

Avants - Propos :

Conformément au nouveau programme de mathématiques, ce présent manuel est le résultat d'un travail réalisé par un comité d'enseignants du secondaire qui répond au souci du ministère de l'éducation nationale pour la mise en œuvre de **l'approche par compétence (A.P.C)** dans les classes de **11^{ème} SES (11^{ème} Science Economique et Sociale)** au Mali et ayant pour **objectif** d'uniformiser le niveau des élèves venant des classes antérieures afin de leur offrir les mêmes chances dans la poursuite de leurs études universitaires. Il permet en outre d'harmoniser la pédagogie des mathématiques et de mettre à la disposition des élèves l'acquisition d'une formation solide.

Chacun des chapitres recouvrant l'ensemble du programme, est composé de **04** parties :

■ **Situation - Problème :**

Une **activité ouverte** permettant d'aborder en grande partie les connaissances nouvelles.

■ **Activités préparatoires :**

Les **activités préparatoires**, approches simples des nouvelles notions à partir des connaissances acquises dans les classes antérieures.

■ **Le cours :**

Rien que **l'essentiel dans un langage clair et simple** avec des **démonstrations**. Chaque définition ou théorème est suivi d'un exemple simple, court, en situation, pouvant servir de référence et d'aide à la démonstration.

■ **Exercices et problèmes :**

- **Les exercices** : Inédits et ordonnés suivant **la progression du cours**, ils contribuent à l'acquisition et à l'assimilation du cours.
- **Les problèmes** : Variés, ce sont des **problèmes de synthèse** ou des problèmes ouverts pour aller plus loin dans l'acquisition de vos connaissances sans aller au-delà du programme en vigueur.

Nous souhaitons donc que l'utilisation de ce livre ne se substitue pas au travail des professeurs en classe, mais qu'il constitue un support efficace, utile aux élèves pour mieux comprendre les mathématiques dans toute sa diversité. A cet effet, nous tenons à remercier **les éditions SAMASSA** et tous ceux qui voudront bien nous faire part de leurs remarques, critiques, suggestions ou autres solutions plus élégantes que les nôtres, que nous publierons dans une future édition.

Les auteurs

SOMMAIRE

1

Activités graphiques 63

- 1- Situation problème.
- 2- Activité préparatoire
- 3- Utilisation des tables de valeurs.
- 4- Fonctions affines et droite non parallèles à l'axe des ordonnées.
- 5- Interprétation géométrique du coefficient directeur d'une droite.
- 6- Résolution des équations du type $f(x) = 0$ et $f(x) = y$.

2

Systèmes d'équations.....63

- 1- Situation problème.
- 2- Activité préparatoire
- 3- Systèmes d'équations linéaires à deux inconnues.
- 4- Systèmes d'équations linéaires à trois inconnues.

3

Fonctions polynômes.....23

- 1- Situation problème.
- 2- Activité préparatoire
- 3- Définition.
- 4- Zéro d'un polynôme.
- 5- Factorisation d'un polynôme.
- 6- Egalité de deux polynômes
- 7- Fonctions polynômes du second degré.

4

Pourcentages...100

- 1- Situation problème.
- 2- Activité préparatoire
- 3- Pourcentage direct.
- 4- Pourcentage indirect.

5

Fonctions homographiques...156

- 1- Situation problème.
- 2- Activité préparatoire
- 3- Définition
- 4- Forme canonique d'une fonction homographique.
- 5- Représentation d'une fonction homographique.
- 6- Variation d'une fonction homographique.

6

Fonctions numériques d'une variable réelle...

- 1- Situation problème.
- 2- Activité préparatoire
- 3- Limite.
- 4- Continuité.
- 5- Dérivation.

7

Dénombrement – Probabilité ...156

- 1- Situation problème.
- 2- Activité préparatoire
- 3- Dénombrement
- 4- Probabilité.

8

Statistiques...156

- 1- Situation problème.
- 2- Activité préparatoire
- 3- Définition et présentation des données.
- 4- Éléments caractéristiques d'une série statistique.

Objectifs

Ce chapitre vise à :

- approfondir les notions d'arithmétique vues au premier cycle ;

Savoirs et savoir-faire

1. NOMBRES PREMIERS

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Définition. • L'ensemble des nombres premiers est infini. • Décomposition d'un entier naturel en produit de facteurs premiers	• Démontrer qu'un nombre est premier. • Déterminer l'ensemble des diviseurs d'un entier naturel non nul. • Décomposer un entier en produit de facteurs premiers.

2. PGCD, PPCM

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Définition et propriétés. • Algorithme d'Euclide. • Nombres premiers entre eux. • Théorème de Bézout. • Théorème de Gauss	• Déterminer le PGCD de deux nombres : - à l'aide de l'algorithme d'Euclide ; - à l'aide de la décomposition en produit de facteurs premiers. • Déterminer le PPCM de deux nombres : - à l'aide de la décomposition en produit de facteurs premiers ; - à l'aide du PGCD. • Utiliser le théorème de Bézout pour démontrer que des entiers sont premiers entre eux. • Utiliser le théorème de Gauss pour résoudre des problèmes d'arithmétique.

Activité graphique

a- Coordonnées d'un point :

Activité :

Le plan étant muni d'un repère (O, I, J) , On considère un point A qui n'est situé ni sur (OI) ni sur (OJ) . La parallèle à (OI) passant par A coupe (OJ) en Q et la parallèle à (OJ) passant par A coupe (OI) en P .

Si A appartient à (OI) , on pose $P = A$ et $Q = O$.

Si A appartient à (OJ) , on pose $P = O$ et $Q = A$.

Place ces points dans le repère.

Définition :

L'**abscisse** x_A du point A est l'abscisse du point P sur (OI) .

L'**ordonnée** y_A du point A est l'abscisse du point Q sur (OJ) .

Le couple $(x_A ; y_A)$ s'appelle **les coordonnées** du point A dans le repère (O, i, j) .

Exemples : déterminer les coordonnées des points $B ; C ; D$.

b- Distance entre deux points :

Soient $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ deux points dans le repère (O, i, j) .

On appelle distance de A à B , le réel positif ou nul noté : **AB ou $d(A ; B)$** tel que :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Remarque:

- Il faut que le repère soit orthonormé car cette propriété repose sur le théorème de PYTHAGORE.
- $(x_B - x_A)^2 = (x_A - x_B)^2$, donc l'ordre dans le quel on fait la différence des abscisses (et des ordonnées) de A et B importe peu.

c- Coordonnées du milieu d'un segment :

Soient $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ deux points dans le repère (O, i, j) et I le milieu du segment $[A ; B]$. I est le milieu du segment $[A ; B]$ si et seulement si :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Remarque:

L'abscisse du point I est la moyenne arithmétique des abscisses des points A et B (tout comme l'ordonnée).

Exercices d'application

Dans chacun des cas suivants : calculer la longueur puis le milieu du segment $[A ; B]$.

$$\mathbf{a-} A \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } B \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{b-} A \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ et } B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{c-} A \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2- Equations de droites – parallélisme et perpendicularité:

a- Equation d'une droite :

On appelle équation de droite toute égalité liant l'abscisse et l'ordonnée d'un point **A** qui appartient à cette droite.

Ainsi Toute droite admet une équation de la forme : $y = ax + b$ (**dite équation réduite**).

Exemples : (D) : $y = 3x - 2$; (D') : $y = \frac{1}{3}x - 7$

NB : Pour la droite (D'), dire que $y = \frac{1}{3}x - 7$ équivaut à dire que :

$-x + 3y + 21 = 0$ (**sous la forme : $ax + by + c = 0$**).

$ax + by + c = 0$ (**dite équation cartésienne**).

$$x = c$$

Remarque :

- Une droite admet une infinité d'équations.
- Toute droite non parallèle à l'axe (OI) et l'axe (OJ) a pour équation $y = ax + b$ ou $ax + by + c = 0$.
- Toute droite parallèle (OJ) a pour équation $x = c$.
- Les coefficients (**a et b**) sont des réels uniques.

b- Coefficient directeur d'une droite :

Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation de la forme : $y = ax + b$. le nombre a s'appelle le **coefficient directeur** de cette droite.

NB :

- La droite d'équation $y = ax + b$ est **parallèle** à la droite d'équation $y = ax$.
- Si $ax + by + c = 0$ est l'**équation cartésienne** d'une droite, alors son vecteur directeur $\vec{U}$ a pour coordonnées $\vec{U}(-b; a)$.

c- Interprétation graphique du coefficient directeur d'une droite :

Dans un repère (O ; I ; J) donné, la valeur de **a** permet de suivre l'inclinaison de la droite d'équation $y = ax + b$, ou ce qui revient au même, la droite d'équation $y = ax$ par rapport à l'axe des abscisses.

d- Droites parallèles - droites sécantes – droites perpendiculaires :

Soit (D) et (D') deux droites d'équation respectives : $y = ax + b$ et $y = a'x + b'$.

- (D) est **parallèle** à (D') si et seulement si $a = a'$.
- (D) et (D') sont **sécantes** si et seulement si $a \neq a'$.
- (D) et (D') sont **perpendiculaires** si et seulement si $aa' = -1$.

Exercice d'application

Dans chacun des cas suivants, indiquer les droites qui sont parallèles, sécantes ou perpendiculaires :

$$(D_1) : y = 4x + 7 ; (D_2) : y = -3x + 9 ; (D_3) : y = -2x ; (D_4) : x = -2 .$$

$$(D_5) : y = -x + 9 ; (D_6) : y = x - 9 ; (D_7) : y = -2x - 1 ; (D_8) : y = x + 1$$

$$(D_9) : y = -x + 9 ; (D_{10}) : y = -x - 9 ; (D_{11}) : y = \frac{-1}{4}x + 1 ; (D_{12}) : x = -3$$

e- Comment tracer une droite dans le repère :

Soit la droite **(D)** d'équation : $y = ax + b$.

Méthode1:

Pour tracer deux droites, **deux points** suffisent. Il faut donc calculer l'image par f de deux valeurs distinctes x_1 et x_2 puis tracer la droite passant par les points de coordonnées $(x_1 ; f(x_1))$ et $(x_2 ; f(x_2))$.

Méthode2:

On utilise l'ordonnée à l'origine **b** et le coefficient directeur **a** de la droite **(D)** d'équation : $y = ax + b$.

Pour cela, on place le point de coordonnées $(0 ; b)$ sur l'axe des ordonnées puis on construit un deuxième point de **(D)** en utilisant le fait que lorsque x varie de h alors $f(x)$ varie de ah .

NB :

Pour les droites de la forme $x = c$, on trace la droite passant par deux points d'abscisse $x = c$ et d'ordonnées quelconques différentes.

Exemple :

Tracer la représentation graphique de la droite **(D)** : $y = -x + 1$.

Remarque :

- Si deux droites sont parallèles à l'axe des ordonnées, alors elles sont parallèles.
- Si deux droites sont telles que l'une est parallèle à l'axe des ordonnées et pas l'autre, alors elles sont sécantes.
- Si deux droites sont sécantes, pour trouver les coordonnées du point d'intersection, on résout le système formé à partir des équations de ces deux droites.

Exercice d'application :

Parmi les équations suivantes, indiquer celles qui sont des équations de droite. Lorsque c'est le cas, tracer la droite d'équation $y = ax + b$ correspondant et donner le coefficient directeur, lorsqu'il existe.

a) $y = -2x + 7$ b) $x = -\pi$ c) $y = \sqrt{x^2}$

d) $-5x + 2y + 7 = 0$ e) $y = \frac{3}{x-5}$ f) $\frac{x-1}{3y} = \frac{2}{3}$

f) Détermination d'une équation d'une droite passant par deux points distincts

Méthode :

Soient $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ deux points distincts.

- Si $x_A = x_B$, alors une équation de la droite est $x = x_A$.
- Si $x_A \neq x_B$, alors on calcule le coefficient directeur **a** tel que : $\mathbf{a} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
 puis la valeur de **b** telle que : $y_A = \mathbf{a} x_A + \mathbf{b}$ ou $y_B = \mathbf{a} x_B + \mathbf{b}$

Exercice d'application

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation de la droite **(D)** passant par les points A et B puis tracer la.

a- $A \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ **b-** $A \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ **c-** $A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

g- Détermination d'une équation d'une droite parallèle à une autre droite :

Méthode :

Soit la droite **(D)** d'équation : $y = ax + b$. Pour déterminer l'équation de la droite **(D')**

d'équation $y' = ax + b'$ passant par $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et parallèle à **(D)**,

On cherche uniquement la valeur de b' telle que : $y_A = \mathbf{a} x_A + \mathbf{b}'$.

Exercice d'application

Donner une équation de la droite parallèle à la droite d'équation :

$Y = -5x + \frac{2}{3}$ et passant par le point $A(1 ; 4)$.

h- Détermination des coordonnées du point d'intersection de deux droites :

Méthode :

Soient **(D)** et **(D')** deux droites sécantes et d'équations respectives :

$$y = ax + b \text{ et } y' = a'x + b'.$$

Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites **(D)** et **(D')**, on résout le système formé par les deux équations :

$$y = ax + b \text{ et } y' = a'x + b' \text{ telle que : } \begin{cases} y = ax + b \\ y' = a'x + b' \end{cases}$$

i- Représentation paramétrique d'une droite D :

- Droite passant par un point $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$D(A ; \vec{u}) = \left\{ M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in P ; \overrightarrow{AM} = k\vec{u} \text{ avec } k \in \mathbb{R} \right\}$$

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\vec{u} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = ka + x_0 \\ y = kb + y_0 \end{cases}$$

Ce système est un système d'équations paramétrique ou encore une représentation paramétrique de D.

- Droite passant par deux points $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ notée $D(A ; B)$

Il suffira de savoir que $D(A ; B) = D(A ; \overrightarrow{AB})$ et poser que $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D(A ; B) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = k(x_B - x_A) + x_A \\ y = k(y_B - y_A) + y_A \end{cases}$$

Réciproquement dans le plan rapport à un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, tout système de la forme

$$\begin{cases} x = \lambda a + x_0 \\ y = \lambda b + y_0 \end{cases} \text{ est une représentation paramétrique d'une droite D passant par le}$$

point $A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

- Représentation ou équation cartésienne de $D(A ; \vec{u})$

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D(A; \vec{u}) \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}) = 0 \text{ or } A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}; \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Alors on a : } \det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_A & x_0 \\ y - y_A & y_0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow y_0(x - x_A) - x_0(y - y_A) = 0 \text{ d'où } D(A; \vec{u}): y_0(x - x_A) - x_0(y - y_A) = 0$$

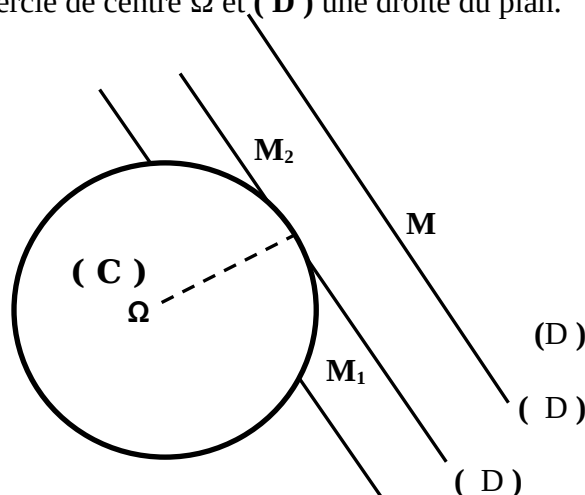
Exercice d'application

Dans chacun des cas suivants, démontrer que les deux droites **(D)** et **(D')** sont sécantes et déterminer les coordonnées de leur points d'intersection.

- a- **(D)** : $y = 3x + 1$ et **(D')** : $y = -5x + 3$
b- **(D)** : $3y = 2x + \frac{1}{2}$ et **(D')** : $4x = 2y + 9$

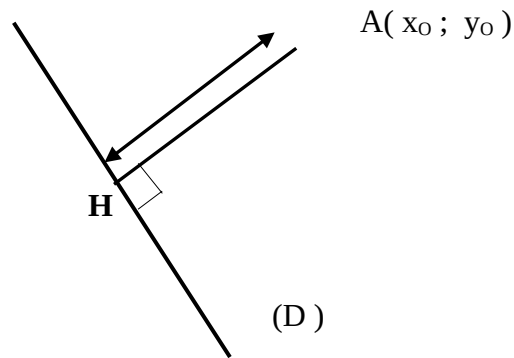
a- Position relative d'une droite et d'un cercle :

Soit **(C)** un cercle de centre Ω et **(D)** une droite du plan.



- Si $(C) \cap (D) = \emptyset$, alors $d((C); (D)) > r$.
- Si $(C) \cap (D) = [M]$, alors $d((C); (D)) = r$ et **(D)** est tangente à **(C)**.
- Si $(C) \cap (D) = [M_1; M_2]$, alors $d((C); (D)) < r$.

le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, on considère la droite **(D)** d'équation : $ax + by + c = 0$ et un point $A(x_0; y_0)$.



$$d((C) ; (D)) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

b- Reconnaissance de l'ensemble des points $M(x; y)$ du plan tel que : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ (en utilisant la forme canonique)

Soit (C) un cercle d'équation : $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, pour trouver le centre et le rayon en utilisant la forme canonique qui se présente sous la forme :

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + ax) + (y^2 + by) + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[x^2 - 2\left(-\frac{a}{2}\right)x \right] + \left[y^2 - 2\left(-\frac{b}{2}\right)y \right] + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right] + \left[\left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \right] + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} + c = 0$$

$$<=> \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c\right) = 0$$

$$<=> \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}\right) = 0$$

$$<=> \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}\right)$$

$$<=> \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}$$

Alors l'ensemble des points M cherché est le **cercle de centre** $\Omega\left(\frac{-a}{2}; \frac{-b}{2}\right)$ et de **rayon**

$$r = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$$

EXERCICES

Exercices 1 :

Déterminer une équation réduite de chacune des droites suivantes :

1) $(D_1) : 2x + y = 3$; **2)** $(D_2) : 2y = -x + 3$; **3)** $(D_3) : -y = -2x - 4$

4) $(D_4) : 2x + y - 5 = 0$; **5)** (D_5) passe par $A\left(\frac{2}{3}\right)$ et de pente -2

6) (D_6) passe par $B\left(\frac{1}{0}\right)$ et de coefficient directeur $\frac{1}{2}$

Exercices 2 :

1) Déterminer une équation de la droite (D) passant par les points A et B dans chacun des cas suivants :

$$\mathbf{a-} A\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } B\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 6 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{b-} A\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ et } B\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{c-} A\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{d-} A\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } B\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{e-} A\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } B\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{f-} A\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } B\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

2) Déterminer une équation de la droite (D') parallèle à la droite (D) et passant par le point A dans chacun des cas suivants :

$$\mathbf{a-} (D) : y = -x + 1 \text{ et } A\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{b-} (D) : y = 2x + \frac{1}{2} \text{ et } A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{c-} (D) : y = -\frac{3}{2}x - 1 \text{ et } A\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{d-} (D) : y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2} \text{ et } A\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{e-} (D) : y = x \text{ et } A\begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 3 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{f-} (D) : y = -x\sqrt{3} + 1 \text{ et } A\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Exercices 3 :

Soit un triangle ABC tel que : $A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- 1) Déterminer une équation des médiatrices du triangle ABC.
- 2) En déduire les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercices 4 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

On donne les points $A\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- 1) Donner l'équation réduite de la droite (AB). Quel est son coefficient directeur ?
- 2) Donner une équation de droite passant par C et de coefficient directeur $\frac{7}{2}$.

