

Mathématiques 11^{ème} Sciences Économiques et Sociales

Production de Mathematikos

Nota

Ce polycopié tient lieu de **Notes de cours** et ne dispense en aucune façon la présence aux cours proprement dit de *Mathématiques*.

Mea Culpa

Comme dans toutes notes de cours, des erreurs sont encore présentes dans ce polycopié.

N'hésitez pas à me les communiquer à l'adresse : www.mathematikos.ml

Approche Par Compétence

MATHÉMATIQUES 1 1^{ÈME} SCIENCES ÉCONOMIQUES ET SOCIALES

03 heures par semaine

Programme Pédagogique

UNITÉ D'APPRENTISSAGE 1

Chapitre I : Activités Graphiques

Chapitre II : Systèmes d'équations linéaires

Chapitre III : Fonction polynôme du second degré

Chapitre IV : Calculs de Pourcentage

UNITÉ D'APPRENTISSAGE 2

Chapitre V : Statistique

Chapitre VI : Fonction homographique

Chapitre VII : Dérivation des fonctions

UNITÉ D'APPRENTISSAGE 3

Chapitre VIII : Suites Numériques

Chapitre IX : Dénombrement - Probabilité

Publication de Mathematikos – version révisée de Septembre 2023

Le Chargé Principal de cours

SAMATE L@mine, Professeur des Lycées.



CHAPITRE 1

ACTIVITÉS GRAPHIQUES

Domaine : Sciences, Mathématiques et Technologies

Compétences : Résoudre une situation problème

Composantes : Mettre à l'essai des pistes de solution et partager les informations relatives à la démarche scientifique et mathématique

Manifestations : Établir les relations entre les données retenues et inventorier les pistes de solutions

Ressources éducatives : Professeur, élèves, matériels didactiques

Stratégies d'animation : Travaux en groupe (pédagogie active).



Contenu

Séquence 1 : Fonction affine

1.1. Fonction affine

a) Approche 1 en groupe de travail

Une étude météorologique sur la ville de *Kidal* dans une journée a fourni les résultats consignés dans le tableau suivant où x désigne l'heure et $f(x)$ la température exprimée en degré Celsius.

x	5	7	11	15
$f(x)$	6	10	18	26

Consignes

Construire les points correspondant à cette évolution de température journalière puis les joindre entre eux.

Synthèse Partielle 1

La représentation de température obtenue est une droite. On dit que cette température évolue suivant une fonction affine.

Synthèse Générale 1

Définition

Étant donné un couple (a, b) de nombre réels non nuls. On nomme fonction affine associée à ce couple, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto ax + b$ avec a et $b \in \mathbb{R}^*$

Remarque

- 1) Si le réel $b = 0$, la fonction est une *fonction linéaire* $x \mapsto ax$.
- 2) Si le réel a est nul, la fonction affine se réduit à la *fonction constante* $x \mapsto b$.

Évaluation 1

Préciser parmi les fonctions suivantes celles qui sont affines :

a) $f(x) = 2x + 4y^2$ b) $g(x) = 5x + 4xy$ c) $h(x) = 2x + 1$.

1.2. Représentation d'une fonction affine

Synthèse Générale 2

Définition

Étant donnée une fonction affine $f(x) = ax + b$, avec a et b des réels non nuls. On nomme graphe ou représentation graphique de f , le sous-ensemble de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dont les éléments sont les couples $(x; f(x))$ pour tout x réel. Ce graphe est une droite.

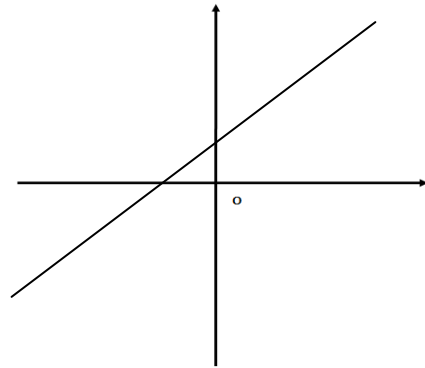
Tracé de la droite d'une fonction affine

La fonction affine f définie par $f(x) = ax + b$ est représentée graphiquement dans un repère par une droite passant par le point de coordonnées $(0, b)$ et parallèle à celle qui représente l'application linéaire $x \mapsto ax$.

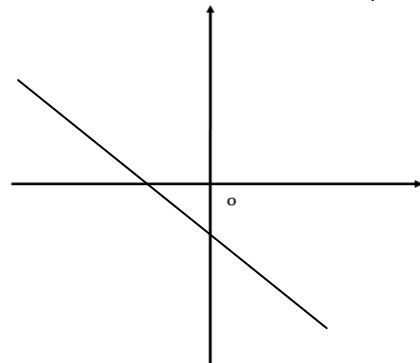
Pour construire la droite de la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$, on utilise un tableau de valeurs à double entrée en x et $f(x)$. Cette droite passe par les points $(x, f(x))$.

