

Suites Numériques

I- Généralité :

1) Définition :

On appelle suite numérique toute fonction définie de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. On note

$$U : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ n \rightarrow U(n) = u_n$$

Exemple :

Soit une suite u_n définie par : $u_n \in \mathbb{R}$. Calculer : $u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4$

$$u_0 = \mathcal{E} ; u_1 = 1 ; u_2 = \vec{u}_0 ; u_3 = \emptyset ; u_4 = \phi$$

2) Mode de définition d'une suite :

- Une suite peut être définie par 1 formule explicite c'est-à-dire : u_n en fonction de n
 $u_n = f(n)$.

Exemple : $u_n = n + 3 ; v_n = \frac{2n - 4}{n + 1} ; w_n = 4n^2 - 3n + 1$

- Une suite peut être définie par son 1^{er} terme et une formule de récurrence, c'est-à-dire u_{n+1} s'exprime en fonction de u_n .

Exemple : soit la suite : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n + 4 \end{cases}$. Calculer : $u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4$

Solution :

Pour $n = 0, u_1 = \frac{3}{2}u_0 + 4 = \frac{3}{2}(2) + 4 = 7$

Pour $n = 1, u_2 = \frac{3}{2}u_1 + 4 = \frac{29}{2}$

Pour $n = 2$, $u_3 = \frac{3}{2} u_2 + 4 = \frac{103}{4}$

Pour $n = 3$, $u_4 = \frac{3}{2} u_3 + 4 = \frac{341}{8}$

u_0 est le 1^{er} terme de la suite et u_n est le terme général.

3) Sens de variation d'une suite :

La variation d'une suite u_n dépend du signe de $u_{n+1} - u_n$;

- Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$ alors u_n est croissante ;
- Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$ alors u_n est décroissante ;
- Si $u_{n+1} - u_n = 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$ alors u_n est constante ;
- Si $u_{n+1} - u_n > 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$ alors u_n est strictement croissante ;
- Si $u_{n+1} - u_n < 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$ alors u_n est strictement décroissante .

Exemple :

Etudier le sens de variation de chacune des suites :

$$u_n = \frac{2n + 3}{n + 2} \quad ; \quad v_n = -\frac{3}{2}n + 4$$

Solution :

$$u_n = \frac{2n + 3}{n + 2} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{2(n + 1) + 3}{(n + 1) + 2} = \frac{2n + 5}{n + 3}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n + 5}{n + 3} - \frac{2n + 3}{n + 2} = \frac{1}{(n + 3)(n + 2)} \geq 0$$

D'où u_n est croissante

$$v_n = -\frac{3}{2}n + 4 \Rightarrow v_{n+1} = -\frac{3}{2}(n + 1) + 4 = -\frac{3}{2}n + \frac{5}{2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \left(-\frac{3}{2}n + \frac{5}{2}\right) - \left(-\frac{3}{2}n + 4\right) = -\frac{3}{2} < 0$$

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{3}{2} < 0 \quad \text{D'où } v_n \text{ est strictement décroissante}$$

4) Représentation des termes d'une suite :

Pour représenter les termes d'une suite u_n sur l'axe des abscisses, on trace la 1^{ère} bissectrice (D) d'équation $y = x$. Puis on trace la fonction associée à la suite u_n en posant $u_n = x$ et $u_{n+1} = f(x)$. On détermine les termes de la suite sur l'axe des abscisses par projection.

Exemple

Soit (u_n) définie Par :