- 3) Montrer que ces deux droites sont sécantes et déterminer algébriquement puis graphiquement les coordonnées de leur point d'intersection.

Exercices 5 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

On donne les points $A \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$; $B \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

- 1) Donner une équation cartésienne du cercle (C) et de diamètre $[AB]$.
- 2) Soit (D) la droite passant par $C \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{U} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Donner une équation cartésienne puis paramétrique de (D) .

- 3) Déterminer les points d'intersections de (C) et (D) .

Exercices 6 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Donner une équation cartésienne :

- 1) De la droite (D_1) passant par $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{U} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
- 2) De la représentation paramétrique :

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (5t + 1 ; -t + 2) \end{array}$$
- 3) De la droite perpendiculaire à $(D) : 2x - 3y + 4 = 0$ et passant par $K \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- 4) Du cercle de diamètre $[AB]$; avec $A \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- 5) Du cercle de centre $A \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et de rayon $\sqrt{2}$.

Exercices 7 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$.

Déterminer l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifiant les équations de cercles suivants :

1) (C) : $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$; 2) (C) : $x^2 + y^2 + x - 1 = 0$

3) (C) : $x^2 + y^2 + 1 = 0$; 4) (C) : $2x^2 + 2y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$

5) (C) : $-x^2 - y^2 + 3x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{4} = 0$; 6) (C) : $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$

Exercices 8 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$; $\vec{j}$).

On donne le cercle (C) et la droite (D) d'équations respectives :

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 8 = 0 \quad \text{et} \quad 2x - 3y + 1 = 0.$$

- 1) Construire le cercle (C) et la droite (D) dans le même repère.
- 2) Construire les deux tangentes au cercle (C) parallèles à la droite (D).
- 3) Déterminer les coordonnées d'un point et d'un vecteur normal de chacune d'elles.
- 4) En déduire les équations de ces deux tangentes.

Systeme d'équations

1- Résolution de systèmes d'équations dans $\mathbb{R}^2$:

a- Définition :

On appelle système de deux équations du premier degré à deux inconnues, tout système

$$\text{de la forme : } \begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$$

Où : a, b, c, a', b', c' sont tous des réels.

b- Résolution :

Pour résoudre de tels systèmes, nous disposons des méthodes suivantes :

➤ **Méthode d'addition :**

Qui consiste à déterminer les valeurs de x et y par addition des équations (1) et (2) après avoir multiplié respectivement les équations (1) et (2) par des réels de signe opposé pour éliminer x ou y .

➤ **Méthode de substitution :**

Qui consiste à déterminer la valeur d'une des inconnues dans une des équations puis de la remplacer par sa valeur dans l'autre. On obtient ainsi une équation du premier degré à une inconnue que l'on sait résoudre.

➤ **Méthode de comparaison :**

Qui consiste à déterminer la valeur d'une des inconnues dans les deux équations (par exemple x) puis on fait $x = x$. On obtient ainsi une équation du premier degré en y que l'on résout.

➤ **Méthode des déterminants :**

Qui consiste à déterminer les valeurs de x et y en utilisant :

$$\text{Soit à résoudre dans } \mathbb{R}^2 \text{ le système : } \begin{cases} ax + by = c & (1) \\ a'x + b'y = c' & (2) \end{cases}$$

$$\bullet \text{ On pose : } D_p = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = (a \times b') - (a' \times b)$$

D_p est appelé le déterminant principal du système

1^{er} Cas : Si $D_p \neq 0$, le système admet une solution unique $(x; y)$.

On cherche les déterminants secondaires D_x et D_y

- Le déterminant $D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = (c \times b') - (c' \times b)$

- Le déterminant $D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = (a \times c') - (a' \times c)$

Ainsi $x = \frac{D_x}{D_p}$ et $y = \frac{D_y}{D_p}$ d'où $s = \left\{ \frac{D_x}{D_p} ; \frac{D_y}{D_p} \right\}$

2^{ème} Cas : Si $D_p = 0$, on revient au système.

NB :

- D_p est appelé déterminant **principal**
- D_x est appelé déterminant **associé à x**
- D_y est appelé déterminant **associé à y**

Remarque : la méthode du déterminant n'est applicable que lorsque le système est sous la

forme : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

Exemple : Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre réel m le système suivant :

$$\begin{cases} mx + y = 2m - 1 \\ x + my = 1 \end{cases}$$

Solution

1^{er} cas : $D_p \neq 0$

On a $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$ ou $m \neq 1$

Le système admet donc une solution unique :

$$D_x = \begin{vmatrix} 2m-1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = 2m^2 - m - 1$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m & 2m-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -m + 1$$

Ainsi $x = \frac{D_x}{D_p} = \frac{2m+1}{m+1}$ et $y = \frac{D_y}{D_p} = \frac{-1}{m+1}$ d'où $\boxed{\mathbf{S} = \left(\frac{2m+1}{m+1} ; \frac{-1}{m+1} \right)}$

2^{ème} cas : $D_p = 0$

On a $m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ ou $m = -1$

- Si $m = 1$, le système devient :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \Rightarrow x + y = 1$$

Alors on pose : $y = h$, on a : $x = 1 - h$ et on a : $S = \{(1 - h ; h) ; h \in \mathbb{R}\}$

- Si $m = -1$, le système devient :

$$\begin{cases} -x + y = -3 \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \vee 3 \neq 1$$

Alors les deux équations du système sont incompatibles et $S = \{\emptyset\}$

Exercice d'application

En utilisant les trois méthodes données si déçus, résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes :

a- $\begin{cases} 3x + y = 8 \\ x - y = 4 \end{cases}$ b- $\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 3x + \frac{1}{2}y + 3 = 0 \end{cases}$ c- $\begin{cases} x + y + 5 = 0 \\ 3x + 4y - 7 = 0 \end{cases}$

2- Résolution de systèmes d'équations dans $\mathbb{R}^3$:

a- Définition :

On appelle système de trois équations du premier degré à trois inconnues,

$$\text{tout système de la forme : } \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{cases}$$

où $a, b, c, d, a', b', c', d', a'', b'', c'', d''$ sont tous des réels

b- Résolution :

Pour résoudre de telles systèmes, on utilise la méthode du **PIVOT DE GAUSS** ou encore appelé méthode **triangulaire**.

Cette méthode consiste à trouver une écriture triangulaire du système.

Pour cela on élimine **une** inconnue dans l'équation (2) ; **deux** inconnues dans l'équation (3)

Exercice d'application

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants :

$$\begin{array}{lll} \text{a- } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -4x - 3y + 2z = 4 \\ -3x - y + z = 0 \end{cases} & \text{b- } \begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ x - 9y + 5z = -7 \end{cases} & \text{c- } \begin{cases} x + 2y - z = 8 \\ 2x + y + 2z = -2 \\ x + y + 3z = -6 \end{cases} \end{array}$$

3- Programmation linéaire:

L'étude des problèmes pratiques de résolution des systèmes linéaires des inéquations du premier degré à deux inconnues x et y , nous conduits souvent à étudier si l'ensemble S solution du système d'inéquation à deux inconnues admet un maximum (ou un minimum) de la forme $\alpha x + \beta y$ (avec α et β) des réels données.

Remarque : les inéquations ou les équations d'un système sont appelés des contraintes de Programmation linéaire.

Fonctions polynôme du second degré

ACTIVITES PREPARATOIRES



Activité 1 : (Résolution d'équations)

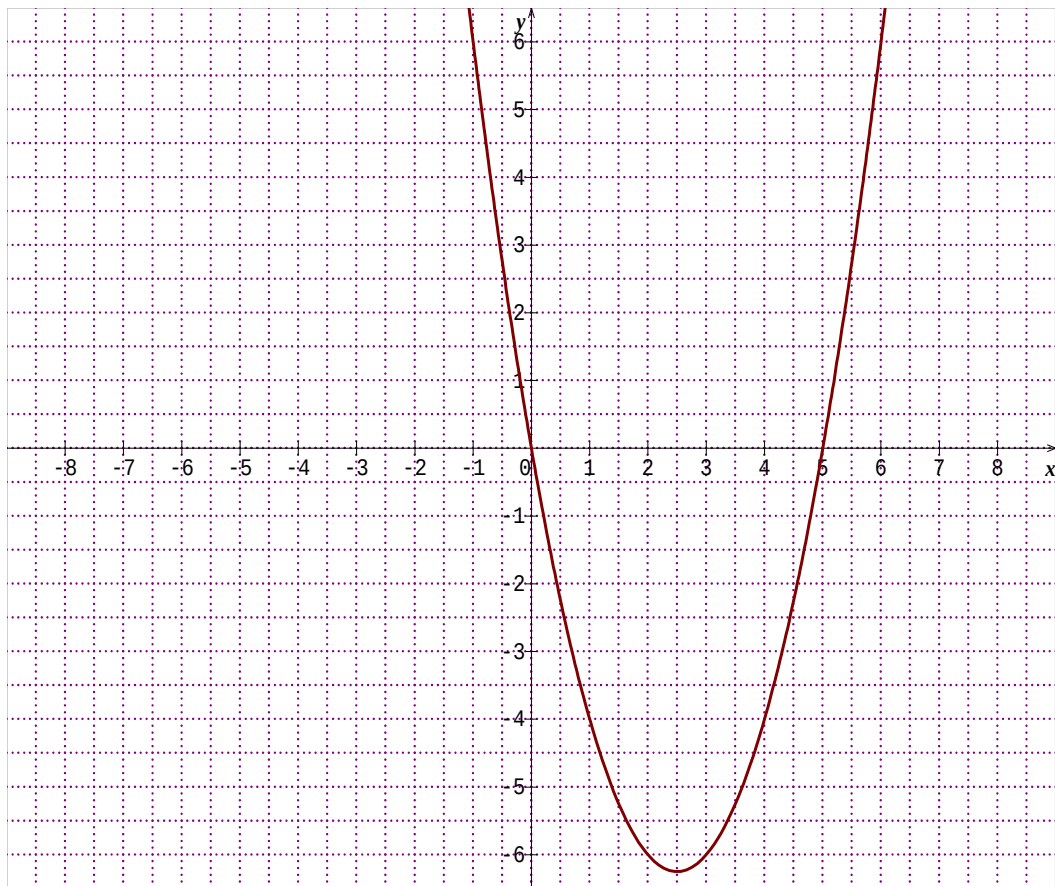
Résous dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes au moyen, si nécessaire, d'une factorisation :

- a) $x^2 - 5x = 0$; b) $-2x^2 + 1 = 0$ c) $(x+3)(1-2x)(3-x) = 0$.
d) $-x^2 - 4 = 0$; e) $(x-2)^2 = 3$ f) $x^4 - 4 = 0$.

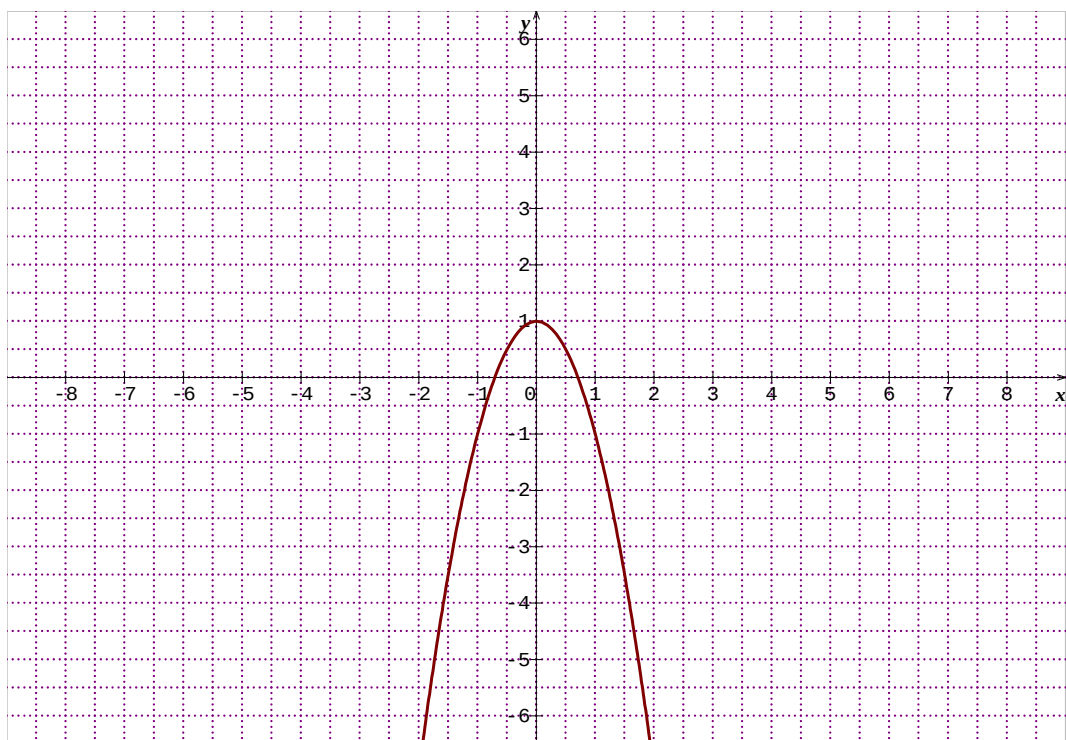
Activité 2 : (Résolution d'inéquations)

Résous dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes au moyen d'une lecture graphique et en utilisant ci possible les solutions des équations précédentes :

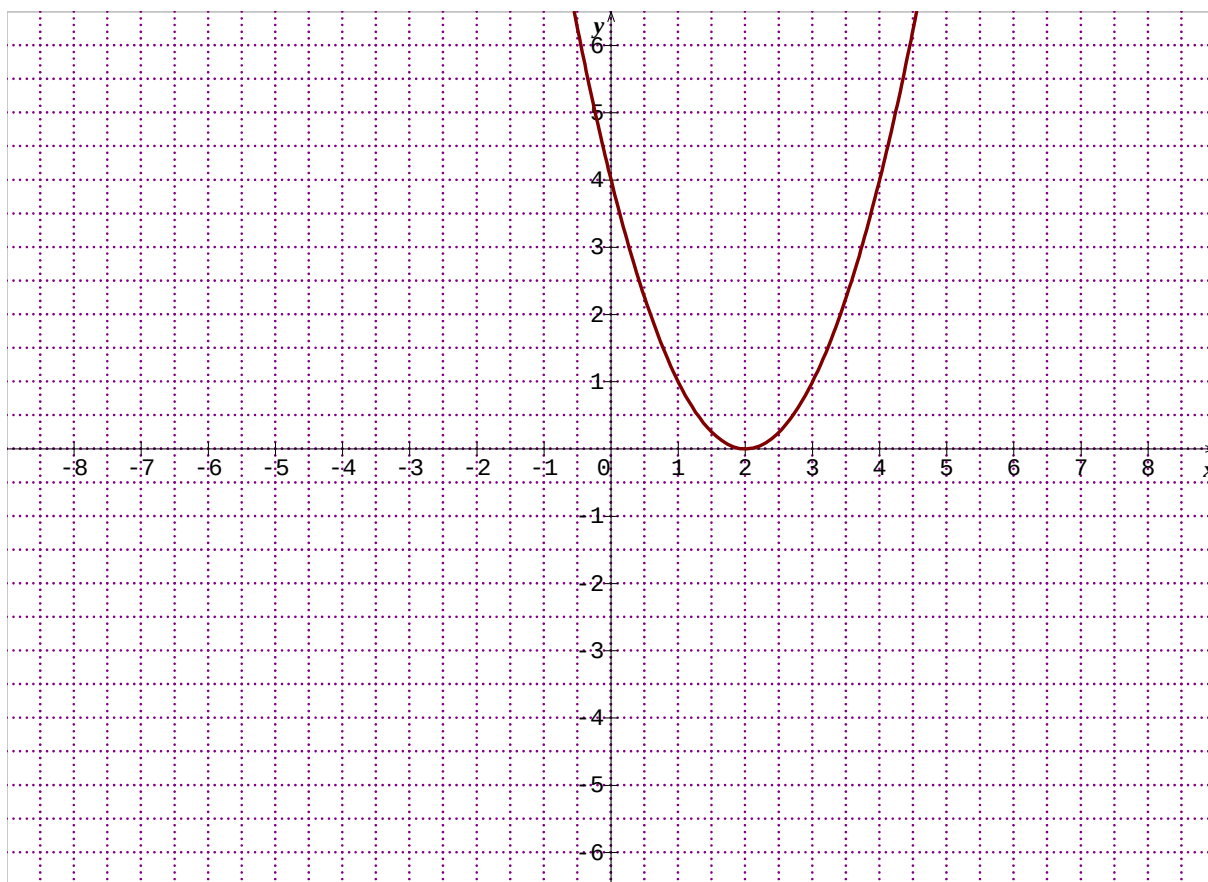
- a) $x^2 - 5x \leq 0$



b) $-2x^2 + 1 < 0$



c) $(x-2)^2 \geq 3$



Activité 3 : (Identités remarquables)

Déterminer les termes manquant dans chaque expression, afin d'obtenir la forme développée de : a) $x^2 - \dots + 4$; b) $x^2 + 6x + \dots$; c) $\dots - x + 9$; e) $x^2 - x + \dots$

Activité 4 : (développement)

Développe et ordonne suivant les puissances décroissantes de x l'expression $P(x) = (x+2)(2x-1)(x+3)$.

