [-1; 3[\\ f(x) = 3x \text{ pour } x \in [3; 4] \end{cases}$$

- Construire le graphe correspondant à f .

- Calculer $f(-2)$, $f(0)$, $f\left(\frac{7}{2}\right)$ et $f(-3)$.

Séquence 4 : Résolution de problème concret faisant appel à des fonctions affines

Synthèse Générale 12

Les étapes successives de la résolution algébrique d'un problème concret sont :

1^{ère} étape : Mathématisation

- Choix des inconnues,
- Traduction des éléments de l'énoncé,
- Expression des conditions imposées.

2^{ème} étape : Résolution algébrique

(Résolution par des méthodes classiques)

3^{ème} étape : Retour au problème posé

(Pour la vérification)

Évaluation 12

Le réservoir d'une automobile contient 25 litres d'essence au départ. Cette automobile économique consomme 6 litres par cent kilomètres parcourus.

1. Exprimer la quantité d'essence contenue dans le réservoir après un trajet exprimé en kilomètre
2. Déterminer la quantité d'essence restante dans le réservoir après que l'automobile effectue 50 km de trajet.
3. Contrôler graphiquement le résultat.

Évaluation 13

Pour un compteur d'eau les frais standards s'élèvent mensuellement à 1956 F CFA.

Entre 0 et 34 m^3 le prix du m^3 est 106 F CFA

Entre 34 et 70 m^3 le prix du m^3 est 156 F CFA

Au-delà de 70 m^3 le prix du m^3 est 180 F CFA

La location, l'entretien ... s'évaluent à 20 F CFA par m^3

a. Trouver la fonction affine par intervalle associée à ces données.

B. Représenter graphiquement cette fonction par intervalle (en adoptant les échelles de votre choix).

c. Que vaut la dépense de consommation d'eau pour 40 m^3 .

Séquence 5 : Représentation graphique des fonctions usuelles**1. Fonction du type $x \mapsto x^2$** **Approche 6 en groupe de travail**

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

Consignes

a) Compléter le tableau de valeurs suivant correspondant à f .

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

b) Construire le graphique correspondant point par point.

Synthèse Partielle 6

Le graphique obtenu est une *parabole*.

2. Fonction du type $x \mapsto \frac{1}{x}$ **Approche 7 en groupe de travail**

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Consignes

a) Compléter le tableau de valeurs suivant correspondant à f .

x	-3	-2	-1	1	2	3
$f(x)$						

b) Construire le graphique correspondant point par point

Synthèse Partielle 7

Le graphique obtenu est une *hyperbole*.

3. Fonction du type $x \mapsto \sqrt{x}$ **Approche 8 en groupe de travail**

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{x}$

Consignes

a) Compléter le tableau ci-dessous correspondant à f .

x	0	1	4	9
$f(x)$				

b) Construire le graphique correspondant point par point.

Synthèse Partielle 8

Le graphique obtenu est une *branche parabolique*.

4. Complémentaire de cours

Partant de certaines fonctions usuelles, on peut construire d'autre type de graphe point par point.

Évaluation 14

On considère la fonction f définie par

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2x^2 + 1$$

a) Faire le tableau de quelques valeurs correspondantes à f .

b) Construire le graphe de f point par point.

Mention légale – Mathematikos