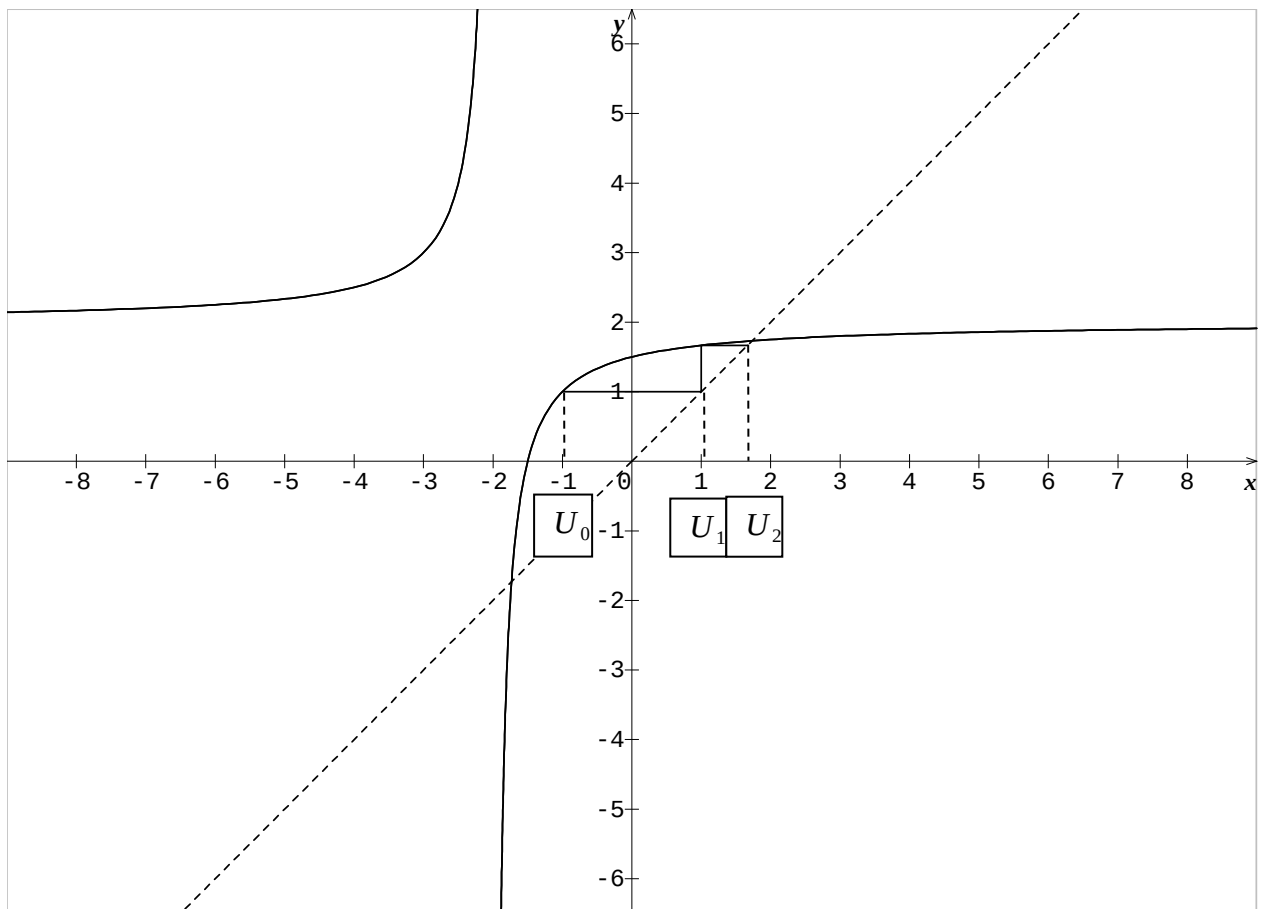
$$\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \frac{3 + 2U_n}{2 + U_n} \end{cases}$$

Représenter sur l'axe (ox) les 3 premiers termes de la suite u_n .

Solution

Désignons par f la fonction définie sur $] -2 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{3 + 2x}{2 + x}$

En suivant les règles de constructions ci-dessous , on a la représentation suivante :



II- Suites Arithmétiques

1) Activité :

Au 1^{er} Janvier 2012, le prix d'un kilo de sucre est de 550 f CFA.

Sachant que le prix du kilo subit une augmentation de 50 f CFA au 1^{er} Janvier de chaque année, quel serait le prix du kilo de sucre au 1^{er} Janvier 2013 ? Au 1^{er} Janvier 2014 ?

On désigne par P_n le prix du kilo du sucre au 1^{er} Janvier + n.

Calculer P_1 ; P_2 ; P_3 et P_n .

Calculer $P_{n+1} - P_n$.

Solution

Soit P_0 le prix d'un kilo de sucre au 1^{er} Janvier 2012 tel que $P_0 = 550$.

Calculons le prix d'un kilo de sucre :

- **Au 1^{er} Janvier 2013**, le prix d'un kilo de sucre serait $P_1 = P_0 + 50 = 550 + 50 = 600$.

- **Au 1^{er} Janvier 2014**, le prix d'un kilo de sucre serait $P_2 = P_1 + 50 = 600 + 50 = 650$.

Soit P_n le prix d'un kilo de sucre au 1^{er} Janvier + n.

Calculons : P_1 ; P_2 ; P_3 et P_n

- $P_0 = 550$.

- $P_1 = P_0 + 50 = 550 + 50 = 600$.

- $P_2 = P_1 + 50 = 600 + 50 = 650$.

- $P_3 = P_2 + 50 = 650 + 50 = 700$.

- $P_n = P_0 + 50n = 550 + 50n$.