Activité 5 : (zéro d'un polynôme)

Soit p un polynôme définie par : $p(x) = x^3 - 4x^2 + 8$.

a- Calcule : $p(-2)$; $p(-1)$; $p(0)$; $p(1)$; $p(2)$; $p(3)$; $p(4)$; $p(5)$.

b- En déduis les valeurs qui annulent le polynôme p .



I- Fonctions polynômes - Généralités :

1- Définition :

On appelle fonction polynôme, toute fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0. \text{ (Avec } a_n \neq 0)$$

- $a_n ; a_{n-1} ; a_2 ; a_1 ; a_0$ Sont des réels appelés coefficients du polynôme $f(x)$.
- n est le degré du polynôme et a_n est le coefficient dominant du polynôme.

NB: Si : $a_n = a_{n-1} = \dots = a_2 = a_1 = a_0 = 0$, on dit que p est le polynôme nul.

2- Egalité de deux polynômes :

Deux polynômes sont égaux si et seulement si :

- Les deux polynômes sont de même degré.
- Les coefficients des termes de même degré sont égaux.

3- Zéro d'un polynôme :

Définition :

Soit α un nombre réel et p un polynôme non nul. On dit que α est un **zéro** ou est une **racine** du polynôme p si et seulement si $p(\alpha) = 0$

4- Factorisation d'un polynôme par $(x - \alpha)$ où α est un zéro de p

a- Théorèmes:

- Si α est un **zéro** du polynôme p , alors $p(x)$ est divisible par $(x - \alpha)$.
- Si α est un **zéro** du polynôme p , alors il existe un polynôme q tel que $p(x) = (x - \alpha) q(x)$ où q est un polynôme de degré inférieur à celui de p .

NB: $q(x)$ est appelé **quotient** dans la division Euclidienne de $p(x)$ par $(x - \alpha)$.

b- Détermination pratique du quotient q (division des polynômes):

Activité :

Soit $p(x)$ un polynôme définie par $p(x) = -x^3 + 3x^2 + 16x + 12$.

a- Calcule $p(-2)$.

b- Factorise $p(x)$ en utilisant :

- La méthode par identification
- La méthode de la division euclidienne
- La méthode d'Hörner

Solution

a- Calculons $p(-2)$

$$P(-2) = -(-2)^3 + 3(-2)^2 + 16(-2) + 12 = 0 \Rightarrow \alpha = -2 \text{ est un zéro de } P$$

b- Factorisons $p(x)$.

Méthode par identification :

Si $\alpha = -2$ est un zéro de p . Alors p est factorisable par : $(x - \alpha)$

$\Rightarrow (x - (-2)) = (x + 2)$ est un facteur de p . Ainsi on peut écrire :

$p(x) = (x + 2)(ax^2 + bx + c)$. (En développant $p(x)$), on a :

$$p(x) = ax^3 + x^2(b + 2a) + x(c + 2b) + 2c \quad \text{Or:} \quad p(x) = -x^3 + 3x^2 + 16x + 12.$$

$$\text{Par identification on a: } p(x) = p(x) \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b + 2a = 3 \\ c + 2b = 16 \\ 2c = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 5 \\ c = 6 \end{cases}$$

D'où $p(x) = (x + 2)(-x^2 + 5x + 6)$.

Méthode de la division euclidienne :

$$\begin{array}{r} -x^3 + 3x^2 + 16x + 12 \quad x + 2 \\ -x^3 + 2x^2 \\ \hline 0 \quad 5x^2 + 16x + 12 \quad -x^2 + 5x + 6 \\ -5x^2 - 10x + 12 \\ \hline 0 \quad 6x + 12 \\ -6x - 12 \\ \hline 0 \end{array}$$

D'où $p(x) = (x + 2)(-x^2 + 5x + 6)$.

Méthode d'Hörner :

	- 1	3	16	12
-2		2	-10	-12
	- 1	5	6	0
↓ α	↓ a	↓ b	↓ c	

Or: $p(x) = (x - \alpha)(ax^2 + bx + c) \Rightarrow p(x) = (x + 2)(-x^2 + 5x + 6)$.

D'où $p(x) = (x + 2)(-x^2 + 5x + 6)$.

Théorème :

Soit f une fonction polynôme. Le réel α est un zéro de f d'ordre de multiplicité n si et seulement si dans la factorisation de f , il existe le **facteur** $(-\alpha)^n$.



1) Identifier les fonctions polynômes puis préciser leur degré dans chacun des cas suivants :

a- $p(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$; **b-** $p(x) = (2x - 1)^4 + \frac{1}{x}$; **c-** $p(x) = (x^2 + 1)(x - 1)$

d- $p(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{-x + 2}$; **e-** $p(x) = x^4 - 4x^2 + (x - 2)^4 + x^3$; **f-** $p(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$

2) On considère le polynôme p définie par $p(x) = x^3 + 5x^2 - 3x - 15$.

Déterminer les réels : a ; b et c tel que $p(x) = (x + 5)(ax^2 + bx + c)$

3) Soit le polynôme p définie par : $p(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 5$.

Calculer : $p(-1)$; $p(0)$; $p(1)$. Puis en déduire le zéro du polynôme p .

II- Fonctions polynômes du second degré:

1- Définition :

On appelle fonction polynôme du second degré, toute fonction p de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :
 $p(x) = ax^2 + bx + c$ (Avec a ; b et c des nombres réels tel que $a \neq 0$)

2- Forme canonique d'un polynôme du second degré:

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) un polynôme du second degré.

On a : $P(x) = ax^2 + bx + c$

$$\begin{aligned} &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left[x^2 + 2x \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right] \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \end{aligned}$$

Posons $\Delta = b^2 - 4ac$. On obtient ainsi: $p(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$

D'où la forme canonique du trinôme $ax^2 + bx + c$ est :

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \quad \text{ou} \quad ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

avec : $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = -a\alpha^2 + c$

3- Forme factorisée d'un polynôme du second degré:

a- Discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$

On appelle **discriminant** d'un trinôme $ax^2 + bx + c$, le nombre réel noté Δ tel que :
 $\Delta = b^2 - 4ac$.

b- Forme factorisée du trinôme $ax^2 + bx + c$

- Si $\Delta > 0$, le trinôme $ax^2 + bx + c$ admet deux racines distinctes x_1 et x_2 telles que :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Ainsi pour $\Delta > 0$, la forme factorisée du trinôme $ax^2 + bx + c$ est : $a(x - x_1)(x - x_2)$

- Si $\Delta = 0$, le trinôme $ax^2 + bx + c$ admet une racine double x_0 telle que : $x_0 = \frac{-b}{2a}$

Ainsi pour $\Delta = 0$, la forme factorisée du trinôme $ax^2 + bx + c$ est : $a(x - x_0)^2$

- Si $\Delta < 0$, le trinôme $ax^2 + bx + c$ n'admet aucune racine.

Ainsi pour $\Delta < 0$, la forme factorisée du trinôme $ax^2 + bx + c$ n'existe pas.

c- Théorème : racines et factorisation du trinôme $ax^2 + bx + c$

$\Delta = b^2 - 4ac.$	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Racines de : $ax^2 + bx + c$	Pas de racine	Une racine double : $x_0 = \frac{-b}{2a}$	$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
factorisation de : $ax^2 + bx + c$	Pas de facteur du premier degré	$a(x - x_0)^2$	$a(x - x_1)(x - x_2)$

4- Identités remarquables utilisées pour factoriser un polynôme

Soient a et b deux nombres réels non nuls ; on a :

$$\text{➤ } (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$\text{➤ } (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

$$\text{➤ } (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

$$\text{➤ } (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

$$\text{➤ } (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

$$\text{➤ } (a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

$$\text{➤ } (a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.$$

$$\text{➤ } (a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3.$$

5- Triangle de PASCAL

Pour le calcul de $(a + b)^n$ ou $(a - b)^n$ avec $(n \in \mathbb{N})$ on peut utiliser le triangle de PASCAL qui est la suivant :

Puissance de n	$(a+b)^n$						
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	

Pour calculer $(a - b)^n$, on utilise les mêmes coefficients obtenus à partir du triangle de Pascal, mais chaque fois que b apparait avec une puissance impaire on met le signe $\ll \gg -$

NB : En posant : $a + b = S$ (Somme) et $ab = P$ (Produit), on a :

$$a^2 + b^2 = S^2 - 2P \quad \text{et} \quad a^3 + b^3 = S^3 - 3PS$$

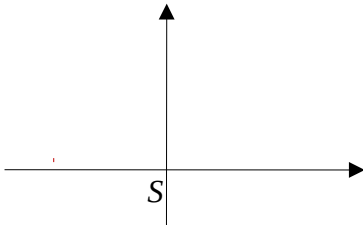
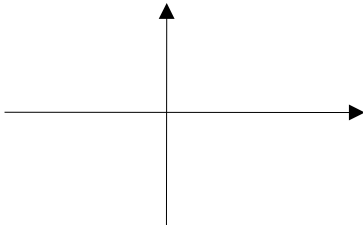
6- Représentation graphique et variation d'un trinôme du second degré

On rappelle que la forme canonique du trinôme $ax^2 + bx + c$ est :

$$p(x) = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right].$$

La forme canonique du trinôme $ax^2 + bx + c$ est utile pour tracer sa courbe représentative.

La courbe (C), représentant la fonction $P : x \rightarrow ax^2 + bx + c$ dans le repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, est une parabole, translate de la parabole $y = ax^2$.

Valeurs de α	Tableau de variation	Courbe representative								
Pour $a > 0$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>α</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$p(x)$</td><td></td><td>$p(\alpha)$</td><td></td></tr></table>	x	$-\infty$	α	$+\infty$	$p(x)$		$p(\alpha)$		
x	$-\infty$	α	$+\infty$							
$p(x)$		$p(\alpha)$								
Pour $a < 0$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>α</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$p(x)$</td><td></td><td>$p(\alpha)$</td><td></td></tr></table>	x	$-\infty$	α	$+\infty$	$p(x)$		$p(\alpha)$		
x	$-\infty$	α	$+\infty$							
$p(x)$		$p(\alpha)$								

Son sommet S a pour abscisse $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et pour ordonnée $P(\alpha)$.

Suivant le signe de **a**, on obtient le tableau de variation de la fonction p :

S

7- Tableau récapitulatif et signe d'un trinôme du second degré

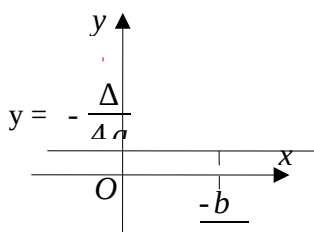
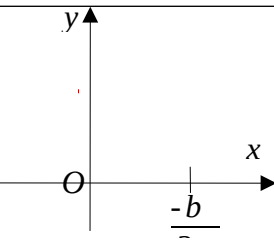
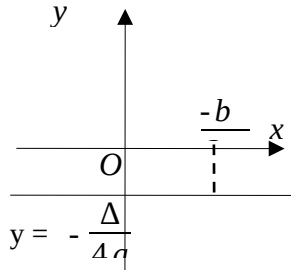
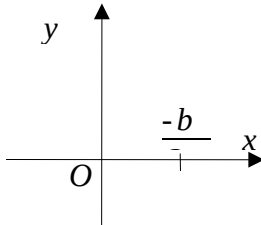
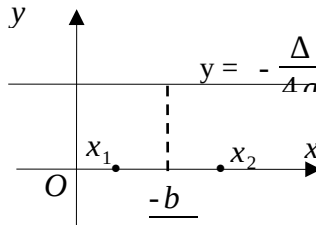
$\Delta = b^2 - 4ac.$	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$														
Racines de : $ax^2 + bx + c$	Pas de racine	Une racine double $x_0 = \frac{-b}{2a}$	$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$														
$a > 0$ Position de (C) par rapport à l'axe des abscisses																	
Tableau de signe de $ax^2 + bx + c$	<table><tr><td>x</td><td></td></tr><tr><td>p(x)</td><td>+</td></tr></table>	x		p(x)	+	<table><tr><td>x</td><td>x_0</td></tr><tr><td>p(x)</td><td>+ 0 +</td></tr></table>	x	x_0	p(x)	+ 0 +	<table><tr><td>x</td><td>x_1</td><td>x_2</td></tr><tr><td>p(x)</td><td>+ 0 -</td><td>0 +</td></tr></table>	x	x_1	x_2	p(x)	+ 0 -	0 +
x																	
p(x)	+																
x	x_0																
p(x)	+ 0 +																
x	x_1	x_2															
p(x)	+ 0 -	0 +															
$a < 0$ Position de (C) par rapport à l'axe des abscisses																	
	<table><tr><td>p(x)</td><td>-</td></tr></table>	p(x)	-	<table><tr><td>p(x)</td><td>- 0 -</td></tr></table>	p(x)	- 0 -	<table><tr><td>p(x)</td><td>- 0 -</td></tr></table>	p(x)	- 0 -								
p(x)	-																
p(x)	- 0 -																
p(x)	- 0 -																
	<table><tr><td>x</td><td></td></tr></table>	x		<table><tr><td>x</td><td>x_0</td></tr></table>	x	x_0	<table><tr><td>x</td><td>x_1</td><td>x_2</td></tr></table>	x	x_1	x_2							
x																	
x	x_0																
x	x_1	x_2															

Tableau de signe de $\mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c}$			
---	--	--	--

Le signe du trinôme, $P(x) = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$), se déduit de la position de sa courbe représentative (C) par rapport à l'axe des abscisses.

NB: Le trinôme: $\mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c}$, ($\mathbf{a} \neq 0$) est du signe de $\mathbf{a}$, pour toutes les valeurs de la variable réelle x , sauf celles situées entre les racines s'il y en a

EVALUATION S

Dans chacun des cas suivants où p est un polynôme de degré 2, déterminer :

- a- la forme canonique de $p(x)$.
- b- Les racines éventuelles de $p(x)$ puis étudier le signe de $p(x)$.

- 1) $P(x) = x^2 + x - 1$.
- 2) $P(x) = -x^2 + x - 1$.
- 3) $P(x) = x^2 - 7x + 6$.
- 4) $P(x) = -5x^2 + x + 1$.
- 5) $P(x) = x^2 + 2x + 2$.
- 6) $P(x) = 4x^2 + 2x - 2$.
- 7) $P(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x - 1$.
- 8) $P(x) = x^2 + x + 1$.

EXERCICES

Fonctions polynômes (Généralités).

1 Dans chacun des cas suivants où p est un polynôme de degré 2, déterminer :

- c- la forme canonique de $p(x)$.
- d- Les racines éventuelles de $p(x)$ puis étudier le signe de $p(x)$.

9) $P(x) = x^2 + x - 1.$

10) $P(x) = -x^2 + x - 1.$

11) $P(x) = x^2 - 7x + 6.$

12) $P(x) = -5x^2 + x + 1.$

13) $P(x) = x^2 + 2x + 2.$

14) $P(x) = 4x^2 + 2x - 2.$

15) $P(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x - 1.$

16) $P(x) = x^2 + x + 1.$

2 Dans chacun des cas suivants où p est un polynôme de degré 2, déterminer :
les réels a ; b ; c ; d etc....

1) $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

2) $q(x) = 2x^3 - 12x - 9$

3) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2$

4) $g(x) = 2x^3 - 12x - 9$

5) $i(x) = x^2 + x - 1.$

6) $k(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1.$

7) $l(x) = x^2 - 7x + 9.$

$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f(x) = (2ax + 1)(-bx - 1)(x + c)$

$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$i(x) = (2x + a)(x - b)$

$k(x) = ax^2 + bx + c$

$l(x) = \left(-\frac{3a}{4}x - b\right)^2$

3 Parmi les fonctions numériques suivantes dire celles qui sont rationnelles puis en déduire leur ensemble de définition :

1) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$; 2) $g(x) = \frac{1}{x} + x^2 - 7x + 9$; 3) $h(x) = (-x + 8)^3$

4) $p(x) = \frac{-x^2 + 3x - 2}{x + 5}$; 5) $q(x) = \left(\frac{7x + 1}{-x - 1}\right)^3$; 6) $k(x) = \sqrt{\frac{x + 2}{-x + 3}}$;

$$7) i(x) = \frac{x+2}{(2x+1)(x^2-1)}$$

4 Dans chacun des cas suivants :

a- Déterminer l'ensemble de définition D_f .

b- Simplifier $f(x)$ sur D_f .

c- Etudier, suivant les valeurs de x , le signe de $f(x)$.

$$1) f(x) = \frac{5x^2 - 3x - 2}{(-x+1)(x+2)} ; 2) f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{-x^2 + 4x - 3} ; 3) f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 - x + 2}{3x^2 - 6x + 3}$$

5 1) Trouver deux fonctions polynômes f et g du premier degré telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $x^2 f(x) + (x-1)^2 g(x) = 1$

2) Soit la fonction polynôme $P : x \rightarrow 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$
Trouver deux nombres a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $p(x) = (x^2 + ax + b)^2 - x^4$.
En déduire une factorisation de P .

6 Développer $(x^2 + bx + c)^2$.

1) Montrer que $(x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9)$ est le carré d'un polynôme que l'on déterminera.

7 Déterminer les réels m , n et p pour que : $x^5 - 2x^4 - 6x^3 + mx^2 + nx + p$ soit factorisable par $(x-3)(x^2-1)$. Donner alors une factorisation.

8 Trouver le nombre réel k tel que la fonction polynôme suivante :

$P : x \rightarrow 4x^4 - 20x^3 + 53x^2 - 10kx + 7k$ soit le carré d'une fonction polynôme de degré 2.