Remarque

-Si $a > 0$, l'allure de la droite est donnée par :



-Si $a < 0$, l'allure de la droite est donnée par :



Évaluation 2

Construire la droite représentant les fonctions affines:

a) $f(x) = 2x + 1$ b) $g(x) = -x + 3$

1.3. Formule explicite d'une fonction affine définie par deux réels et leurs images respectives**a) Approche 2 en groupe de travail**

Soit la fonction f telle que $f(0) = 4$ et $f(1) = 5$

Consignes

Trouver la formule explicite de la fonction affine f .

Synthèse Partielle 2

A partir de deux points et leurs images, on peut trouver la formule de la fonction affine associée.

Synthèse Générale 3

Soit à déterminer explicitement la fonction affine f telle que

$$f(A) = B \text{ et } f(C) = D \text{ pour tous } A, B, C \text{ et } D$$

On a : f étant affine $f(x) = ax + b$

Pour $x = A, f(A) = B \Rightarrow aA + b = B$

Pour $x = C, f(C) = D \Rightarrow aC + b = D$

On forme le système d'inconnues a et b

On a :
$$\begin{cases} aA + b = B \\ aC + b = D \end{cases}$$

La résolution par la méthode d'addition donne :

$$\begin{cases} a = \frac{B - D}{A - C} \\ b = \frac{AD - BC}{A - C} \end{cases}$$

D'où la formule explicite de f

$$f(x) = \left(\frac{B - D}{A - C} \right) x + \frac{AD - BC}{A - C}$$

Évaluation 3

Déterminer explicitement la fonction affine f telle que :

$$f(1) = 3 \text{ et } f(2) = 1$$

1.4. Formule explicite d'une fonction affine définie par sa représentation graphique**a) Approche 3 en groupe de travail**

On considère la fonction affine f dont la droite représentative passe par les points $A(0,4)$ et $B(1,5)$?

Consignes

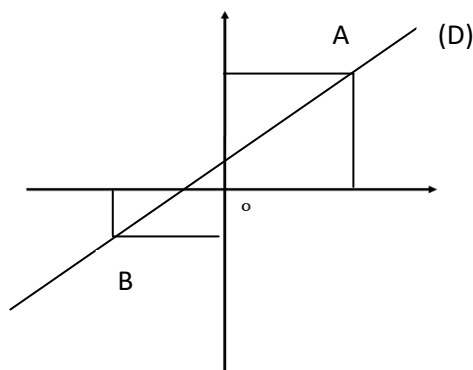
Trouver la formule explicite de la fonction affine f .

Synthèse Partielle 3

A partir de deux points, on peut trouver la formule de la fonction affine associée.

Synthèse Générale 4

Pour déterminer la formule explicite d'une fonction affine f représentée par la droite (D) dans le repère, on procède ainsi :



La fonction affine est la forme $f(x) = ax + b$

La droite (D) passe par les points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$

En procédant comme dans le cas précédent, on forme le

système :
$$\begin{cases} y_A = ax_A + b \\ y_B = ax_B + b \end{cases}$$

On détermine a et b par résolution du système.

On a : $a = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$ et $b = \frac{x_A y_B - x_B y_A}{x_A - x_B}$

D'où $f(x) = \left(\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \right) x + \frac{x_A y_B - x_B y_A}{x_A - x_B}$

Évaluation 4

Soit la droite (Δ) passant par les points A et B de

coordonnées respectives $(-1,0)$ et $(0,1)$. Donner une

formule explicite de l'expression de la fonction affine de cette représentation.

1.5. Propriétés des fonctions affines

Étant données deux fonctions affines définies par $f(x) = ax + b$ et $g(x) = a'x + b'$ et k un nombre réel.

a) Somme $f + g$

$$f(x) + g(x) = (f + g)(x) = ax + b + a'x + b'$$

$$f(x) + g(x) = (a + a')x + b + b'$$

En posant $a + a' = A$ et $b + b' = B$

$$\text{Alors } f(x) + g(x) = Ax + B$$

On dira que la somme de deux fonctions affines est une fonction affine.

b) Multiplication par un réel kf

$$kf(x) = (kf)(x) = k(ax + b) = kax + kb$$

En posant $ka = A$ et $kb = B$

$$\text{Alors } kf(x) = Ax + B$$

On dira que le scalaire d'une fonction affine par un réel est toujours une fonction affine.