Calculons $P_{n+1} - P_n$

$$P_n = 550 + 50n \quad \Rightarrow P_{n+1} = 550 + 50(n+1) = 550 + 50 + 50n = 600 + 50n$$

$$\Rightarrow P_{n+1} - P_n = (600 + 50n) - (550 + 50n) = 600 + 50n - 550 - 50n = 50$$

Alors on a : une suite arithmétique de raison $r = 50$.

2) Définition :

Une suite U_n est dite arithmétique si et seulement si : $\vec{U_{n+1}} - \vec{U_n} = \frac{\phi(I) - k}{2}$; $U_{n+1} - U_n = r$.

r est une constante réelle appelée la raison de la suite U_n .

Exemple :

Soit une suite U_n définie par : $U_n = 2n+3$

Démontrer que U_n est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le 1^{er} terme U_0 .

Solution :

$$U_n = 2n+3 \Rightarrow U_{n+1} = 2(n+1)+3 = 2n+5$$

$$U_{n+1} - U_n = 2 \quad \text{d'où } U_n \text{ est une suite arithmétique de raison } r = 2 \text{ et de 1^{er} terme } U_0 = 3$$

3) Expression du terme général :

Soit U_n une suite de 1^{er} de terme U_0 et de raison r .

$$U_1 - U_0 = r$$

$$U_2 - U_1 = r$$

$$U_3 - U_2 = r$$



$$\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}\|$$

D'une façon générale si U_p est le 1^{er} terme l'expression du terme général est :

$$U_n = U_p + (n-p)r$$

Exemple :

Soit la suite réel définie par



- Démontrer que U_n est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le 1^{er} terme.
- Exprimer U_n en fonction de n .

Solution :

$$a) \quad U_{n+1} = U_n - 3 \Rightarrow U_{n+1} - U_n = -3$$

D'où U_n est une suite arithmétique de raison $r = -3$ et de 1^{er} terme $U_0 = -1$.

$$U_n = U_0 + nr = -1 + n(-3) = \boxed{U_n = -3n - 1}$$

4) Termes équidistants d'une suite :

a-Définition :

Soit $(u_n)_n \in N$ une suite arithmétique de raison r ;

Deux termes de u_n sont dit équidistants des extrêmes si le nombre de termes avant l'un est égal au nombre de termes après l'autre.

Exemple :

Soit $(u_n)_n \in N$ une suite arithmétique de raison r suivante :

$$U_0; U_1; U_2; \dots; a; b; \dots; U_{n-2}; U_{n-1}; U_n$$

-A et b sont équidistants des extrêmes car il y a P termes avant a et P termes après b.

-De même U_1 et U_{n-1} sont équidistants des extrêmes.

-Aussi U_2 et U_{n-2} sont équidistants des extrêmes.

b-Théorème : la somme de deux termes équidistants d'une suite arithmétique est égale à la somme des termes extrêmes.

Vérification :

On donne la suite arithmétique de nombres suivants :

2 ; 5 ; 8 ; 11 ; 14 ; 17 ; 20 ; 23.

5 et 20 sont équidistants alors $5+20=2+23 \Leftrightarrow 25=25$ (vraie).

De même 8 et 17 sont équidistants d'après le théorème on a : $8+17=2+23 \Leftrightarrow 25=25$ (vraie).

c-Propriétés :

En application du théorème on a :

P₁: Trois nombres **a, b, c** forment une progression arithmétique si :

$$2b = a + c.$$

Preuve :

Soit a, b et c trois réels

$$b = a + r$$

$$c = b + r$$

$$a + c = a + b + r = 2a + 2r = 2(a + r). \text{ Alors : } a + c = 2b$$

P₂: Trois nombres **a, b, c** forment une progression arithmétique de raison r si :

$$b = a + r \quad \text{et} \quad c = a + 2r.$$

P₃: Quatre nombres **a, b, c, d** forment une progression arithmétique de raison r si :

$$3b - d = 2d$$

P₄: soit U_n une suite arithmétique de 1^{er} terme U_0 . La somme de 2 termes équidistants est toujours à la somme des extrêmes

$$U_0, U_1, U_2, \dots, U_{n-2}, U_{n-1}, U_n$$

U_1 et U_{n-1} sont équidistants

$$U_0 + U_n = U_p + U_{n-p}$$

Exercices d'application

Trouver 3 nombres consécutifs a ; b et c d'une suite en progression arithmétique sachant que

$$\begin{cases} a + b + c = 3 \\ 3a - 6b + c = 6 \end{cases}$$

Solution :

Trouvons 3 nombres consécutifs a ; b et c d'une suite en progression arithmétique sachant

$$\text{que } \begin{cases} a + b + c = 3 \\ 3a - 6b + c = 6 \end{cases}$$

On sait que pour une progression arithmétique de 3 termes a ; b ; c, on a : $a + c = 2b$