9 Soit p le polynôme défini par $p(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

On suppose que $p(x)$ admet trois racines distinctes x_1 , x_2 et x_3 .

1) Calculer : $x_1 + x_2 + x_3$; $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3$ et $x_1 x_2 x_3$ sans calculer les racines.

2) En déduire alors la valeur de $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$

3) Résoudre $p(x) = 0$. Vérifier les résultats obtenus au 1).

10 Soit $p(x) = 8x^3 - 48x^2 + 94x - 60$.

1) Déterminer les trois réels a , b et c tel que :

$$p(x) = a(2x-5)^3 + b(2x-5)^2 + c(2x-5).$$

2) En déduire une factorisation de $p(x)$.

11 Dans chacun des cas suivants, déterminer le polynôme $p(x)$ de degré 3 tel que :

- 1) $P(x)$ admet -1 , 1 et 2 pour racines et $p(0) = 4$.
- 2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p(x+1) - p(x) = x(x+1)$ et $p(1) = 0$.

12 Soit l'équation : $x^3 + 9x^2 + 51x + 155 = 0$.

Déterminer le réel h tel que, en posant $X + h = x$, l'équation proposée s'écrive alors : $X^3 + pX + q = 0$

Où p et q sont des coefficients que l'on déterminera.

13 Soit les fonctions polynômes p et q définies par :

$$P(x) = 2x^5 - 19x^4 + 69x^3 - 118x^2 + 92x - 24 \quad \text{et}$$

$$q(x) = x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 36x - 36$$

- 1) a- Montrer que 2 est un zéro triple de p , puis en déduire les autres zéros de p .
b- Résoudre l'inéquation : $x \in [-5 ; 5]$; $P(x) \leq 0$.
- 2) Calculer $q(2)$ et $q(3)$ puis en déduire les zéros de q .
- 3) Soit la fraction rationnelle $h : x \rightarrow \frac{p(x)}{q(x)}$
 - a- Déterminer l'ensemble de définition D_h de h puis simplifier $h(x)$.
 - b- Déterminer le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x .

14 Soit les fonctions polynômes f et g définies par :

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 6 \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - x - 2$$

- 1) Déterminer les zéros de f .
- 2) Soit la fraction rationnelle $h : x \rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$
 - c- Déterminer l'ensemble de définition D_h de h puis simplifier $h(x)$.
 - d- Montrer qu'il existe trois réels a ; b et c tels que : $\forall x \in D_h$ on a :
$$h(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$$
 - e- Déterminer le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x .

15 Soit la fonction polynôme h définie par : $h(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + 2x + 2$.

- 1) Déterminer les réels a , b et c tels que : $h(x) = (x^2 - 2)(ax^2 + bx + c)$.
- 3) Soit la fraction rationnelle $f(x) = \frac{1}{h(x)} + \frac{3x}{x^4 - 4}$
 - a- Déterminer l'ensemble de définition de f .
 - b- Ecrire f sous forme $\frac{N(x)}{D(x)}$ où N et D sont deux polynômes.
 - c- Résoudre l'équation $f(x) = 0$

16

Soit la fonction rationnelle f définie par : $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 2}$.

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f .
- 2) Déterminer les réels a , b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 2}$
- 3) Résoudre dans $\mathbb{R}$:
 - a- l'équation $f(x) = x$
 - b- l'inéquation $f(x) \leq x$

Fonctions polynômes du second degré

Proportionnalités

Rapports

1) Définition

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$. On appelle rapport de a sur b ou quotient de a par b , le réel noté par q tel que : $q = \frac{a}{b}$.

NB : Si $\frac{a}{b} = q$ alors les nombres a et b sont appelés les termes du rapport. La valeur du rapport a sur b est appelé le quotient exact de $\frac{a}{b}$.

Exemple : $\frac{4}{2} = 2$; $\frac{9}{3} = 3$; $\frac{1}{2} = 0,5$; $\frac{1}{4} = 0,25$

2) Opérations sur les rapports

$$\frac{a}{-1} = -a \quad ; \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \quad (b \neq 0)$$

$$\frac{a}{b} = 0 \Rightarrow a = 0 \quad ; \quad (b \neq 0) \quad ; \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd} \quad ; \quad (bd \neq 0)$$

$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} ; (c \neq 0) ; \quad \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} ; (bd \neq 0)$$

$$c \times \frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b} ; (b \neq 0) ; \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c} ; (bc \neq 0)$$

$$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a} \quad (a \neq 0) ; \quad \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{1}{ab} ; (ab \neq 0)$$

3) Rapport de deux grandeurs

a- Rapport de deux grandeurs de même nature

Définition : Le rapport de deux grandeurs de même nature est égal au rapport des nombres qui exprime leur mesure avec une unité commune. La valeur du rapport est appelé **le quotient**. Le quotient est un nombre abstrait et indépendant de l'unité choisie dans la mesure de deux grandeurs.

Exemple : $\frac{110 \text{ kg}}{50 \text{ kg}} = 2,2$ est un rapport de deux grandeurs de même nature.

L'unité commune choisie pour la mesure de grandeur est le kilogramme (*kg*). Le quotient 2,2 est indépendant du rapport des deux grandeurs car quelque soit l'unité de mesure choisie, ce quotient reste inchangé.

b- Rapport de deux grandeurs de natures différentes

Définition : Le rapport de deux grandeurs de nature différentes est égal au rapport des nombres qui exprime leur mesure dépendant des unités choisies dans la mesure de chacune des deux cas.

Exemple 1 : $\frac{500 \text{ km}}{5 \text{ h}} = 100 \text{ km /h.}$

Exemple 2 : $\frac{20 \text{ cahiers}}{5 \text{ élèves}} = 4 \text{ cahiers /élèves.}$

c- Rapports égaux

Définition : On appelle rapports égaux, tous rapports dont les quotients sont égaux.

Exemple : $\frac{9}{3} = \frac{18}{6} = \frac{27}{9} = \frac{36}{12} = \frac{45}{15} = 3$

EXERCICES

- 1** Calculer les nombres suivants en mettant les résultats sous la forme d'une fraction irréductible :

$$A = \frac{1}{2} - \frac{3}{5} ; B = \frac{1}{-3} \cdot \frac{3}{10} ; C = -3 + \frac{3}{10} ; D = \frac{-1}{\frac{3}{4}} ; E = \frac{4}{\frac{5}{2} + \frac{1}{3}} ;$$

$$F = \frac{\frac{-2}{3} - 4}{\frac{5}{3} + \frac{4}{3}} ; G = -3 + \frac{\frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{5}}{\frac{7}{2} - \frac{3}{5}}}{\frac{1}{-3} + \frac{3}{10}} ; H = \frac{\frac{\frac{1}{4} - 3}{\frac{5}{2} + \frac{1}{3}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{5}}{5 - \frac{1}{2}}}{}$$

- 2** Déterminer les termes du rapport $\frac{a}{b}$ tel que le rapport $\frac{a}{b} = 6 ; 8 ; 9$.

- 3** Ecrire le rapport de 17,5 à 0,25 et $\frac{2}{3}$ à $\frac{5}{6}$

- 4** Calculer le quotient de 68,8 par 8 et de $\frac{4}{5}$ par $\frac{5}{4}$

- 5** Deux capitaux ont pour somme 18 000 et pour rapport $\frac{18}{27}$.

Quels sont ces deux capitaux C_1 et C_2 ?

6 Deux capitaux diffèrent de 25 000 F et ont pour rapport $\frac{9}{4}$. Quels sont ces deux grandeurs ?

7 Trouver deux nombres connaissant leur rapport $\frac{2}{9}$ et leur somme 22 440 F.

8 Soit la suite de rapports suivants : $\frac{9}{3}$; $\frac{18}{6}$; $\frac{27}{9}$; $\frac{36}{12}$; $\frac{45}{15}$.
Montrer que ces rapports sont égaux.

9 Ecrire le rapport de la distance de Bamako à Kati (21 km), à la distance de Bamako à Ségou (472 km).

10 Ecrire le rapport de la contenance d'un bidon de vin (30 cl) à une bouteille de vin (0,75 l) ; d'un bidon de 114 l à un tonneau de 228 l.

11 Ecrire le rapport du poids d'argent fin contenu dans une pièce de 100 F CFA antérieur à 1890, au poids de cuivre quelle contenait (poids total : 25 g, poids du cuivre : 2,5 g).

12 Ecrire le rapport du poids du franc Guinéen au demi-kilogramme.

Proportions

Activité :

Trois élèves : Ali, Fatim et Sali se partagent un héritage de 3.0000.000 FCFA proportionnellement à leurs âges. Ils ont respectivement 22 ; 20 et 18 ans.
Détermine la part de chacun d'eux.

Solution

Le partage de l'héritage étant proportionnel aux âges des trois élèves, alors pour déterminer la part de chacun d'eux j'adopte les étapes suivantes :

- **Etape 1** : j'établis un tableau de proportionnalité comme l'indique le tableau ci-dessous :

	Ali	Fatim	Sali	
Age des élèves	22	20	18	
Parts d'héritages en FCFA				
				3 000 000

× k

←

- **Etape 2 :** Je calcule le coefficient de proportionnalité k qui est égale au rapport de l'héritage sur la somme des âges :

Somme des âges : $22 + 20 + 18 = 60$, Ainsi $k = \frac{3\,000\,000}{60} = 50\,000$

- **Etape 3 :** Je calcule la part d'héritage de chacun d'eux :

- Pour Ali on a : $22 \times 50\,000 = 1\,100\,000$
- Pour Ali on a : $20 \times 50\,000 = 1\,000\,000$
- Pour Ali on a : $18 \times 50\,000 = 900\,000$

- **Etape 4 :** Je complète la deuxième ligne du tableau

	Ali	Fatim	Sali	
Age des élèves Parts d'héritages	22	20	18	60
	1 100 000	1 000 000	900 000	3 000 000

$\times 50\,000$

←

1) Définition :

Soient deux suites de nombres réels non nuls : $(a ; b ; c ; \dots)$ et $(a' ; b' ; c' ; \dots)$.

On dit que $(a ; b ; c ; \dots)$ et $(a' ; b' ; c' ; \dots)$ forment une proportion lorsque les rapports : $\frac{a}{a'} ; \frac{b}{b'} ; \frac{c}{c'} ; \dots$ sont égaux.

On note : $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \dots$

En particulier : $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ est une proportion.

Exemple : $\frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16}$. On dit alors que : 2 ; 8 ; 3 ; 12 sont proportionnels.

2) Notation :

Si quatre nombres (a ; b ; c ; d) forment une proportion tel que : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors :

- a et d sont appelés **les extrêmes**.
- b et c sont appelés **les moyens**.

3) Propriétés :

Soient a ; b ; c ; d quatre nombres non nuls. On a les propriétés suivantes :

$$P_1 : \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \times d = b \times c \text{ (Produit des moyens est égal au produit des extrêmes).}$$

$$P_2 : \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ (Echange des moyens).}$$

$$P_4 : \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a + c}{b + d}.$$

$$P_3 : \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \text{ (Echange des extrêmes).}$$

$$P_5 : \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{kc}{kd}.$$

NB :

Lorsque l'un des nombres est inconnu, alors il est appelé quatrième proportionnelle aux trois autres. Si l'on désigne par x cet inconnu, alors on a :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{x} = \frac{c}{d} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} = \frac{x}{d} \quad \text{ou} \quad \frac{x}{b} = \frac{c}{d}$$

I- Proportions particulières

1) Vitesse moyenne

Activité :

Un motocycliste part de Bamako pour se rendre à Ségou.

Trajet	Distance parcourue	Durée
Bamako – Baguinéda	30 km	3 h
Baguinéda – Konobougou	80 km	2 h
Konobougou – Fana	40 km	1 h
Fana – Ségou	160 km	4 h

a- Complète le tableau de correspondance suivant :

Durée (en h)	3			
Distance (en km)	120	80		

- b- Justifie que c'est un tableau de proportionnalité. Calcule le coefficient de proportionnalité qui permet de passer de la première ligne à la deuxième. Ce coefficient est la vitesse moyenne du motocycliste. Elle est ici exprimée en **kilomètre par heure (km / h)**.

Définition :

La vitesse moyenne est le quotient de la distance par la durée.

Tableau de proportionnalité

Durée	
distance	

× vitesse moyenne

NB : l'unité de la vitesse moyenne dépend des unités de la distance et de la durée.

Exercices

- 1- Un coureur à pied parcourt 42 km en 3 heures 30 min. Quelle est sa vitesse moyenne exprimée en km/h ? en m/s ?
- 2- Un automobiliste roule à 80 km/h pendant 2h 15 min. Quelle distance a-t-il parcourue ?
- 3- Un avion effectue un vol de 1 200 km à une vitesse moyenne de 800 km/h. quelle est la durée de ce vol ?

2) Débit moyen

Activité :

Pendant la saison des pluies, on a mesuré la quantité d'eau s'écoulant du fleuve Bafing pendant 10 secondes. On a trouvé 2 310 000 litres.

Quel est le volume d'eau qui s'écoule en une seconde ?

C'est le débit moyen du fleuve Bafing pendant cette période. Il est ici exprimé en **litre par seconde (L/ s)**.

Définition :

Le débit moyen est le quotient du volume écoulé par la durée.

Tableau de proportionnalité

Durée	
Volume de liquide écoulé	

× Débit moyenne

NB : l'unité du débit moyen dépend des unités du volume et de la durée.

Exercices

- 1- Un robinet remplit un seau de 15 litres en 30 secondes. Quelle est le débit moyen de ce robinet exprimé en L/s ?
- 2- Le fleuve Djoliba à un débit moyen de $20 \text{ m}^3/\text{s}$ à son embouchure. Quelle quantité d'eau déverse-t-il dans le lac Woyowayanko en 24 h ?
- 3- Un réservoir contient 20 000 litres d'eau. Combien de temps doit fonctionner une pompe qui débite $4 \text{ m}^3/\text{h}$ pour vider ce réservoir ?

3) Masse volumique

Activité:

- a- Complète le tableau de proportionnalité suivant :

Volume (en dm^3)	2	2,5	
Masse d'huile (en kg)	1,8		13,5

- b- Calcule le coefficient de proportionnalité qui permet de passer de la première ligne à la deuxième ligne. Ce coefficient est la masse volumique de l'huile. Elle est ici exprimée en **kilogrammes par décimètre cube (kg/dm^3)**.

Définition :

La masse volumique d'un corps est le quotient de la masse d'une certaine quantité de ce corps par le volume occupé par cette quantité.

Tableau de proportionnalité

Volume	
masse	

× Masse volumique

←

NB : l'unité de la masse volumique dépend des unités de la masse et du volume.

Exemples de masses volumiques:

Corps	Air	Essence	Laiton	Mercure
Masse volumique	$1,3 \text{ g}/\text{dm}^3$	$740 \text{ g}/\text{dm}^3$	$8,4 \text{ g}/\text{cm}^3$	$1,3 \text{ g}/\text{cm}^3$

Exercices

- 1- Un robinet en fer de 23,7 kg a un volume de 3 dm^3 . Quelle est la masse volumique de ce objet ?

- 2- Une planche de masse volumique $0,85 \text{ g/cm}^3$ a un volume de $4,25 \text{ dm}^3$. Quelle est sa masse en kg ?
- 3- On dispose de 3 kg de mercure dont la masse volumique est de $13,6 \text{ kg/dm}^3$. Pourra-t-on le déverser dans un flacon de 200 mL ? Pourquoi ?

4) Echelle

Activité :

La chambre de DEMBELE a la forme d'un pavé droit. Son frère Balla, qui est architecte, l'a représentée sur un plan. Les dimensions réelles et les dimensions correspondantes sur le plan sont regroupées dans le tableau suivant :

	Longueur	Largeur	Hauteur
Dimension réelle en m	3,96	2,43	2,16
Dimension sur le plan en cm	13,2	8,1	7,2

- a- Refais un tableau où les dimensions sur le plan ont la même unité et justifie que ce nouveau tableau est un tableau de proportionnalité.
- b- Quel est le coefficient de proportionnalité qui permet de passer des dimensions réelles aux dimensions sur le plan ? Ecris ce nombre sous forme d'une fraction de numérateur 1.

Définition :

L'échelle d'une carte est le quotient d'une distance sur cette carte par la distance réelle correspondante.

Tableau de proportionnalité

Distance réelle	
Distance sur la carte	

× Echelle

←

NB : Une échelle est généralement exprimée par une fraction.

- A-t-elle raison, elle a dit que son dessin est à l'échelle de $1/50$? Justifie ta réponse.
- 2- La piste d'atterrissage de Bamako - Sénou mesure 1 850 m. Quelle est sa longueur en cm sur une carte à l'échelle $1/50\ 000$?
 - 3- Sur une carte du Mali à l'échelle $1/250\ 000$, DEMBELE a mesuré la distance entre Bamako et Koutiala ; il a trouvé 12 cm. Quelle est, en km, la distance réelle entre ces deux villes ?

II- Grandeurs proportionnelles

1) Grandeurs directement proportionnelles

Définition :

Soient deux grandeurs X et Y tel, que :

$$X = x_1 ; x_2 ; x_3 ; \dots x_i \quad \text{et} \quad Y = y_1 ; y_2 ; y_3 ; \dots y_i$$

Deux grandeurs X et Y sont dites directement proportionnelles si elles possèdent le caractère de liaison des valeurs de l'une aux valeurs correspondantes de l'autre par

Exemple :

Trois objets x ; y et z ont pour mesure 78 cm. Elles sont directement proportionnelles aux nombres : 5 ; 8 et 13.

Calculer la longueur des objets x ; y et z .