Évaluation 5

On considère les fonctions affines définies par :

$$f: \mapsto -2x + 3 \text{ et } g: \mapsto 3x - 1$$

Calculer $f(x) + g(x)$ et $-4f(x)$

1.6. Droite parallèle à l'axe des ordonnées et droite non parallèle à l'axe des ordonnées

Synthèse Générale 5

Définitions

a) Droite parallèle à l'axe des ordonnées

Une droite parallèle à l'axe des ordonnées est une droite d'équation cartésienne $x = k$ ($k \in \mathbb{R}$)

b) Droite non parallèle à l'axe des ordonnées

Une droite non parallèle à l'axe des ordonnées est une droite représentée par une fonction affine

$$y = f(x) = ax + b \text{ pour tous } a \text{ et } b \text{ appartenant à } \mathbb{R}^*.$$

Évaluation 6

1) Parmi les équations de droites suivantes, préciser celle qui sont parallèles à l'axe des ordonnées.

$$\text{a) } x - 5 = 0 \quad \text{b) } y = 3 \quad \text{c) } y = 2x \quad \text{d) } x = 1$$

2) Préciser si les fonctions suivantes représentent les droites non parallèles à l'axe des ordonnées :

$$\text{a) } f(x) = -2x \quad \text{b) } g(x) = 4x + 1 \quad \text{c) } h(x) = 5$$

1.7. Interprétation de la pente et de l'ordonnée à l'origine

a) Définition

Soit la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$ de représentation graphique la droite (D) dans un repère orthogonal.

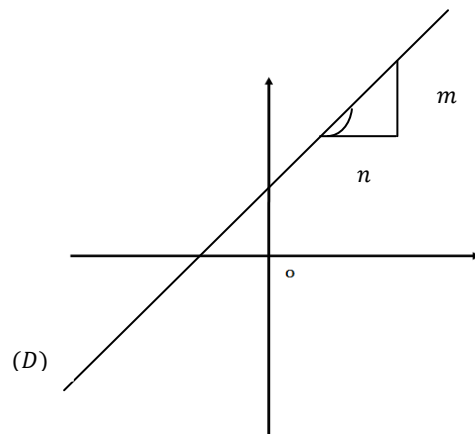
Le réel a est la **pente** ou le **coefficient directeur** ou **coefficient angulaire** de la droite (D).

Le réel b est l'**ordonnée à l'origine** (point d'intersection de (D) avec l'axe des ordonnées).

b) Interprétation graphique de la pente

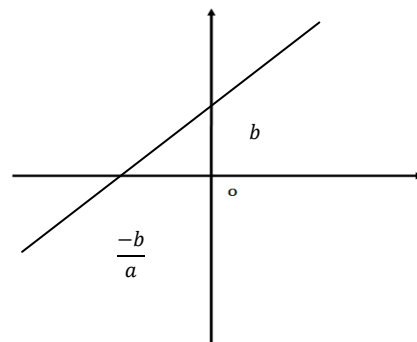
Soit la fonction affine $f(x) = ax + b$.

La pente représente la tangente de l'angle que fait la droite (D) de f avec l'horizontale. C'est-à-dire si $a = \frac{m}{n}$ on a :



c) Interprétation graphique de l'ordonnée à l'origine

Soit la fonction affine de représentation la droite (D). On a :



L'ordonnée à l'origine est le point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées. C'est-à-dire pour $x = 0$, $f(x) = b$.

d) Interprétation analytique et mécanique de la pente de l'ordonnée à l'origine



Soit la fonction affine $f(x) = ax + b$

- Cette fonction représente le terme général d'une *progression arithmétique* de raison a et de premier terme b .
- Cette fonction représente la distance parcourue par un mobile à l'instant t de vitesse a et de distance initiale b .

Séquence 2 : Résolution graphique d'équations $f(x) = 0$ et de système d'équation

Approche 4 en groupe de travail

On considère la fonction affine $f(x) = x - 2$.

Consignes

- Construire la droite représentant la fonction f
- Trouver l'abscisse du point d'intersection de cette droite avec l'axe des abscisses.

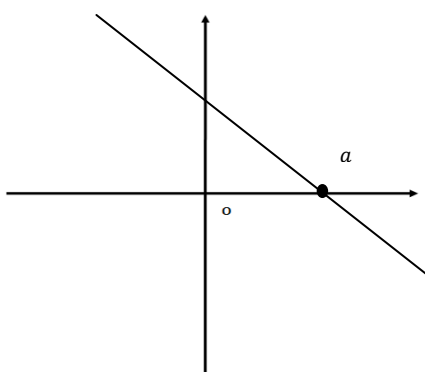
Synthèse Partielle 4

On dira que l'on a résolu l'équation $f(x) = 0$

Synthèse Générale 6

Soit f une fonction affine telle que $f(x) = ax + b$.