Ainsi l'équation dévient :

$$\begin{cases} 2b + b = 3 \\ 3a - 6b + c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3b = 3 \\ 3a - 6b + c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ 3a - 6b + c = 6 \end{cases}$$

$$\text{D'autre part } a + b + c = 3 \Rightarrow a + 1 + c = 3 \Rightarrow a + c = 2$$

$$\begin{cases} a + c = 2 \\ 3a - 6b + c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 2 \\ 3a + c = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a - c = -2 \\ 3a + c = 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5 \text{ et } c = -3$$

D'où les nombres a ; b et c sont tels que a = 5 ; b = 1 et c = -3

7) Sens de variation d'une suite arithmétique

Soit U_n une suite arithmétique de raison r. On a :

$U_{n+1} - U_n = r$ d'où :

- Si $r > 0$ alors U_n est croissante
- Si $r < 0$ alors U_n est décroissante
- Si $r = 0$ alors U_n est constante

5) Somme des termes d'une suite arithmétique :

Soit U_n une suite arithmétique de 1^{er} terme U_0 et de raison r.

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{n-2} + U_{n-1} + U_n$$

$$S_n = U_n + U_{n-1} + U_{n-2} + \dots + U_2 + U_1 + U_0$$

$$2S_n = (U_0 + U_n) + (U_1 + U_{n-1}) + (U_2 + U_{n-2}) + \dots + (U_n + U_0)$$

$$2S_n = (U_0 + U_n) + (U_0 + U_n) + (U_0 + U_n) + \dots + (U_0 + U_n)$$

$$\Rightarrow 2S_n = (n+1)(U_0 + U_n)$$

$$S_n = \frac{n+1}{2} (U_0 + U_n) \quad (1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme})$$

$$\text{ou } S_n = \frac{n+1}{2} (3\sqrt{3} - 2 + 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} + 1 - 4\sqrt{3} - 4 - \sqrt{3})$$

Remarque : une suite arithmétique est toujours divergente

III- Suites géométriques

1-Activité :

Le premier Janvier 1999, la population d'une commune rurale était de 3000 habitants.

On admet que cette population diminue de 4 % chaque année.

Calcule la population de cette commune :

- a) Au 1^{er} Janvier 2005 ;
- b) Au 1^{er} Janvier 2006
- c) Au 1^{er} Janvier

2012

Solution

Soit U_n la population de cette commune au 1^{er} Janvier de l'année 1999+n.

Soit $U_1 = 3000$ la population initiale de cette commune.

On a :

$$U_1 = 3000 .$$

$$U_2 = U_1 - 4 \% U_1 \Rightarrow U_2 = U_1 (1 - 4 \%) = U_1 \left(1 - \frac{4}{100}\right) = U_1 (0,96)$$

$$U_3 = U_2 (0,96)$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix}$$

$$U_{n+1} = U_n (0,96)$$

$$\Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = 0,96.$$

Alors on a : une suite géométrique de raison $q = 0,96$.

$$\text{D'où son expression est : } U_n = U_1 (q)^{n-1} = 3000 (0,96)^{n-1}$$

Déterminons ainsi la population :

- Au 1^{er} Janvier 2005

$$\text{On sait que : } U_n = 3000 (0,96)^{n-1} \text{ et } n = 2005 - 1999 = 6$$

$$\text{D'où la population au 1^{er} Janvier 2005 est : } U_6 = 3000 (0,96)^{6-1} = 3000 (0,96)^5$$

$$\Rightarrow U_6 = 2446,11 \approx 2446$$

Ainsi la population au 1^{er} Janvier 2005 est : 2244 habitants.

- Au 1^{er} Janvier 2006

$$\text{On sait que : } U_n = 3000 (0,96)^{n-1} \text{ et } n = 2006 - 1999 = 7$$

$$\text{D'où la population au 1^{er} Janvier 2006 est : } U_7 = 3000 (0,96)^{7-1} = 3000 (0,96)^6$$

$$\Rightarrow U_7 = 2348,27 \approx 2348$$

Ainsi la population au 1^{er} Janvier 2006 est : 2348 habitants.

- Au 1^{er} Janvier 2012

$$\text{On sait que : } U_n = 3000 (0,96)^{n-1} \text{ et } n = 2012 - 1999 = 13$$

D'où la population au 1^{er} Janvier 2005 est : $U_{13} = 3000(0,96)^{13-1} = 3000(0,96)^{12}$

$$\Rightarrow U_{13} = 1838,12 \approx 1838$$

Ainsi la population au 1^{er} Janvier 20012 est : 1838 habitants.