Solution

$$x + y + z = 78 \text{ cm} \quad \text{et} \quad \frac{x}{5} = \frac{y}{8} = \frac{z}{13} = \frac{x + y + z}{5 + 8 + 13} = \frac{78 \text{ cm}}{26} = 3 \text{ cm}$$

$$\frac{x}{5} = 3 \quad \text{alors} \quad x = 3 \times 5 = 15$$

$$\frac{y}{8} = 3 \quad \text{alors} \quad y = 3 \times 8 = 24$$

$$\frac{z}{13} = 3 \quad \text{alors} \quad z = 3 \times 13 = 39$$

2) Grandeurs inversement proportionnelles

Définition :

Deux grandeurs X et Y sont inversement proportionnelles si elles possèdent le caractère de liaison des valeurs de l'une aux valeurs correspondantes de l'autre par une même fraction. Elle est donnée par la formule :

$$Y = \frac{a}{X} \quad (\text{avec } a \in \mathbb{R} \text{ et } X \neq 0)$$

NB : Si : deux suites $(a ; b ; c)$ et $(d ; e ; f)$ sont inversement proportionnelles alors les suites $(a ; b ; c)$ et $\left(\frac{1}{d} ; \frac{1}{e} ; \frac{1}{f}\right)$ sont

directement proportionnelles c'est-à-dire : $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = k$ (avec

$\neq 0 ; e \neq 0 ; f \neq 0$).

On peut multiplier ou diviser tous les membres d'une proportion par une même

Exemple :

Trouver trois nombres : x ; y et z sachant qu'ils sont inversement proportionnels à :

$\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{5}$. D'autre part, on a : $5a + b - 2c = 376$

Solution

$$\frac{\frac{a}{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{a}{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{a}{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} \Leftrightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5a}{10} = \frac{b}{3} = \frac{-2c}{4} = \frac{5a + b - 2c}{10 + 3 - 4} = \frac{752}{9}$$

$$\frac{5a}{10} = \frac{752}{9} \text{ alors } 45a = 3760 \text{ et } a = \frac{3760}{45} = \frac{752}{9}$$

$$\frac{b}{3} = \frac{752}{9} \text{ alors } b = \frac{188}{3}$$

$$\frac{-2c}{4} = \frac{752}{9} \text{ alors } c = -\frac{470}{9}$$

EXERCICES

Coefficient de proportionnalité et quatrième proportionnelle.

- 1** Dans chaque question et pour chacune des colonnes des tableaux, déterminer la valeur exacte du coefficient de proportionnalité permettant de passer de la première ligne à la deuxième ligne :

a-	5,2	4,2	2,2	3
	33,8	26	14,3	19,5
	Coefficients			

b-	5,2	4,2	2,2	3
	33,8	26	14,3	19,5
	Coefficients			

2 Déterminer dans les tableaux ci-dessous la quatrième proportionnelle x :

a-

3	5
x	1,4

b-

21	x
3	5

c-

7	2
5	x

d-

x	
$\frac{5}{2}$	
5	

e-

4	x
1,2	0,6

f-

5	14
21	x

g-

x	0,3
6,4	0,3

h-

$\frac{15}{14}$	$\frac{5}{7}$
x	$\frac{3}{2}$

3 Répondre si possible aux questions suivantes :

- a- Pour confectionner un cocktail, Ali a besoin de 1,5 l de jus d'orange pour 6 personnes. Combien de litres de jus d'orange doit-il confectionner s'il souhaite préparer ce même cocktail pour 10 personnes ?
- b- En révisant pendant 3 heures son cours de mathématique, Idrissa a progressé de 5 points. De combien de points augmentera t-il sa note, s'il révise le prochain cours pendant 5 heures ?

4 Un professeur de mathématique a remarqué qu'il lui fallait 22 min pour corriger 4 copies d'élèves. Combien de temps, en gardant cette allure lui faudra t-il pour corriger une classe de 26 élèves ?

Grandeurs directement proportionnelles

5 On dresse la liste suivante des grandeurs A directement proportionnelles des grandeurs B.

Indiquer la signification du rapport : $\frac{\text{mesure de A}}{\text{mesure de B}}$ et du rapport $\frac{\text{mesure de B}}{\text{mesure de A}}$.

Grandeur A	Grandeur B	$\frac{\text{mesure de A}}{\text{mesure de B}}$	$\frac{\text{mesure de B}}{\text{mesure de A}}$
------------	------------	---	---

Prix d'une marchandise en franc.	Poids de cette marchandise en kg.	Ex : Prix en F de 1 kg.	Poids qui coûte 1 F.
Longueur d'une circonférence.	Rayon.		
Commission d'un vendeur.	1/100 du prix de vente.		
Prix de vente	Prix de revient.		

- 6** On achète 21 l d'huile à 35 000 F ? Combien couterons 17 l ?
- 7** Sur une vente de 25 700 F, un placier a reçu une commission de 771 F. Quelle commission recevra-t-il sur une vente de 98 350 F ?
- 8** Les frais de transport de 250 t de pommes de terre se sont élevés à 6 275 F. A combien s'élèveraient dans les mêmes conditions les frais de transport de 145 t ?
24 m de tissus coûtent 1 328,4 F. Combien coûtent 6,5 m du même tissu ?
- 9** Sur un objet ayant coûté 1 250 F, un commerçant fait un bénéfice de 387,5. Quel bénéfice réaliserait-il dans les mêmes conditions sur un objet acheté à 1 800 F ?
- 10** Pour fabriquer 12 chaises, on a utilisé 374,4 F de matière première. Combien dépensera-t-on pour se procurer les matières premières nécessaires pour 33 chaises identiques aux précédentes ?
- 11** Le salaire total de 3 ouvriers travaillant ensemble s'élève à 650 F pour 5 jours de travail. Le premier gagne 44 F par jour, le deuxième 300 F par semaine de 6 jours de travail. Quel est le gain du troisième pour 28 jours de travail ? ($\times 3$)
- 1** Des marchandises importées reviennent sans les droits de douane à 7 500 F pour 6 t, on sait d'autre part que sur 2 700 kg les droits de douane s'élèvent à 9 180 F. Quel est le prix total payé pour 36 900 kg de ces marchandises ?

Grandeurs inversement proportionnelles

- 1** Un patron veut répartir à part égale une certaine somme, à titre de gratification, entre des employés : s'il en fait bénéficier 7 employés, chacun recevra 1 242 F. Quel serait la part de chacun s'il y avait 9 bénéficiaires ?
- 1** Avec un pot de peinture, on peut peindre un panneau rectangulaire de 2,4 m de long et 0,72 m de large. Quelle serait la longueur du panneau qu'on pourrait recouvrir avec le même pot, si la largeur était de 1,08 m ?

- 15** 15 ouvriers peuvent faire un travail en 8 heures. Combien faut-il à 12 ouvriers pour exécuter le même travail ?
- 16** Avec une certaine quantité de graine, on peut ensemençer un champ rectangulaire de 30 m de large sur 100 m de long. Quelle est la longueur d'un champ rectangulaire de 25 m de large qu'on pourrait ensemençer avec la même quantité de graine ?
- 1** Un entrepreneur peut avec une certaine somme, payer 35 ouvriers, ayant travaillé 1à heures par jour, pendant 12 jours. Combien, avec le tiers de cette somme, pourrait-il payer d'ouvriers ayant travaillé 7 heures par jour, pendant 5 jours ?
- 1** Une personne calcule que, si elle vit à l'hôtel elle dépensera en 6 jours autant que chez elle en 16 jours. Elle est obligée de vivre régulièrement 1 jour à l'hôtel pour 3 jours chez elle. En combien de temps dépensera-t-elle ainsi autant qu'en 272 jours chez elle ?
- 1** 12 radiateurs électriques de 3 kw fonctionnant 8 h par jour pendant 15 jours ont dépensé 864 F. Pendant combien de jours ont fonctionné, à raison de 10 heures par jour, 15 radiateurs de 2 kw qui ont dépensé 1 080 F ?
- 2** Un industriel possède un stock de charbon qui lui permet de d'alimenter 10 chaudières identiques pendant 20 jours. Après 8 jours de fonctionnement, il est avisé qu'il ne sera réapprovisionné que 24 jours après. Combien de chaudières doit-il arrêter s'il veut faire fonctionner les autres, régulièrement pendant ces 24 heures ?
- 2** Un fabricant estime qu'en faisant travailler 15 ouvriers 10 heures par jour pendant 12 jours il pourra exécuter une commande. En fait, la durée du travail quotidien est bien de 10 heures pendant les 4 premiers jours mais doit être réduite ensuite à 7 h 3à mn. Combien faudra-t-il de jours pour exécuter la commande ? Combien de jours aurait-il fallu s'il avait disposé régulièrement de 20 ouvriers travaillant 9 heures par jour ?

III- Partages proportionnelles

1) Partages simples

Définition : un partage est dit simple lorsqu'il est effectué selon un seul critère.

Ainsi les partages simples se subdivisent en deux catégories : **les partages directement proportionnel et les partages inversement proportionnels.**

a- Partages directement proportionnelles

Définition : les nombres : x ; y ; z et a ; b ; c forment un partage directement proportionnel s'ils forment une suite de rapports égaux :
la suite $(x ; y ; z)$ forment un partage directement proportionnel avec la suite $(a ; b ; c)$ si on peut les écrire de la façon suivante : $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x + y + z}{a + b + c} = k$.

D'où les égalités suivantes :

- Si : $\frac{x}{a} = k$ alors $x = ka$.

- Si : $\frac{y}{b} = k$ alors $y = kb$.

- Si : $\frac{z}{c} = k$ alors $z = kc$.

Exemples :

Exemple 1 : Kady partage la somme de 66 000 F CFA entre ses trois enfants directement proportionnelle à leur âge respectivement égale à : 10 ans ; 7 ans et 5 ans.
Quelle est la part de chaque enfant ?

Exemple 2 : Un héritage de 190 000 F CFA doit être partagé entre trois frères directement proportionnel à leur âge : 7 ans ; 3 ans et 9 ans.
Calculer la part des trois frères.

Solutions

Solution 1 : soit x ; y et z la part de chacun des enfants tel que :

$$\frac{x}{10} = \frac{y}{7} = \frac{z}{5} = \frac{x + y + z}{10 + 7 + 5} = \frac{66\ 000}{22} = 3\ 000$$

- Si : $\frac{x}{10} = 3\ 000$ alors $x = 30\ 000$.

- Si : $\frac{y}{7} = 3\ 000$ alors $y = 21\ 000$.

- Si : $\frac{z}{5} = 3\ 000$ alors $z = 15\ 000$.

Solution 2 : soit x ; y et z la part de chacun des frères tel que :

$$\frac{x}{7} = \frac{y}{3} = \frac{z}{9} = \frac{x + y + z}{7 + 3 + 9} = \frac{19\ 000}{19} = 10\ 000$$

- Si : $\frac{x}{7} = 10\ 000$ alors $x = 70\ 000$.

- Si : $\frac{y}{3} = 10\ 000$ alors $y = 30\ 000$.

- Si : $\frac{z}{9} = 10\ 000$ alors $z = 90\ 000$.

b- Partages inversement proportionnelles

Définition : les nombres : x ; y ; z et a ; b ; c forment un partage inversement proportionnel s'ils forment une suite de rapports égaux :

la suite $(x ; y ; z)$ forment un partage directement proportionnel avec la suite

$\left(\frac{1}{a} ; \frac{1}{b} ; \frac{1}{c}\right)$ si on peut les écrire de la façon suivante :

$$\frac{x}{\frac{1}{a}} = \frac{y}{\frac{1}{b}} = \frac{z}{\frac{1}{c}} = \frac{x + y + z}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = k \text{ (avec } d \neq 0 ; e \neq 0 ; f \neq 0 \text{)}.$$

D'où les égalités suivantes :

$$\text{- Si : } \frac{x}{\frac{1}{a}} = k \quad \text{alors } x = \frac{k}{a}.$$

$$\text{- Si : } \frac{y}{\frac{1}{b}} = k \quad \text{alors } y = \frac{k}{b}.$$

$$\text{- Si : } \frac{z}{\frac{1}{c}} = k \quad \text{alors } z = \frac{k}{c}.$$

Exemples :

Exemple 1 : Mr DEMBELE partage la somme de 32 000 F CFA entre ses trois enfants inversement proportionnelle à leur âge respectivement égale à : 2 ans ; 10 ans et 5 ans. Quelle est la part de chaque enfant ?

Exemple 2 : Un père partage son patrimoine d'une valeur de 68 000 000 F CFA entre ses trois enfants inversement proportionnel à leur âge : 3 ans ; 4 ans et 8 ans. Calculer la part des trois frères.

Solutions

Solution 1 : Soit x ; y et z la part de chacun des enfants tel que :

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{10}} = \frac{z}{\frac{1}{5}} = \frac{x + y + z}{\frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5}} = \frac{32\,000}{\frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5}} = \frac{32\,000}{\frac{4}{5}} = 40\,000$$

$$\text{- Si : } \frac{x}{\frac{1}{2}} = 40\,000 \quad \text{alors } x = \frac{40\,000}{2} = 20\,000$$

$$\text{- Si : } \frac{y}{\frac{1}{10}} = 40\,000 \quad \text{alors } y = \frac{40\,000}{10} = 4\,000$$

-

$$\text{- Si : } \frac{z}{\frac{1}{5}} = 40\,000 \quad \text{alors} \quad z = \frac{40\,000}{5} = 8\,000$$

Solution 2 : Soit x , y et z la part de chacun des enfants tel que :

$$\frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{y}{\frac{1}{4}} = \frac{z}{\frac{1}{8}} = \frac{x + y + z}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = \frac{68\,000\,000}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}} = \frac{68\,000\,000}{\frac{17}{24}} = 96\,000\,000$$

$$\text{- Si : } \frac{x}{\frac{1}{3}} = 96\,000\,000 \quad \text{alors} \quad x = \frac{96\,000\,000}{3} = 32\,000\,000$$

$$\text{- Si : } \frac{y}{\frac{1}{4}} = 96\,000\,000 \quad \text{alors} \quad y = \frac{96\,000\,000}{4} = 24\,000\,000$$

$$\text{- Si : } \frac{z}{\frac{1}{8}} = 96\,000\,000 \quad \text{alors} \quad z = \frac{96\,000\,000}{8} = 12\,000\,000$$

2) Partages composés ou Partages complexes

Définition : un partage est dit composé lorsqu'il est effectué selon deux critères à savoir :

Le critère de partage **directement proportionnel** et le critère de partage **inversement proportionnel**. On dit que $(x ; y ; z)$ est **directement proportionnel** à $(a ; b ; c)$; **inversement proportionnel** à $(a' ; b' ; c')$; **directement proportionnel** à $(a'' ; b'' ; c'')$; **inversement proportionnel** à $(a''' ; b''' ; c''')$... etc. si :

$$(x ; y ; z) \text{ est directement proportionnel à : } \left(a \times \frac{1}{a'} \times a'' \times \frac{1}{a'''} ; b \times \frac{1}{b'} \times b'' \times \frac{1}{b'''} ; c \times \frac{1}{c'} \times c'' \times \frac{1}{c'''} \right) \dots \dots \dots \text{etc.}$$

Avec $a' \neq 0$; $b' \neq 0$; $c' \neq 0$; $a''' \neq 0$; $b''' \neq 0$; $c''' \neq 0$

Exemples :

Exemple 1 : Un directeur est chargé de partager la somme de 1 960 000 F CFA entre ses trois employés : Ali ; Moussa et Bakary. Le partage se fait proportionnellement à leur salaire respectivement égale à : 24 000 ; 20 000 ; 18 000 et inversement proportionnelle au retard accusé par les trois employés dans le mois : 4 jours ; 2 jours et 5 jours. Quelle est la part de chaque employé ?

Exemple 2 : une teinturière achète à 21 000 F CFA du tissu Bazin. Au moment de la teinture, elle constate que $\frac{1}{7}$ du Bazin est inutilisable. Alors elle décide de diviser le reste en 3

coupons inversement proportionnel à : 3 ; 4 et 6.

Calculer la longueur de chaque coupon.

Solutions

Solution 1 : Calculons la part de chacun des employés :

Soit x ; y et z la part de Ali ; Moussa et Bakary tel que

$$\frac{x}{24\,000} = \frac{y}{20\,000} = \frac{z}{18\,000} = \frac{x + y + z}{24\,000 + 20\,000 + 18\,000} = \frac{1\,960\,000}{196\,000} = 100$$

- Si : $\frac{x}{60\,000} = 100$ alors $x = 6\,000\,000$

- Si : $\frac{y}{10\,000} = 100$ alors $y = 1\,000\,000$

- Si : $\frac{z}{3600} = 100$ alors $z = 360\,000$

Solution 2 : Calculons la longueur de chaque coupon :

La partie inutilisable est : $\frac{21\,000}{7} = 3\,000$.

Le restant est : $21\,000 - 3\,000 = 18\,000$

Soit x ; y et z la longueur de chaque coupon tel que si le partage se fait inversement proportionnellement à 3 ; 4 et 6 on a :

$$\frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{y}{\frac{1}{4}} = \frac{z}{\frac{1}{6}} = \frac{x + y + z}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = \frac{18\,000}{\frac{54}{72}} = 24\,000$$

- Si : $\frac{x}{\frac{1}{3}} = 24\,000$ alors $x = \frac{24\,000}{3} = 8\,000$

- Si : $\frac{y}{\frac{1}{4}} = 24\,000$ alors $y = \frac{24\,000}{4} = 6\,000$

- Si : $\frac{z}{\frac{1}{6}} = 24\,000$ alors $z = \frac{24\,000}{6} = 4\,000$

Partages erronés

Un partage est dit erroné lorsqu'il s'effectue en commettant une ou des erreurs.

Exemples :

Exemple 1 : Un père de famille veut partager son héritage **H** entre ces trois enfants directement proportionnel à leur âge : 15 ans ; 14 ans et 9 ans et inversement proportionnel aux rangs de leur mère : 3 ; 2 et 3. En ne tenant pas compte de la deuxième condition, il fait une erreur. Il décide ainsi de faire un partage directement proportionnel aux rangs de leur mère. Le deuxième enfant atteste avoir perdu une somme de 560 000 F après ce partage. Trouver le montant de l'héritage **H** du père et faite correctement le partage.

Exemple 2 : Un employé est chargé de partager une prime **P** entre trois contremaîtres, proportionnellement à leurs salaires annuels : 42 000 F ; 35 000 F ; 28 000 F, proportionnellement à leurs années de service : 7 ; 5 ; 3 et inversement proportionnel à leurs retards dans l'année : 2 ; 4 et 5. L'employé fait une erreur et ne tient pas compte de la dernière condition. Le deuxième touche alors 352,5 F de moins qu'il aurait dû toucher. Quelle était la prime **P** à partager ?