Résoudre graphique $f(x) = 0$ c'est trouvé l'abscisse du point d'intersection de la droite représentant f avec l'axe des abscisses (la droite de la fonction $g(x) = 0$).



Alors l'ensemble solution est $S = \{a\}$

Évaluation 7

On donne la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2}x - 3$
Résoudre graphique $f(x) = 0$

1.9. Résolution d'équation $f(x) = k$ avec $k \in \mathbb{R} - \{0\}$

Approche 5 en groupe de travail

Soit la fonction affine telle $f(x) = x - 2$.

Consignes

- Construire la droite représentant la fonction f
- Trouver l'abscisse du point d'intersection de cette droite avec la droite de la fonction constante $g(x) = -3$

Synthèse Partielle 5

On dit que l'on a résolu l'équation $f(x) = -3$

Synthèse Générale 7

Soit f une fonction affine telle que $f(x) = ax + b$.

Résoudre graphique $f(x) = k$ ($k \neq 0$), c'est trouvé

l'abscisse du point d'intersection de la droite représentant f avec la droite représentant la fonction constante $g(x) = k$

Évaluation 8

On considère la fonction $f: x \mapsto 4x - 1$

Résoudre graphiquement $f(x) = 3$

1.10. Résolution graphique de système d'équations

a) Approche 6 en groupe de travail

On considère les fonctions affines suivantes :

$$f(x) = x - 3 \quad \text{et} \quad g(x) = -2x + 1$$

Consignes

- Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :
(1): $f(x) = -2$ et (2): $g(x) = 3$
- Trouver l'ensemble des x à la fois solution de (1) et (2)

Synthèse Partielle 6

On dit que l'on a résolu le système d'équation $\begin{cases} f(x) = -2 \\ g(x) = 3 \end{cases}$

Synthèse Générale 8

Étant données f et g deux fonctions affines telles que $f(x) = ax + b$ et $g(x) = a'x + b'$ et $(c, d) \in \mathbb{R}^{*2}$

La résolution graphique du système $\begin{cases} f(x) = c \\ g(x) = d \end{cases}$ (1)

c'est-à-dire du système $\begin{cases} ax + b = c \\ a'x + b' = d \end{cases}$ (2)^a pour solution la

réunion de l'ensemble des solutions des équations (1) et (2) résolues graphiquement. C'est-à-dire si (1) a pour solution

$S_1 = \{x_1\}$ et que (2) a pour solution $S_2 = \{x_2\}$, alors
l'ensemble solution du système est $S = S_1 \cup S_2 = \{x_1; x_2\}$

Évaluation 9

Résoudre graphiquement le système d'équation $\begin{cases} 2x + 1 = 5 \\ x - 1 = 2 \end{cases}$

1.11. Résolution du système d'inéquations

a) Approche 7 en groupe de travail

On considère les fonctions affines suivantes :

$$f(x) = x + 3 \text{ et } g(x) = -2x - 1$$

Consignes

a) Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$ les inéquations

suivantes : (1): $f(x) \geq 2$ et (2): $g(x) \geq -3$

b) Trouver l'ensemble des x à la fois solution de (1) et (2)

Synthèse Partielle 7

On dit que l'on a résolu le système d'inéquation $\begin{cases} f(x) \geq 2 \\ g(x) \geq -3 \end{cases}$

b) Résolution

Étant données f et g deux fonctions affines telles que
 $f(x) = ax + b$ et $g(x) = a'x + b'$ et $(c, d) \in \mathbb{R}^{*2}$

La résolution graphique du système $\begin{cases} f(x) \geq c \quad (1) \\ g(x) \geq d \quad (2) \end{cases}$

c'est-à-dire du système $\begin{cases} ax + b \geq c \quad (1) \\ a'x + b' \geq d \quad (2) \end{cases}$

a) pour solution l'intersection de l'ensemble des solutions des inéquations (1) et (2) résolues graphiquement. C'est-à-dire si (1) a pour solution $S_1 = A$ et que (2) a pour solution $S_2 = B$, alors l'ensemble solution du système est

$$S = S_1 \cap S_2 = A \cap B$$

Évaluation 10

Résoudre les systèmes d'inéquations suivants :

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 1 \geq 3 \\ -3x + 1 \geq -5 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + 1 \leq 3 \\ 3x + 1 \leq 10 \end{cases}$$

Séquence 3 : Fonction affine par intervalle et en escalier (30 min)

1.12. Fonction affine par intervalle

a) Approche 8 en groupe de travail

On considère la fonction affine f définie par $f(x) = |x + 2|$

Consignes

a) Écrire f sans le symbole de la valeur absolue

On désigne par f_1 et f_2 les deux fonctions affines trouvées.

b) Construire les droites représentant f_1 et f_2

Synthèse Partielle 8

On dit que f est une fonction affine par intervalle

Synthèse Générale 9

Définition

On nomme fonction affine par intervalles, toute fonction f définie sur une réunion d'intervalle sur chacun desquels f coïncide avec une fonction affine.