2-Définition : U_n est une suite géométrique si et seulement si : $\rho_1(M) = \vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}$ $\rho_2(M) = \vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}$
Ou $U_{n+1} = qU_n$.

q est un réel fixé appelé la raison de la suite géométrique.

Exemple :

1, 2, 4, 8, 16, 32..... 2^n sont les termes d'une suite géométrique de raison $q = 2$ et de 1^{er} terme $U_0 = 1$

L'expression de terme général est $U_n = 2^n$

3-Expression du terme général

Soit U_n une suite géométrique de raison q et de 1^{er} terme U_0

$$U_1 = qU_0$$

$$U_2 = qU_1$$

$$U_3 = qU_2$$

$$U_4 = qU_3$$



$$U_n = qU_{n-1}$$

Multiplions membre à membre les termes de l'égalité.

$$U_1 \times U_2 \times U_3 \times U_4 \times \dots \times U_n = (qU_0) (qU_1) (qU_2) \dots (qU_{n-1})$$

$U_n = q^n \times U_0$ ou d'une manière générale $U_n = U_p \cdot q^{n-p}$ (après simplification des facteurs semblables dans les deux membres)

Où U_p désigne le 1^{er} terme.

4-Produit des termes équidistants des termes extrêmes d'une suite géométrique :

Le produit de deux termes équidistants des termes extrêmes est égal au produit des termes extrêmes c'est-à-dire $U_p \times U_{n-p} = U_0 \times U_n$ (Théorème)

Vérification :

Soit la suite géométrique de nombres suivants :

3 ; 6 ; 12 ; 24 ; 48 ; 96 ; 192

6 et 96 sont équidistants ; d'après le théorème on a : $6 \cdot 96 = 3 \cdot 192 \Leftrightarrow 576 = 576$ (Vraie)

De même 12 et 48 sont équidistants ; on a : $12 \cdot 48 = 3 \cdot 192 \Leftrightarrow 576 = 576$ (Vraie)

5-Propriétés :

P₁: Trois nombres **a, b, c** forment une progression géométrique si :

$$\mathbf{b^2 = ac. \text{ (en application du théorème précédent)}}$$

P₂: Trois nombres **a, b, c** forment une progression géométrique de raison q si :

$$\mathbf{b = qa \text{ et } c = q^2a.}$$

P₃: Quatre nombres **a, b, c, d** forment une progression géométrique de raison q si :

$$\mathbf{b = qa \quad ; \quad c = q^2a \quad \text{et} \quad d = q^3a}$$

Exercice d'application :

Trouver 3 nombres consécutifs a ; b et c d'une suite en progression géométrique sachant que

$$\begin{cases} a \cdot b \cdot c = 8 \\ a + b = -1 \\ c - a = 1 \end{cases}$$

On sait que pour une progression géométrique de 3 termes a ; b ; c , on a : $a \times c = b^2$
Ainsi l'équation dévient :

$$\begin{cases} (a \cdot c) \cdot b = 8 \\ a + b = -1 \\ c - a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (b^2) \cdot b = 8 \\ a + b = -1 \\ c - a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^3 = 8 \\ a + b = -1 \\ c - a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a + b = -1 \\ c - a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = -4 \\ c - a = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = -4 \\ c = -3 \end{cases}$$

D'où les nombres a ; b et c sont tels que $a = -4$; $b = 3$ et $c = -3$

6-Sens de variation d'une suite géométrique :

Il dépend de la raison et du 1^{er} terme.

Soit U_n suite géométrique de raison et de 1^{er} terme U_0 :

- **1^{er} cas** $U_0 > 0$: si
 - $q > 1 \Rightarrow U_n$ est croissante
 - $0 < q < 1 \Rightarrow U_n$ est décroissante
 - $q = 1$ alors U_n constante

- **2^{ème} Cas** $U_0 < 0$: si

- $q > 1 \Rightarrow U_n$ est croissante
- $0 < q < 1 \Rightarrow U_n$ est décroissante
- $q = 1 \Rightarrow U_n$ est constante

7-Convergence d'une suite géométrique :

Soit U_n une suite géométrique de raison q

- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ alors U_n converge vers 0
- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$ alors U_n est divergente
- Si $q = 1$ alors U_n converge vers U_0

8-Somme des termes d'une suite géométrique :