Solutions

Solution1 : Soient x ; y et z les partages respectifs tel que :

$$(x ; y ; z) \text{ DP } (14 ; 15 ; 9) \text{ DP } (3 ; 2 ; 3) \Rightarrow (x ; y ; z) \text{ DP } (45 ; 28 ; 27)$$

$$\Rightarrow \frac{x}{45} = \frac{y}{28} = \frac{z}{27} = \frac{A}{100}$$

$$\text{ - Si : } \frac{x}{45} = \frac{A}{100} \quad \text{alors } x = \frac{45 A}{100}$$

$$\text{ - Si : } \frac{y}{28} = \frac{A}{100} \quad \text{alors } y = \frac{28 A}{100}$$

$$\text{ - Si : } \frac{z}{27} = \frac{A}{100} \quad \text{alors } z = \frac{27 A}{100}$$

Partage sans erreur

Soient a ; b et c les nouvelles parts respectives tel que :

$$(a ; b ; c) \text{ DP } (14 ; 15 ; 9) \text{ IP } (3 ; 2 ; 3) \Rightarrow$$

$$(a ; b ; c) \text{ DP } (14 ; 15 ; 9) \text{ DP } \left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{3} \right) \Rightarrow (a ; b ; c) \text{ DP } (5 ; 7 ; 3)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{5} = \frac{b}{7} = \frac{c}{3} = \frac{A}{15}$$

$$\text{ - Si : } \frac{a}{5} = \frac{A}{15} \quad \text{alors } a = \frac{5 A}{15} = \frac{5 \times 3\,000\,000}{15} = 1\,000\,000 \text{ F}$$

$$\text{ - Si : } \frac{b}{7} = \frac{A}{15} \quad \text{alors } b = \frac{7 A}{15} = \frac{7 \times 3\,000\,000}{15} = 1\,400\,000 \text{ F}$$

$$\text{ - Si : } \frac{c}{3} = \frac{A}{15} \quad \text{alors } c = \frac{3 A}{15} = \frac{3 \times 3\,000\,000}{15} = 600\,000 \text{ F}$$

La part du 2^{ième} = 560 000 F

$b + y = 560\,000 \text{ F}$

$$\frac{7 A}{15} - \frac{28 A}{100} = 560\,000 \text{ F} \Rightarrow \frac{700 A - 420 A}{1500} = 560\,000 \text{ F} \Rightarrow 280 A = 1500 \times 560\,000 \text{ F}$$

$$\Rightarrow 280 A = 3\,000\,000 \Rightarrow A = 3\,000\,000.$$

Solution2 :

- Le partage devait être fait proportionnellement aux nombres : $\frac{42 \times 7}{4}$; $\frac{35 \times 5}{2}$; $\frac{28 \times 3}{5}$
- Les nombres proportionnels peuvent être divisés par 7, puis simplifié : 10,5 ; 12,5 ; 2,4.
- Le deuxième contremaître devait recevoir : $\frac{12,5}{10,5 + 12,5 + 2,4} = \frac{125}{254}$ de la prime.
- Le partage erroné est effectué proportionnellement à : $42 \times 7 = 294$; $35 \times 5 = 175$; $28 \times 3 = 84$.
- Le deuxième contremaître reçoit ainsi : $\frac{175}{294 + 175 + 84} = \frac{175}{553}$ ou $\frac{25}{79}$ de la prime.
- La perte subie est : $\frac{125}{254} - \frac{25}{79} = \frac{3525}{20\ 066}$ de la prime.
- Cette perte étant 352,5 F, alors la prime s'élève à : $\frac{352,5}{\frac{3525}{20\ 066}} = 2\ 006,6$ F.
- On calculera aisément la part de chacun.

EXERCICES

Partages directement proportionnelles.

1 Une personne décide de partager une somme de 208 000 F entre trois personnes proportionnellement au nombre : 2 ; 3 ; 4. Calculer la part de chacune d'elle.

2 Trois personnes ont fondées une société de fabrique de glace :

- La première personne a mise la somme de 500 000 F.
- La deuxième personne a mise la somme de 600 000 F.
- La troisième personne a mise la somme de 800 000 F.

Elles doivent se partager un bénéfice de 1 99 500 F proportionnellement aux mises.
Quelle est la part qui revient à chacun des actionnaires ?

3 Trois commerçants se sont groupés pour faire transporter sur un même parcours des marchandises de même nature.
Ils repartissent le transport qui s'élève à 676 000 F proportionnellement aux poids des marchandises transportées par chacun d'eux, à savoir : 2500 kg ; 6 000 kg et 4 500 kg.
Quelle est la somme à donner pour chaque commerçant ?

4

Un industriel emploie trois entrepreneurs. Ils veulent chacun exécuter un même travail. Pour les encourager à travailler rapidement, l'industriel décide de partager entre eux un bonus de 8 520 000 F, inversement proportionnelle au nombre d'heures de travail qu'il aura fallu à chacun pour effectuer sa tâche.

- Le premier entrepreneur a mis 63 heures.
- Le deuxième entrepreneur a mis 72 heures.
- Le troisième entrepreneur a mis 80 heures.

Quel est le bonus attribué à chacun des trois entrepreneurs ?

6 Kady partage la somme de 66 000 F CFA entre ses trois enfants directement proportionnelle à leur âge respectivement égale à : 10 ans ; 7 ans et 5 ans.

Quelle est la part de chaque enfant ?

7 Un héritage de 190 000 F CFA doit être partagé entre trois frères directement proportionnel à leur âge : 7 ans ; 3 ans et 9 ans.

Calculer la part des trois frères.

8 Trois contremaîtres des équipes d'ouvriers : la première comprend 10 ouvriers, la deuxième 18, la troisième 22. Le caissier de l'entreprise leur remet une somme totale de 9 600 F pour payer les salaires. Répartir cette somme entre les trois contremaîtres proportionnellement aux nombres des ouvriers qu'ils dirigent.

9 A 8 heures, un camion part d'une ville **A** et se dirige vers une ville **B** distant de 180 km. A la même heure, une automobile part de **B** vers **A**. la vitesse du camion est les $\frac{5}{7}$ de l'automobile.

A quelle distance de **A** aura lieu le croisement des deux véhicules ? La rencontre ayant lieu à 9 h 45 mn. Quelle sont leur vitesse horaires ?

10 Trois associés ont engagé dans une affaire des capitaux : le premier 400 000 F pendant 3 ans, le deuxième 250 000 f pendant 4 ans, le troisième 600 000 F pendant 18 mois. Partager un bénéfice de 220 100 F proportionnellement aux capitaux engagés et aux durées de leurs participations.

11 Un banquier, voulant récompenser le travail exceptionnel de trois employés, décide de leur accorder une gratification proportionnellement à leur année de service, respectivement 14 ; 12 et 10 ans. Les parts ont été calculées par erreur sur 12 ; 10 et 8 ans, et l'un des employés se trouve, après rectification du décompte, recevoir 10 F de plus qu'on ne l'avait prévu par le calcul erroné. On demande quelle était la somme globale à distribuer et quelle part est revenue à chacun des employés.

12 Des locataires d'un même immeuble ont décidé de faire installer à leurs frais un ascenseur. Répartir le montant des frais 350 000 F proportionnellement aux loyers, sachant que 3 locataires paient chacun un loyer 1 000 F, que 5 locataires paient chacun un loyer de 800 F et que 6 locataires paient chacun un loyer de 500 F.

13 Un industriel partage une gratification entre quatre collaborateurs proportionnellement à leurs émoluments annuels : 30 000 F ; 24 000 F ; 16 000 F. La part du premier s'élève à 390 F.

Calculer le montant total de la somme partagée et de la gratification reçue par chaque ingénieur.

- 14** Dans un grand magasin le rayon de fourrures a fait un chiffre d'affaires égal aux $\frac{2}{17}$ chiffre total, le rayon de confection pour hommes un chiffre égal aux $\frac{3}{11}$ du chiffre total et le rayon de confection pour dames un chiffre aux $\frac{7}{20}$ du chiffre total.

On sait que les chefs de ces rayons ont reçu des appointements dont le total s'élève à 83 070 F.

Quelle est la somme reçue par chacun si ses appointements sont proportionnels au chiffre d'affaires de son rayon ?

Partages inversement proportionnelles.

- 15** Mr DEMBELE partage la somme de 45 000 F CFA entre ses trois enfants inversement proportionnelle à leur âge respectivement égale à : 7 ans ; 9 ans et 12 ans.
Quelle est la part de chaque enfant ?
- 16** Un père partage son patrimoine d'une valeur de 99 000 000 F CFA entre ses trois enfants inversement proportionnel à leur âge : 8 ans ; 7 ans et 15 ans.
Calculer la part des trois frères.
- 17** Répartir une gratification de 16 770 F entre trois employés, inversement proportionnellement aux nombres de leurs jours d'absence dans l'année : 2 jours ; 3 jours et 4 jours.
- 18** Un père veut partager un capital de 360 000 F CFA entre ses trois enfants en raison inverse de leur âge. Ils ont respectivement 3 ans ; 5 ans et 10 ans.
Calculer la part des trois frères.
- 19** Un marchand achète une pièce de 180 m de tissu. Au moment de la mettre en vente, il s'aperçoit qu'une partie de la pièce représentant les $\frac{2}{9}$ de sa longueur est détériorée. Il divise le reste en trois coupons dont les longueurs sont inversement proportionnelles à 2 ; 4 et 7.
Quelle est la longueur de chaque coupon ?

Partages composés ou complexes.

- 20** Un directeur est chargé de partager la somme de 1 960 000 F CFA entre ses trois employés : Ali ; Moussa et Bakary. Le partage se fait proportionnellement à leur salaire respectivement égale à : 24 000 ; 20 000 ; 18 000 et inversement proportionnelle au retard accusé par les trois employés dans le mois : 4 jours ; 2 jours et 5 jours.
Quelle est la part de chaque employé ?

Une teinturière achète à 21 000 F CFA du tissu Bazin. Au moment de la teinture, elle constate que $\frac{1}{7}$ du Bazin est inutilisable. Alors elle décide de diviser le reste en 3 coupons inversement proportionnel à : 3 ; 4 et 6. Calculer la longueur de chaque coupon.

- 22** Un chef d'entreprise décide de répartir une part de ses bénéfices entre trois de ses principaux employés Ali est au 3^{ième} échelon, Madou au 4^{ième}, Idrissa au 6^{ième}. Idrissa qui avait calculé la somme lui revenant reçoit 280 F de moins qu'il n'avait prévu. Cela provient de ce que le partage a été fait en parties inversement proportionnelles aux échelons alors que Idrissa avait calculé des parts proportionnelles aux échelons. Quelle était la somme à répartir ?

Pourcentages

Activité :

A l'occasion de la fête de Tabaski, un commerçant fait une remise sur les articles de sa boutique. Il affiche sur sa vitrine le tableau du prix (en F CFA) suivant :

Ancien prix	7 800	12 600	32 800
Remise	780	1 260	3 280

- Justifie que ce tableau est un tableau de proportionnalité.
- Quel est le coefficient de proportionnalité qui permet de passer des anciens prix aux remises ?
- Ecris ce nombre sous forme d'une fraction ayant pour dénominateur : 100.

Définition :

Le pourcentage est une proportion que présente une grandeur dans une autre ou la variation d'une grandeur par rapport à une autre.

D'une manière générale, on dit que le nombre a représente x pourcent du nombre b signifie que : $a = \frac{x}{100} \times b$.

Le pourcentage d'un nombre a par rapport à un nombre b est le quotient : $\frac{x}{100}$.

I- Pourcentages directes

1) Tant pour cent - Tant pour mille

On rappelle que pour indiquer une commission ; une taxe ; un bénéfice ; une perte ; ect ..., on en fixe le montant pour une somme de 100 F ou de 1 000 F.

Exemple 1 : Un vendeur reçoit une commission de 5 pour cent. Alors on écrit : le vendeur reçoit 5 % c'est-à-dire il reçoit 5 F chaque fois qu'il fait une vente de 100 F.

Par conséquent :

- Il reçoit 10 F s'il fait une vente de 200 F.
- Il reçoit 15 F s'il fait une vente de 300 F ; ainsi de suite.....

Exemple 2 : un intermédiaire perçoit un courtage de 4,5 pour mille. Alors on écrit : l'intermédiaire perçoit 4,5 ‰ c'est-à-dire il perçoit 4,5 F pour une négociation de 1000 F.

Par conséquent :

- Il perçoit 9 F s'il fait une négociation de 2000 F.
- Il reçoit 13,50 F s'il fait une négociation de 3000 F ; ainsi de suite.....

2) Calculs d'une taxe

Exemple : la vente d'une robe est frappée d'une taxe de 26 % sur le prix de vente. Calculer cette taxe pour un prix de 14 250 F.

Solution

1^{ière} Méthode

Calculons le coefficient de proportionnalité :

Une taxe de 20 % donne : $\frac{20}{100} = 0,20$. Alors le coefficient de proportionnalité est $k = 0,20$.

D'où le montant de la taxe est : $14\,250 \times k = 14\,250 \times 0,20 = 2850$

2^{ème} Méthode

Utilisons la proportionnalité directe pour calculer la quatrième proportionnelle x :

Taxes	prix
20	100
x	14 250

Proportion : $\frac{x}{20} = \frac{14\ 250}{100} \Rightarrow x = \frac{14\ 250 \times 20}{100} = 2850$

3) Calculs de pourcentage

Pour calculer le pourcentage d'une grandeur par rapport à une autre grandeur, on fait le rapport des deux grandeurs et on multiplie le résultat obtenu par 100 (pour l'expression en tant pour 100) et par 1000 (pour l'expression en pour 1000).

Exemple1: un transporteur constate qu'il a réalisé un chiffre d'affaire annuel de 12 000 000 F et que ses frais généraux se chiffrent à 2 450 600 F.

Quel pourcentage du chiffre d'affaires représente les frais généraux ?

Exemple2: Au baccalauréat 2013, les candidats étaient au nombre de 15 000 000 pour une admission de 9 000 000 élèves.

Quel est le taux d'admission de cette année ?

Solutions

Solution1 :

Le pourcentage du chiffre d'affaires que représente les frais généraux est donné par la

Proportion suivante : $\frac{x}{100} = \frac{2\ 450\ 600}{12\ 000\ 000} \Rightarrow x = \frac{2\ 450\ 600 \times 100}{12\ 000\ 000} = 20,42\ \% \text{ ou } 204,2\ \text{‰}.$

Le pourcentage correspondant donc est : 20,42 % .

Solution2 :

Le pourcentage du taux d'admission au baccalauréat 2013 est donné par la

Proportion suivante : $\frac{x}{100} = \frac{9\ 000\ 000}{15\ 000\ 000} \Rightarrow x = \frac{9\ 000\ 000 \times 100}{15\ 000\ 000} = 60\ \% .$

Le pourcentage correspondant donc au taux d'admission est : 60 % .

4) Calculs de nombre initial

Un rabais de 6 % sur une facture s'est élevé à 843 F. quel est le montant initial de la facture ?

Solution

Le montant initial de la facture est donné par : $x = \frac{843 \times 100}{6} = 14\ 050\ \text{F} .$

5) Pourcentages additifs ou Pourcentages à ajouter

Définition : Un Pourcentage est dit **additif** ou est appelé Pourcentage à **ajouter** s'il peut s'exprimer sous la forme $(100 + x) \%$ où x est le pourcentage à ajouter au montant initial.

Exemple : Pour expédier une marchandise achetée à 2 540 F, on paye 7,5 % du prix d'achat. Quel sera le coût de cette marchandise lorsqu'elle arrivera à destination ?

Solution

1^{ière} Méthode

Calculons le coût de cette marchandise :

- Frais de transport : $\frac{2540 \times 7,5}{100} = 190,5\ \text{F} .$

- Coût de la marchandise : $2\,540 + 190,5 = 2\,730,5$ F.

2^{ème} Méthode

Utilisons la proportionnalité directe pour calculer la quatrième proportionnelle x :

Proportion : $\frac{100}{2540} = \frac{107,5}{x} \Rightarrow x = \frac{2540 \times 107,5}{100} = 2\,730,5$ F.

Dans la deuxième méthode, pour déterminer le coût de la marchandise, on a multiplié le prix par 107,5 % c'est-à-dire $(100 + 7,5) \%$ soit 1,075.

Remarque :

- Ajouter 7,5 % équivaut à prendre 107,5 % , donc multiplié le montant par 1,075.
- Ajouter $x \%$ équivaut à prendre $(100 + x) \%$

6) Pourcentages soustractifs ou Pourcentages à retrancher

Définition : Un Pourcentage est dit **soustractifs** ou est appelé Pourcentage à **retrancher** s'il peut s'exprimer sous la forme $(100 - x) \%$ où x est le pourcentage à soustraire au montant initial.

Exemple : Un objet supporte 5 % de taxe du prix de vente de 7 320 F. Quel sera le prix de vente des taxes déduites ?

Solution

1^{ère} Méthode (utilisation du coefficient de proportionnalité)

Calculons :

- Montant de la taxe : $\frac{7320 \times 5}{100} = 366$ F .
- le prix de vente des taxes déduites : $7320 - 366 = 6954$ F.

2^{ème} Méthode (utilisation de la proportionnalité directe)

Proportion : $\frac{100}{7320} = \frac{95}{x} \Rightarrow x = \frac{7320 \times 95}{100} = 6954$ F.

Dans la deuxième méthode, pour déterminer le montant du prix de vente des taxes déduites, on a multiplié le montant 7320 par $\frac{95}{100}$ c'est-à-dire $(100 - 5) \%$ soit 95%.