La réunion de ces intervalles forme $\mathbb{R}$.

Évaluation 11

On définit la fonction affine f par intervalles telle que :

$$\begin{cases} f(x) = -2x + 3 \text{ pour } x \in [-3; -1[\\ f(x) = 5 \text{ pour } x \in [-1; 3[\\ f(x) = 3x \text{ pour } x \in [3; 4] \end{cases}$$

a) Construire le graphe correspondant à f

b) Calculer $f(-2)$, $f(0)$, $f\left(\frac{7}{2}\right)$ et $f(-3)$.

1.13. Fonction en escalier

Synthèse Générale 10

Définition

On appelle fonction en escalier toute fonction dont la représentation graphique relative à un repère orthogonal sur chacun des intervalles est une fonction constante.

Évaluation 12

Représenter graphiquement la fonction en escalier définie

$$\text{par : } f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } -1 \leq x < 1 \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

On remarque que la réunion des trois intervalles est l'ensemble $\mathbb{R}$

Séquence 4 : Résolution de problème concret faisant appel à des fonctions affines ou fonctions affines par intervalle

Synthèse Générale 11

Les étapes successives de la résolution algébrique d'un problème concret sont :

1^{ère} étape : Mathématisation

- Choix des inconnues,
- Traduction des éléments de l'énoncé,
- Expression des conditions imposées.

2^{ème} étape : Résolution algébrique

(Résolution par des méthodes classiques)

3^{ème} étape : Retour au problème posé

(Pour la vérification)

Évaluation 13

Le réservoir d'une automobile contient 25 litres d'essence au départ. Cette automobile économique consomme 6 litres par cent kilomètres parcourus.

- 1) Exprimer la quantité d'essence contenue dans le réservoir après un trajet exprimé en kilomètre
- 2) Déterminer la quantité d'essence restante dans le réservoir après que l'automobile effectue 50 km de trajet.
- 3) Contrôler graphiquement le résultat.

Évaluation 14

Pour un compteur d'eau les frais standards s'élèvent mensuellement à 1956 F CFA.

Entre 0 et 34 m^3 le prix du m^3 est 106 F CFA

Entre 34 et 70 m^3 le prix du m^3 est 156 F CFA

Au-delà de 70 m^3 le prix du m^3 est 180 F CFA

La location, l'entretien ... s'évaluent à 20 F CFA par m^3

- a) Trouver la fonction affine par intervalle associée à ces données.
- b) Représenter graphiquement cette fonction par intervalle (en adoptant les échelles de votre choix).
- c) Que vaut la dépense de consommation d'eau pour 40 m^3 .

Séquence 5 : Représentation graphique des fonctions usuelles**a) Fonction du type $x \mapsto x^2$** **Approche 9 en groupe de travail**

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

Consignes

- a) Compléter le tableau de valeurs suivant correspondant à f

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

- b) Construire le graphique correspondant point par point

Synthèse Partielle 9

Le graphique obtenu est une *parabole*

b) Fonction du type $x \mapsto \frac{1}{x}$ **Approche 10 en groupe de travail**

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

Consignes

- a) Compléter le tableau de valeurs suivant correspondant à f

x	-3	-2	-1	1	2	3
$f(x)$						

- b) Construire le graphique correspondant point par point

Synthèse Partielle 10

Le graphique obtenu est une *hyperbole*

c) Fonction du type $x \mapsto \sqrt{x}$ **Approche 11 en groupe de travail**

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sqrt{x}$

Consignes

- a) Compléter le tableau ci-dessous correspondant à f

x	0	1	4	9
$f(x)$				

- b) Construire le graphique correspondant point par point

Synthèse Partielle 11

Le graphique obtenu est une *branche parabolique*.

1.16. Complémentaire de cours

Partant de certaines fonctions usuelles, on peut construire d'autre type de graphe point par point.

Évaluation 15

On considère la fonction f définie par

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2x^2 + 1$$

- a) Faire le tableau de valeurs correspondant à f
- b) Construire le graphe de f point par point.

Mention légale – Mathematikos