Soit U_n une suite géométrique de raison q et de 1^{er} terme U_0

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n \quad (1)$$

$$qS_n = qU_0 + qU_1 + qU_2 + qU_3 + \dots + qU_n \quad (2)$$

En effectuant la différence des équations (1) et (2) , on a :

$$S_n - qS_n = U_0 - qU_n \text{ or } U_n = U_0 \times q^n$$

$$S_n (1 - q) = U_0 - q(q^n \times U_0)$$

$$S_n (1 - q) = U_0 (1 - q^{n+1})$$

$$S_n = \frac{U_0 (1 - q^{n+1})}{1 - q}$$

$$S_n = \sum_{k=0}^n U_k = \frac{U_0 (1 - q^{n+1})}{1 - q}$$

D'une manière générale si U_p est le 1^{er} terme alors l'expression de la somme est :

$$\| -2\vec{AB} + \vec{AC} \| \quad \text{Avec } (q \neq 1)$$

Evaluation :
activité 1 :

Ali a reçu de son père une somme de 100.000 FCFA.

Après réception, il dépose cette somme à la banque le 1^{er} Janvier 2009 à intérêt composé au taux annuel de 5 % en vue d'acheter une moto à 300000 FCFA.

- a-** A partir de quelle année pourra-t-il acheter sa moto sachant qu'il ne dispose que de cette somme ?
b- Quelle serait la nouvelle valeur acquise par Ali s'il place un capital de 100.000 FCFA au bout de 30 semestres au taux de 2 % par semestre ?

activité 2 :

Le premier Janvier 2011, le nombre d'élève d'une école était de 6000 .

Le nombre d'élève de cette école diminue chaque année de 5 % faute de performance.

Quelle sera le nombre d'élève de cette école au 1^{er} Janvier 2015 ?

activité 3 :

Le premier Janvier 2012, le prix d'essence au Mali était de 690 FCFA.

a- Sachant que le prix du litre subit une augmentation de 5 FCFA au 1^{er} Janvier de chaque année, calculer le prix du litre d'essence au premier Janvier 2013 ? Au premier Janvier 2014 ?

b- Soit P_n le prix du litre d'essence au premier Janvier + n, calculer : P_n et $P_{n+1} - P_n$ puis en déduire la nature et la raison de la suite P_n

synthèse **1 :**

a- Déterminons le temps au bout duquel Ali pourra acheter sa moto.

Soient :

- $C_0 = 100.000$ FCFA : le capital initial.
- $C_n = 300.000$ FCFA : la valeur acquise.
- $i = 5 \% = \frac{5}{100} = 0,05$: le taux d'intérêt.

Calculons ainsi la durée n pour que Ali puisse acheter sa moto.

$$\text{On a : } C_n = C_0 (1+i)^n \Leftrightarrow (1+i)^n = \frac{C_n}{C_0} \Rightarrow (1+0,05)^n = \frac{300000}{100000}$$

$$\Rightarrow (1,05)^n = 3 \quad (\text{or } a^n = e^{n \ln a})$$

$$(1,05)^n = 3 \Leftrightarrow e^{n \ln(1,05)} = 3 \quad (\text{or } e^a = b \Leftrightarrow a = \ln b)$$

$$e^{n \ln(1,05)} = 3 \Leftrightarrow n \ln(1,05) = \ln 3 \Rightarrow n = \frac{\ln 3}{\ln(1,05)}$$

$$\Rightarrow n = \frac{1,09}{0,04} \Rightarrow n = 27,25 \approx 27.$$

Donc Ali pourra acheter sa moto au bout de 27 ans.

b-Déterminons la nouvelle valeur acquise par Ali au bout de 30 semestres au taux de 2 %.

$$\begin{aligned} C_n &= C_0 (1+i)^n \Rightarrow C_{30} = 100.000 (1+2\%)^{30} \Rightarrow C_{30} = 100.000 (1+0,02)^{30} \\ &\Rightarrow C_{30} = 100.000 (1,02)^{30} = 181.136 \text{ FCFA.} \end{aligned}$$

Donc Ali aura une valeur acquise de 181.136 FCFA au bout de 30 semestres .

Synthèse 2

Soit U_n le nombre d'élève de cette école au 1^{er} Janvier de l'année n .

Soit $U_1 = 6000$ le nombre d'élève de cette école au 1^{er} Janvier 2011 .

On a :

$$U_1 = 6000 .$$

$$U_2 = U_1 - 5\%U_1 \Rightarrow U_2 = U_1(1 - 5\%) = U_1(1 - \frac{5}{100}) = U_1(0,95)$$

$$U_3 = U_2(0,95)$$

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$$

$$U_{n+1} = U_n(0,95)$$

$$\Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} = 0,95.$$

Alors on a : une suite géométrique de raison $q = 0,95$.