Remarque :

- Retrancher 5 % équivaut à conserver 95 % , donc $(100 - 5) \%$ multiplié par 0,95.
- Retrancher $x \%$ équivaut à conserver $(100 - x) \%$

7) Pourcentages par tranches

Définition : Les pourcentages par tranches sont des pourcentages relatifs aux calculs d'un montant par intervalles de classe. Le tant pour cent ou (le tant pour mille) varie le plus souvent d'une classe à une autre. On peut dire également que les pourcentages par tranches sont des pourcentages qui sont appliqués sur un intervalle de valeur comprise entre deux bornes. Comme on ne peut pas appliquer à toutes les valeurs à la fois, on se sert des valeurs de tranche : $(VT = \text{borne supérieur} - \text{borne inférieur})$.

Soit un intervalle ouvert $] a ; b [$ de classe en $\%$. Le calcul de $x \%$ se fait sur la différence des bornes : c'est-à-dire la différence de la borne inférieur b et de la borne supérieur a $(b - a)$.

Alors le montant de la tranche est donné par : $\frac{(b - a) \times c}{100}$.

Exemple

Le directeur commercial de l'entreprise DEMBELE rejoint annuellement une commission sur le chiffre d'affaire ainsi calculé :

- De 0 à 1 000 000, on a une commission de 0%.
 - De 1 000 000 à 2 000 000, on a une commission de 2%.
 - De 2 000 000 à 4 000 000, on a une commission de 3%.
 - De 4 000 000 et plus, on a une commission de 4%.
- a- Calculer ses appointements pour les chiffres d'affaires suivantes :
2 650 000 F CFA et 5 800 000 F CFA.
- b- Déterminer le chiffre d'affaire correspondant à la commission 56 000 F CFA.

Solution

a- Calculons les appointements:

Pour le chiffre d'affaire de 2 650 000 F CFA, on a :

- De 0 à 1 000 000, on a : 0

De 1 000 000 à 2 000 000, on a : $\frac{(2\,000\,000 - 1\,000\,000) \times 2}{100} = 20\,000$

De 2 000 000 à 2 650 000, on a : $\frac{(2\,650\,000 - 2\,000\,000) \times 3}{100} = 19\,500$

Total = 20 000 + 19 500 = 39 500

Pour le chiffre d'affaire de 5 800 000 F CFA, on a :

- De 0 à 1 000 000, on a : 0

De 1 000 000 à 2 000 000, on a : $\frac{(2\,000\,000 - 1\,000\,000) \times 2}{100} = 20\,000$

De 2 000 000 à 4 000 000, on a : $\frac{(4\,000\,000 - 2\,000\,000) \times 3}{100} = 60\,000$

De 4 000 000 à 5 800 000, on a : $\frac{(5\,800\,000 - 4\,000\,000) \times 4}{100} = 72\,000$

Total = 20 000 + 60 000 + 72 000 = 152 000 F CFA.

b- Déterminons le chiffre d'affaire correspondant à la commission 56 000 F CFA.

56 000 F CFA est compris entre 20 000 F CFA et 60 000 F CFA, par conséquent le pourcentage est de 3 %.

Ainsi :

- Un chiffre d'affaire de 2 000 000 FCFA donne 20 000 F CFA.
- Le reste du tarif de 3 % donne 36 000 F CFA.

La somme correspondante au 36 000 F CFA est de $\frac{36\,000}{0,03} = 1\,200\,000$ F CFA.

Donc le chiffre d'affaire sera de : $2\,000\,000 + 1\,200\,000 = 3\,200\,000$ F CFA.

II- Pourcentages indirectes

Dans certains cas, pour déterminer le montant des bénéfices des taxes, des ventes, ect..., on doit calculer des taxes des tants pour cent sur des quantités que l'on ne connaît pas directement. Un calcul préliminaire est donc nécessaire : on utilisera une proportionnalité préparée.

1) Pourcentages en dedans (tant pour cent en dedans)

Définition : Si la quantité à laquelle s'applique le tant pour cent est inférieur à la quantité connue, on dit qu'on calcule un tant pour cent en dedans.

Exemple

Les droits de douanes sur une marchandise s'élève à 12% de son prix d'achat.

Quel est le montant de ces droits sachant que le prix d'achat majoré des droits de douane est de 23744 F ?

Solution

Calculons d'abord, pour un prix d'achat de 100 F, le prix d'achat majoré des droits de douane : $100\text{ F} + 12\text{ F} = 112\text{ F}$.

1^{ère} Méthode

Calculons :

- Pour un prix total de 112 F, les droits s'élèvent à 12 F.

- Pour un prix total de 23744 F, les droits s'élèvent à x F.

$$\text{Alors } x = \frac{12 \times 23744}{112} = 2544\text{ F.}$$

Donc les droits de douane représentent les $\frac{12}{112}$ du prix total.

2^{ème} Méthode

Droits	Prix d'achat	Prix d'achat majoré
x	y	23744
12 F	100 F	112 F

$$\text{Alors } x = \frac{12 \times 23744}{112} = 2544\text{ F.}$$

Remarque :

On peut calculer le prix d'achat par le même procédé : $y = \frac{100 \times 23744}{112} = 21200\text{ F.}$

Donc le prix d'achat représentent les $\frac{100}{112}$ du prix total. Le coefficient de proportionnalité est

ici $\frac{100}{112}$

2) Pourcentages en dehors (tant pour cent en dehors)

Définition : Si la quantité à la quelle s'applique le tant pour cent est supérieur à la quantité connue, on dit qu'on calcule un tant pour cent en dehors.

Exemple

Un éditeur accorde à une librairie une remise de 30 % sur les prix marqués.
Quel est le montant de cette remise sachant que le prix net est de 21 450 F ?

Solution

- Pour un prix marqué de 100 F , le prix net est : $100 - 30 = 70$ F CFA.
- Pour un prix net de 70 F, la remise est : $100 - 30 = 70$ F CFA.
- Pour un prix net de 21 420 F, la remise est : x F CFA.

Alors $x = \frac{21\,420 \times 30}{70} = 9\,180$ F CFA. La remise représente donc les $\frac{30}{70}$ du prix net.

Remarque :

On peut calculer le total des prix marqués par le même procédé : $\frac{100 \times 21\,420}{70} = 30\,600$ F CFA

Le total des prix marqués représente donc les $\frac{100}{70}$ du prix net.

Le coefficient de proportionnalité est $k = \frac{100}{70}$.

NB :

Normalement c'est le total des prix marqués c'est-à-dire les 30 600 F CFA qu'on devrait appliquer au 30 % pour obtenir le montant de la remise, mais de façon indirecte on a déterminé le montant de la remise sur le montant connu c'est-à-dire 21 420 F CFA. Donc 30 000 F CFA est supérieur à la quantité connue : 21 420 F CFA.

3) Coût - Prix d'achat – Prix de revient

Les charges étant classées par fonctions, nous pouvons retenir :

- **(Prix d'achat brut) – (Bonifications) = Prix d'achat net.**
- **(Prix d'achat net) + (Frais d'achat) = Coût d'achat.**

Pour un industriel ou un artisan, nous pouvons retenir :

- **(Coût d'achat) + (Frais de fabrications) = Coût de production.**
- **(Prix d'achat net) + (Frais d'achat) = Coût d'achat.**
- **(Coût de production) + (Frais de distribution : vente) = Prix de revient.**

Pour un commerçant, nous pouvons retenir :

(Coût d'achat) + (Frais de distribution) = Prix de revient.

Ainsi : Un coût est constitué par le total des charges supportées par un objet ou un groupe d'objets, jusqu'à un stade autre que le stade final.

Le prix de revient est donc le total de tout ce qu'a coûté l'objet, ou le groupe d'objets, jusqu'au stade final de la livraison au client. S'il n'est pas fait mention des frais de distribution, il est égal au coût de production (**Industrie**) ou au coût d'achat (**Commerce**).

Exemple

On propose à un fourreur des peaux à une somme de 180 000 F. Il obtient sur ce prix une remise de 5 %. Il paye pour le transport 6 % du prix d'achat net. Les frais de transformation s'élèvent à 40 % du prix d'achat augmenté de transport. Il estime ses frais de vente à 10 % du prix de revient. Calculer le prix de revient.

Solution

- Retrancher 5 %, c'est multiplier par 0,95.
- Ajouter 6 %, c'est multiplier par 1,06.
- Ajouter 40 %, c'est multiplier par 1,40.
- Le prix d'achat net est : $180\,000\text{ F} \times 0,95 = 171\,000\text{ F}$.
- Le coût d'achat est : $171\,000\text{ F} \times 1,06 = 181\,260\text{ F}$.
- Le coût de production est : $181\,260\text{ F} \times 1,40 = 253\,764\text{ F}$.

Le dernier calcul nécessite une préparation car les frais de vente sont calculés sur le prix de revient qui les contient.

Pour un prix de revient de 100 F, les frais de vente s'élèvent à 10 F, le coût de production à $100\text{ F} - 10\text{ F} = 90\text{ F}$.

Pour un coût de production de 90 F, le prix de revient est 100 F.

Pour un coût de production de 253 764 F, le prix de revient est : $\frac{100\text{ F} \times 253\,764}{90} =$

281 960 F.

4) Coefficient multiplicateur

En se référant sur l'exercice précédent, si le fourreur achète et transforme d'autres peaux aux mêmes conditions, il peut déterminer directement le prix de revient sans refaire tous les calculs. Ainsi il remarquera que pour un prix d'achat brut de 180 000 F, il a un prix de 281 960 F.

Donc, pour un prix d'achat brut de 1 F, il a un prix de revient de $\frac{281\,960}{180\,000} = 1,564\,444\ldots$

F.

Il obtiendra le nouveau prix de revient en multipliant le nouveau prix d'achat brut par : 1,564 444.

Ce nombre : **1,564 444** est appelé : **Coefficient multiplicateur**.

Si on compare deux prix, le coefficient multiplicateur est la valeur du deuxième prix qui correspond à 1 F du premier prix.

On obtient le deuxième prix en multipliant le premier par le coefficient multiplicateur.

Par conséquent on en déduit que : **Coefficient multiplicateur** = $\frac{\text{Prix de revient}}{\text{Prix d'achat brut}}$

5) Bénéfice

a- Marge brut – Bénéfice brut

Une marge est la différence entre le prix de vente hors taxe et un coût ou un prix (d'achat ou de revient). Ainsi retenons les relations suivantes :

- En industrie, nous pouvons retenir :

(Prix de vente hors taxe) - (Coût de production) = Marge sur Coût de production ou Marge brute.

- En commerce, nous pouvons retenir :
 - **(Prix de vente hors taxe) - (Coût d'achat) = Marge sur Coût d'achat ou Marge brute.**
 - **(Prix de vente hors taxe) - (Prix de revient) = Marge sur prix de revient ou Bénéfice brut ou Bénéfice commercial.**
 - **(Marge brute) – (Frais de distribution) = Bénéfice Brut.**
 - **(Prix de vente hors taxe) - (Prix de revient) = Bénéfice.**

Exemples

Exemple 1 : (Calcul du bénéfice, connaissant son tant pour cent du prix de revient et le prix de vente).

On vend un objet revenant à 75 F avec 30 % de bénéfice sur ce prix. Calculer le bénéfice et le prix de vente hors taxe.

Exemple 2 : (Calcul du bénéfice, connaissant son tant pour cent du prix de revient et le prix de vente hors taxe).

Un objet dont le prix de vente hors taxe est 360 F, laisse un bénéfice de 20 % du prix de revient. Calculer le bénéfice.

Solutions

Solution 1 :

C'est un pourcentage simple à ajouter :

- Bénéfice = $75 \text{ F} \times 0,3 = 22,5 \text{ F}$.
- Prix de vente hors taxe = $75 \text{ F} + 22,5 \text{ F} = 97,5 \text{ F}$ ou $75 \text{ F} \times 1,3 = 97,5 \text{ F}$.

Solution 2 :

- Pour un prix de revient de 100 F, le bénéfice est de 20 F et le prix de vente hors taxe de $100 \text{ F} + 20 \text{ F} = 120 \text{ F}$.
- Pour un prix de vente hors taxe de 120 F, le bénéfice est de 20 F.
- Pour un prix de vente hors taxe de 360 F, le bénéfice est $\frac{20 \text{ F} \times 360}{120} = 60 \text{ F}$

b- Taux de marque

On appelle **taux de marque**, le bénéfice correspondant à un prix de vente de 100 F, c'est-à-dire **le pourcentage de bénéfice calculé sur le prix de vente**.
Il s'applique actuellement, en général, au prix de vente hors taxe.
En général on peut retenir :

$$\text{Bénéfice} = \frac{\text{Prix de revient} \times \text{Taux de marque}}{100 - \text{Taux de marque}}$$

$$\frac{\text{Pourcentage}}{\text{Prix de revient}} = \frac{100 \times \text{Taux de marque}}{100 - \text{Taux de marque}}$$

$$\text{Prix de vente} = \frac{\text{Prix de revient} \times 100}{100 - \text{Taux de marque}}$$

$$\text{Coefficient multiplicateur} = \frac{100}{100 - \text{Taux de marque}}$$

Exemples

Exemple 1 (Calcul du bénéfice connaissant le taux de marque et le prix de revient)
Calculer le bénéfice correspondant à un taux de marque de 28% sur un objet revenant à 432 F.

Exemple 2 (Calcul des pourcentages de bénéfice)
Le prix de revient d'un objet est 150 F. Son prix de vente hors taxe est 240 F.
Quel pourcentage du prix de revient, et quel pourcentage du prix de vente, représente le bénéfice ?

Solutions

Solution1

Sur un prix de vente hors taxe de 100 F, le bénéfice est de 28 F et le prix de revient de :
100 F – 28 F = 72 F.

Pour un prix de revient de 432 F, le bénéfice s'élève à : $\frac{432 \text{ F} \times 28}{72} = 168 \text{ F}$

Solution2

Le bénéfice s'élève à : 240 F – 150 F = 90 F.

EXERCICES

Pourcentages directes.

1 Calculer : 3 % sur 9260 F – 7,2 % sur 2870 F – 12,2 % sur 870 F – 4 ‰ sur 6 800 F – 2,4 % sur 9 400 F – 15,3 ‰ sur 250 000 F.

2 Quel pourcentages représentent : 8 F sur 60 F – 72 F sur 450 F – 295,3 F sur 6300 F – 126 F sur 6 000 F ?

3 Indiquer le tant pour mille correspondant aux sommes de l'exercice N°2.

4 Calculer les prix brut sur les quels ont été calculés les rabais suivants :

5 Un commissionnaire vend pour le compte d'un producteur des marchandises. Il prélève une commission et remet à son commettant la différence entre le prix de vente et la commission. Quelle somme versera-il dans les conditions suivantes :

Prix de vente	720 000 F	870 000 F	5 800 000 F
Commission	2 %	1 ½ %	4,5 %

6 Les prix de marchandises achetées aux enchères sont majorés de 14 % de frais et taxes. Quels sont les prix de revient correspondant aux enchères suivantes : 2 800 F ; 7 200 F ; 15 600 F ?

7 Quel est le prix net de vente d'un objet marqué 100 F sur le quel on fait une remise de 15 % et une escompte de 3 % ?

8 Un fabricant vend une paire de chaussures au prix marqué de 32 F et accorde 15 % de remise et 5 % d'escompte. Calculer le prix net de vente ainsi obtenu.

9 Trois associés ont constitués une entreprise et ont apporté respectivement 500 000 F ; 700 000 F et 1 000 000 F. Le premier est gérant et à ce titre il lui est attribué un prélèvement égal à 10 % du bénéfice réalisé. Ce qui reste du bénéfice est reparti entre les trois associés proportionnellement au capital qu'ils ont apporté. A la fin de la première année, le bénéfice étant 110 000 F, calculer la part de chacun.

10 Un industriel fabricant des appareils d'un modèle unique réorganise son service des ventes. Il constate une importante augmentation du nombre d'articles vendus, dans la proportion de 11,5 à 46 alors que le chiffre d'affaires passe de 14 007 F à 81 240, 6 F.

11 Pour couvrir un accroissement de charges, il a dû majorer son prix de vente. Calculer le pourcentage de majoration :
- Par rapport au prix de vente primitif ;
- Par rapport au prix de vente actuel.

Pourcentages indirectes.

- 12** Un savon a perdu en fondant 30 % de son poids initial. Quel était ce poids si le poids actuel est de 770 kg ?
- 13** Une balle de coton entreposé dans un endroit humide a augmenté de poids de 5 % par rapport à son poids initial. Quel était celui – ci si son poids actuel est 567 kg ?
12 % d'une livraison de fruits sont inutilisables. Le kilogramme de fruits en bon état revient à 1,75 F. Quel est le prix d'achat du kilogramme ?
- 14** Deux ouvriers travaillent 40 heures par semaine plus quelques heures supplémentaires rémunérées au tarif normal majoré de 25 %. A la fin d'une semaine, leur employeur retient 6,5 % pour la sécurité sociale et leur verse un total de salaires de 528,925 F. Calculer le total de salaire avant retenues. Sachant que le premier a fait 40 heures à 6 F et 6 heures supplémentaire et que le deuxième a fait 40 heures à un certain taux et des heures supplémentaires à 6,75 F, trouvé combien le deuxième a fait d'heures supplémentaires.
- 15** Un commerçant achète des marchandises à 1280 F. Il paye 5 % de ce prix pour faire divers. Calculer le prix de revient.
- 16** Un commerçant achète pour un prix total de 3 480 F, deux coupes de tissus. Les $\frac{3}{7}$ du prix de la première sont égaux aux $\frac{2}{5}$ du prix de la deuxième.
- 1) Calculer le prix d'achat respectif de deux coupes.
 - 2) Le marchand veut réaliser sur la première un bénéfice net de 20 % du prix d'achat. Les frais et les taxes s'élèvent à 16 % du prix de vente. Par quel coefficient faut-il multiplier le prix d'achat pour obtenir le prix de vente ? Quel est le prix de vente de la première pièce ?
 - 3) Calculer le pourcentage de bénéfice net réalisé sur le prix de vente de la deuxième pièce, si le commerçant la vend au prix trouvé ci-dessus pour la première et si les charges sont dans les mêmes rapports.

Pourcentages par tranche.