D'où son expression est : $U_n = U_1(q)^{n-1} = 6000(0,95)^{n-1}$

Déterminons ainsi le nombre d'élève de cette école au 1^{er} Janvier 2015 :

- Au 1^{er} Janvier 2015

On sait que : $U_n = 6000(0,95)^{n-1}$ et $n = 2015 - 2011 = 4$

D'où la population au 1^{er} Janvier 2015 est : $U_4 = 6000(0,95)^{4-1} = 6000(0,95)^3$

$$\Rightarrow U_4 = 5144,25 \approx 5144$$

Ainsi l'effectif de l'école serait de 5144 élèves au 1^{er} Janvier 2015.

Synthèse 3 :

a- Sachant que le prix du litre subit une augmentation de 5 FCFA au 1^{er} Janvier de chaque année, calculons le prix du litre d'essence au premier Janvier 2013 ? Au premier Janvier 2014 ?

Soit $P_0 = 690$ FCFA le prix initial de l'essence au 1^{er} Janvier 2012.

Au 1^{er} Janvier 2013, on a : $P_1 = P_0 + 5 \Rightarrow P_1 = 690 + 5 = 695$ FCFA.

Au 1^{er} Janvier 2014, on a : $P_2 = P_1 + 5 \Rightarrow P_2 = 695 + 5 = 700$ FCFA.

b- Si P_n est le prix du litre d'essence au premier Janvier + n, calculons : P_n et $P_{n+1} - P_n$ puis en déduisons la raison et la nature de la suite P_n .

On sait que :

$$P_0 = 690.$$

$$P_1 = P_0 + 5.$$

$$P_2 = P_1 + 5.$$

$$P_3 = P_2 + 5.$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$P_n = P_{n-1} + 5n$$

Alors $P_n = P_0 + 5n$

Calculons $P_{n+1} - P_n$

$$\text{On sait que } P_n = P_0 + 5n \Rightarrow P_{n+1} = P_0 + 5(n+1) = P_0 + 5n + 5.$$

$$\text{Alors } P_{n+1} - P_n = (P_0 + 5n + 5) - (P_0 + 5n) = P_0 + 5n + 5 - P_0 - 5n = 5$$

$$\Rightarrow P_{n+1} - P_n = 5.$$

Déduction :

P_n est une suite arithmétique de raison $r = 5$ et de premier terme $P_0 = 690$.

EXERCICES

Exercice 1:

Un commerçant place en banque une somme de 200 000 F CFA le 02/01/2008. La banque lui propose un intérêt de 5% par mois.

- a) Calculer l'intérêt perçu le 31/01/2008
- b) Quel montant aura – t – il le 31/12/2008.

Exercice 2:

Un capital A est placé à intérêts composés au taux de 3 % l'an. On appelle C_0 le capital initial et C_n le capital après n années.

- 1) Expliquer la relation $C_1 = 1.03C_0$ et écrire le capital C_n en fonction de C_0 et de n en justifiant soigneusement cette relation.
- 2) Au bout de combien d'années le capital est-il doublé ?
- 3) Au bout de combien d'années le capital est-il triplé ?

Exercice 3 :

1) soient a et b deux réels tel que $(a ; a + 4b ; 5a + 2b)$ et $(b + 3 ; 3a + 1 ; 6a + b)$ soit des termes consécutifs de suite respectivement arithmétique et géométrique. Trouver a et b.

2) Quatre entiers strictement positifs a ; b ; c et d, forment dans cet ordre une suite géométrique dont la raison q est un entier premier avec a. Trouver ces nombres sachant qu'ils vérifient en outre la relation $10a^2 = d - b$.

Exercice 4 :

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = -4 \\ u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 1 \end{cases}$$

- 1) représenter graphiquement les cinq premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.
- 2) On pose $v_n = u_n - \alpha$; $(\alpha \in \mathbb{R})$.
 - a) Déterminer α pour que (v_n) soit une suite géométrique.
 - b) Exprimer v_n en fonction n puis en déduire que $\forall n \in \mathbb{N} ; u_n = 4 - 8\left(\frac{3}{4}\right)^n$;
 - c) $\forall n \in \mathbb{N}$; on note $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ et $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. Trouver l'expression de S_n puis de S'_n en fonction n.
 - d) Déterminer les limites des suites (u_n) ; (v_n) ; (S_n) et (S'_n) .

Exercice 5 :

Une société Forestière décide de créer un bosquet (Petit bois, touffe d'arbres) à chaque kilomètre entre deux villes A et B distant de 300 Km.

-Au premier kilomètre le bosquet compte 15 arbres

-Au second kilomètre le bosquet compte 22 arbres et à chaque kilomètre qui suit le bosquet compte 7 arbres de plus que le précédent.

- a) Préciser la nature, le 1^{er} terme et la raison de la suite en question.
- b) Quel est le nombre d'arbres que compte le dernier bosquet ?
- c) Quel est le nombre total d'arbres que la société doit planter ?

Exercice 6 :

L'étude de la production intérieure brute, au Mali (en milliard de francs) a donné le résultat suivant : Si P_n désigne la production intérieure de l'année numérotée n , ($n \in \mathbb{N}$), le rapport :

$$\frac{P_{n+1} - P_n}{P_n} = 0,11 \text{ constant. On suppose } P_0 = 140.$$

- 1) a) calculer P_{n+1} en fonction de P_n puis préciser la nature de la suite (P_n) .
 b) calculer P_1 et P_2 .
 c) calculer P_n en fonction de P_0 et n . En déduire P_{10} . (On arrondira au milliard supérieur).
- 2) A partir de quelle année la production sera-t-elle supérieure ou égale à $3 \times P(0)$?
- 3) A partir de quelle année la production sera-t-elle supérieure ou égale à 14.000 (c'est à dire 140 000 milliard de francs) ?

Exercice 7 :

M. N'golo est embauché dans l'entreprise SANOGO BUSINESS

La première semaine il reçoit une somme de 2500 f

La semaine suivante il obtient une augmentation de 500 f.

La même augmentation lui est été promise pour les autres semaines à venir ?

Quel montant aurait-il à la fin de la quatrième semaine (fin du mois) ?

Quelle montant aurait il accumulé au bout d'un mois de 4 semaines ?

Exercice 8 :

La production d'une usine est de 16 000 unités la 1^{ère} année de fonctionnement.

1) On suppose que la production augmente du même nombre d'unité chaque année.

a) Si ce nombre est de 800 unités par an, combien d'unité produira t-elle la 7^{ème} année ?

Quelle sera alors la production totale des dix premières années ?

b) Si elle a produit 19 000 unités la 6^{ème} année, combien d'unité la production a t-elle régulièrement augmenté chaque année ?

Au bout de combien de temps la production annuelle s'élèvera t'elle à 21 400 unités ?

2) On admet maintenant la production croit de 5% par an, combien d'unités produira-t-elle la 5^{ème} année ?

Quelle sera alors la production totale des cinq premières années ?

Exercice 9 :

Soit U_n une progression géométrique décroissante U tel que $U_0 \times U_3 = 32$

- 1) Calculer U_0 et U_3
- 2) Déterminer la raison de la progression U_n .
- 3) Donner l'expression de la progression U_n en fonction de n .

- 4) On pose $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$. Calculer S_n en fonction de n puis en déduire la somme des 20 premiers termes de la progression U_n

Exercice 10 :

Moussa signe, le 1^{er} janvier 2015 un contrat de travail de 12 ans avec l'une des sociétés A et B qui lui vont des offres suivantes :

La société A propose un salaire annuel net de 1 200 000F et une augmentation de 40 000F par an à compter du 1^{er} janvier de chaque année.

La société B propose également un salaire annuel net de 1 200 000F mais avec une augmentation de 3% par an à compter du 1^{er} janvier de chaque année.

On désigne par U_n , le salaire annuel net proposé par la société A pour l'année (2015+n) et V_n le salaire net proposé par la société B pour la même année.

- 1) On pose $u_0 = v_0 = 1\,200\,000$ F. Calculer u_1 ; u_2 ; v_1 et v_2 .
- 2) Montrer que U_n est une suite arithmétique et V_n est une suite géométrique dont on précisera la raison dans chaque cas.
- 3) On suppose que Moussa a signé le contrat avec la société qui fait la meilleure proposition de salaire durant les 12 années de contrat. Trouver la société avec laquelle Moussa a signé le contrat (la réponse doit être justifiée par calculs).

Exercice 11 :

Un paysan possède un champ dans lequel il plante des arbres fruitiers. Pour mieux les entretenir il décide de vendre chaque année les 5% des existants et planter 3 000 nouveaux pieds. Il démarre avec 50 000 pieds en 2015. En désignant par X_n le nombre de pieds d'arbres se trouvant dans son champ au cours de l'année (2015+n).

- 1) a) Déterminer le nombre de pieds d'arbres qu'il aura en 2016 et en 2017.
b) Exprimer X_{n+1} en fonction de X_n .
- 2) On considère la suite (U_n) définie par $U_n = 60\,000 - X_n$.
 - a) Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
 - b) Exprimer (U_n) en fonction de n , en déduire (X_n) en fonction de n .
 - c) Ce paysan aura combien d'arbres fruitiers dans 20 ans ?
 - d) Calculer la limite de la suite (X_n) . Conclure