- 17** En fin d'année, un commerçant décide d'accorder des ristournes (réductions de prix accordés par un commerçant ou remise de prix accordés par un commerçant) à ses meilleurs clients selon les volumes de ventes :

Volumes de ventes	Taux des ristournes
[10 000 ; 25 000[	2 %
[25 000 ; 50 000[	2,5 %
[50 000 ; 100 000[	3 %
[110 000 ; 200 000[	4 %
[200 000 ; 450 000[	6 %
[450 000 ; + ∞[	7 %

- 1) Calculer les valeurs des tranches et les montants des ristournes accordés sur chaque vente.
- 2) Un client apporte deux factures $F_1 = 175\,000$ UM et $F_2 = 600\,000$ UM. Calculer la ristourne totale sur F_1 et F_2 .

18 Un commerçant décide d'accorder des ristournes à sa clientèle selon le tableau suivant :

Volumes de ventes	Taux des ristournes
[15 000 ; 45 000[	3 %
[45 000 ; 90 000[	4 %
[90 000 ; 140 000[	5 %
[140 000 ; 200 000[	6,2 %
[200 000 ; 350 000[	7%
[350 000 ; 700 000[	7,2 %
[700 000 ; $+\infty$ [	7,2 %

- 1) Calculer les valeurs des tranches et les remises accordées sur chaque vente.
- 2) Un client apporte deux factures $F_1 = 125\,000$ UM ; $F_2 = 349\,000$ UM et $F_3 = 1\,000\,000$ UM. Calculer la remise totale sur F_1 ; F_2 et F_3 .

Statistique

I- Vocabulaire de la statistique

Activité

Voici une liste de notes attribuées à 30 élèves d'une terminale :

- 13 personnes ont une note comprise entre 0 et 3.
- 9 personnes ont une note comprise entre 3 et 8.
- 4 personnes ont une note comprise entre 8 et 10.
- 3 personnes ont une note comprise entre 10 et 15.
- 2 personnes ont une note comprise entre 15 et 18.

Utilise le tableau ci-dessous pour classer ses notes dans des intervalles bien déterminés.

Nombre d'élève	Intervalles de notes attribuées

Solution

Nombre d'élève	Intervalles de notes attribuées
13	0 ; 3
9	3 ; 8
4	8 ; 10
3	10 ; 15
2	15 ; 18

Le fait que tu aies classé ses notes donne la notion de statistique.

1- Définition :

D₁ : La statistique est un ensemble de données chiffrées ou non.

D₂ : La statistique est la branche de la mathématique qui consiste à regrouper les données ; à les analyser et à tirer des conclusions.

Comme toutes les sciences, la statistique fait appel à un langage spécialisé.

2- Langage statistique :

a- Notion de population et d'individu :

L'ensemble sur lequel porte l'étude statistique est appelé la population, un élément de cet ensemble est l'individu.

N.B : En statistique, les mots (population – individu) peuvent désigner des êtres ou des objets animés ou inanimés.

b- Caractères et modalités :

Dans l'étude de statistique d'une population, l'attention est portée généralement sur un événement commun à tous les membres de la population : c'est le caractère.

Exemple : Le caractère situation matrimoniale à 4 modalités : marié, divorcé, célibataire, veuf.

Il existe deux sortes de caractères : **Les caractères qualitatifs et les caractères quantitatifs.**

- **Caractères qualitatifs :**

Un caractère est dit qualitatif si ses différentes modalités ne sont pas mesurables.

Exemple : La situation matrimoniale ; le sexe, la profession, la nationalité....

- **Caractères quantitatifs :**

Un caractère est dit quantitatif si ses différentes modalités sont mesurables c'est à dire des nombres.

Exemple : l'âge, la taille, le poids.....

Un caractère quantitatif peut être discret (discontinue) ou (continue)

Un caractère quantitatif est dit discret si ses valeurs prises sont isolées.

Exemple : le nombre de frère de chaque élève, le nombre de femme.....

Un caractère quantitatif est dit continu si ses valeurs prises sont en nombre infini dans un intervalle.

Exemple : la température du corps, la taille, l'âge...;

c- Echantillon :

L'étude d'un caractère sur une grande population est parfois sensible et coûteux.

Exemple : recensement de population, enquête etc... c'est pourquoi on étudie ce caractère sur un petit groupe de cette membre de cette population : c'est l'échantillon.

II- Présentation des données statistiques :

Plusieurs méthodes sont utilisées par les organismes de la statistique pour la collecte des données statistiques. Les données ayant été recueillies et est nécessaire dans une première phase de les grouper, de les présenter sous forme de tableau et de représentation graphique.

1- Cas d'un caractère qualitatif :

a- Tableau statistique :

Exemple : l'étude du caractère situation matrimoniale sur 10 élèves d'une classe a donné le résultat suivant :

A : marié
B : Divorcé
C : Célibataire
D : Célibataire
E : Marié
F : Veuf
G : Divorcé
H : Célibataire
I : Célibataire
J : Marié

Modalité (x_i)	Nombre d'élément (n_i)
Marié	3
Célibataire	4
Divorcé	2
Veuf	1
Total	10

Le caractère situation matrimoniale à 4 modalités; on dresse un tableau à deux colonnes.

- 1^{ère} Colonne contient la nomenclature des différentes modalités. On la note x_i
- La 2^{ème} Colonne contient le nombre d'élément de chaque modalité. On la note n_i .

n_i est l'effectif relatif de la modalité x_i . C'est le nombre d'élément présentant la modalité x_i .

Exemple : $n_1 = 3, n_2 = 4, n_3 = 2, n_4 = 1$ (d'après le tableau).

Alors $N = \sum n_i = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 10$

N est appelé somme des n_i .

A ce tableau, on peut ajouter une 3^{ème} colonne ; celle des **fréquences notés f_i** tel que $f_i =$

$$\frac{n_i}{N} = \frac{\text{effectif relatif}}{\text{effectif total}}$$

Modalités	Nombre d'éléments	Fréquences
(x_i)	(n_i)	(f_i)
Marié	3	$3/10 = 0,3$
Célibataire	4	$4/10 = 0,4$
Divorcé	2	$2/10 = 0,2$
Veuf	1	$1/10 = 0,1$

Total	10	10/10 = 1
-------	----	-----------

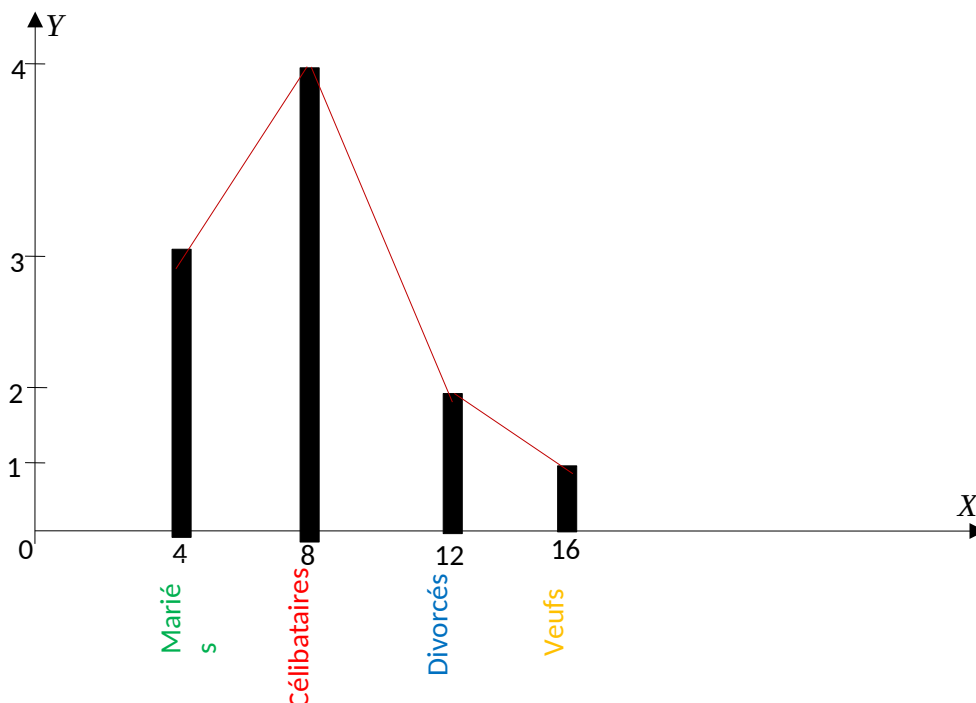
NB : la somme des fréquences est toujours égale à 1 : $\sum f_i = 1$

b- Représentation graphique :

Diagramme en bâton :

Dans un repère orthogonal, on place sur l'axe des abscisses les x_i (modalités) ; et sur l'axe des ordonnées les effectifs n_i ou les fréquences f_i .

Pour construire le diagramme en bâton des effectifs, on place les points $A_i(x_i ; 0)$ et $B_i(x_i ; n_i)$ et on construit en trait plein les segments $[A_i B_i]$.



N.B :

Si les fréquences f_i étaient en ordonnée, le diagramme est appelé diagramme en bâton des fréquences. Le polygone des effectifs est la ligne brisée reliant les extrémités des bâtons dans le diagramme (Voir figure ci-dessus).

D'une manière générale, la ligne polygonale obtenue en joignant les différents points $B_i(x_i ; n_i)$

Diagramme en secteur circulaire :

Soit le demi - cercle (C) ; représentons la série précédente sur (C). Chaque modalité est représenté par un secteur angulaire proportionnel à son effectif α_i tel que $\alpha_i = f_i \times 180^\circ$.

Marié : $\alpha_1 = 0,3 \times 180^\circ \Rightarrow \alpha_1 = 54^\circ$

Célibataire : $\alpha_2 = 0,4 \times 180^\circ \Rightarrow \alpha_2 = 72^\circ$

Divorcé : $\alpha_3 = 0,2 \times 360^\circ \Rightarrow \alpha_3 = 72^\circ$

Veuf : $\alpha_4 = 0,1 \times 360^\circ \Rightarrow \alpha_4 = 36^\circ$

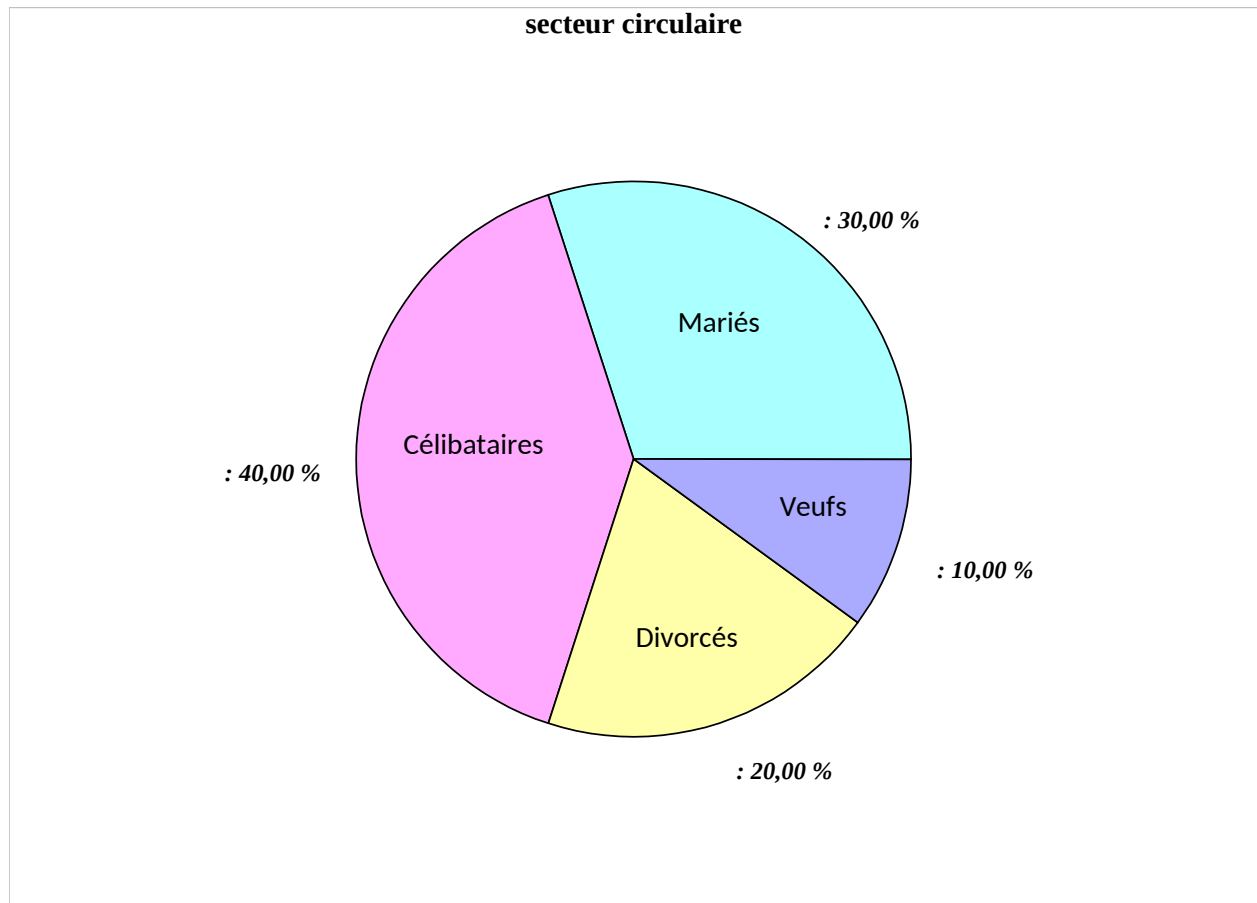
NB : pour le cercle tout entier le secteur angulaire α_i est : $\alpha_i = f_i \times 360$

$\alpha_1 = 108^\circ$

$\alpha_2 = 144^\circ$

$\alpha_3 = 72^\circ$

$\alpha_4 = 36^\circ$



2- Cas d'un caractère quantitatif discret :

a- Etude du caractère nombre de frère dans un tableau statistique

L'étude du caractère nombre de frère dans une classe de 12^e a donné les résultats suivants : 4 ; 2 ; 2 ; 1 ; 3 ; 2 ; 3 ; 3 ; 2 ; 1.

Regrouper ces données dans un tableau statistique.

Modalités x_i	Effectif n_i	Fréquence f_i	Effectif cumulé croissant	Effectif cumulé décroissant	Fréquence croissante	Fréquence Décroissante
1	2	0,2	2	10	0,2	1

2	4	0,4	6	8	0,6	0,8
3	3	0,3	9	4	0,9	0,4
4	1	0,1	10	1	1	0,1
Total	10	1	/	/	/	/

Le regroupement en tableau se fait de la même manière que les caractères qualitatifs. La seule différence est que les modalités sont des nombres s'écrivant dans l'ordre croissant. A ce tableau, on peut ajouter les colonnes, les effectifs cumulés croissants et décroissants ainsi que les fréquences cumulés croissantes et de décroissantes. Les valeurs du caractère étant rangées dans l'ordre croissant, on appelle :

- **Effectif cumulé croissant de x_i :**

La somme des modalités inférieures ou égales à x_i c'est-à-dire :

$$n_i = (n_1 + n_2) + \dots + n_i$$

$$n_1 = n_1 = 2$$

$$n_2 = n_1 + n_2 + n_3 = 2 + 4 = 6$$

$$n_3 = n_1 + n_2 + n_3 = 2 + 4 + 3 = 9$$

$$n_4 = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 2 + 4 + 3 + 1 = 10 \text{ et la fréquence croissante cumulée est } f_i = \frac{n_i}{N} = 10$$

- **Effectif cumulé décroissant de x_i :**

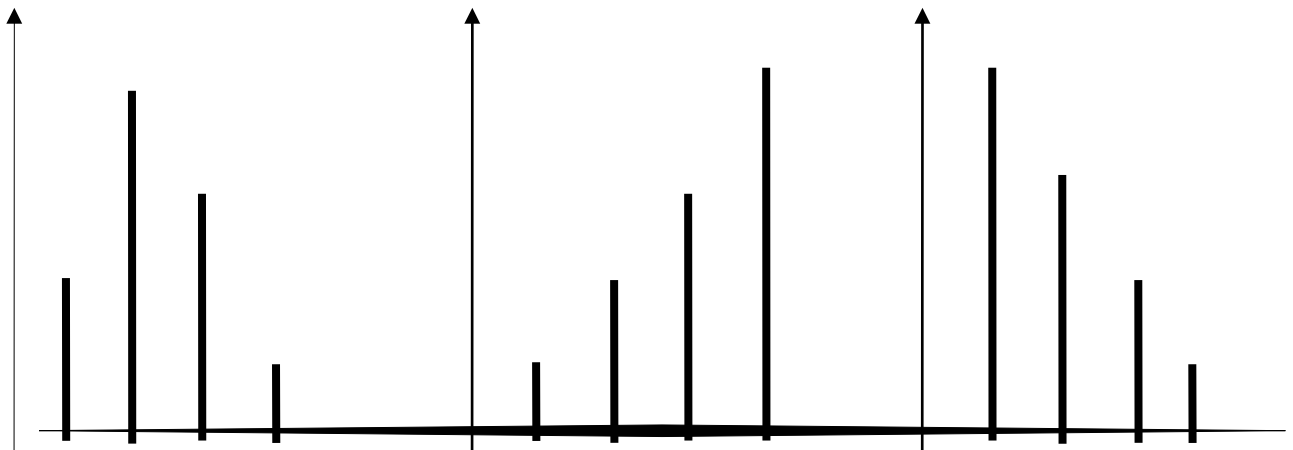
On appelle effectif cumulé décroissant de la modalité x_i , la somme des modalités qui le succède ;

c'est-à-dire $n_i = n_i + n_{i+1} + \dots + n_k$ et la fréquence cumulée décroissante est : $f_i = \frac{n_i}{N}$

b- Diagramme en bâton des effectifs cumulés :

Dans un repère orthogonal, on place sur l'axe des abscisses les x_i (modalités) ; et sur l'axe des ordonnées les effectifs n_i cumulés croissants ou décroissants.

Pour construire le diagramme en bâton des effectifs cumulés croissants ou décroissants, on place les points $A_i(x_i ; 0)$ et $B_i(x_i ; n_i)$ et on construit en trait plein les segments $[A_i B_i]$.





3- Cas des caractères quantitatifs continus :

a- Tableau statistique :

Dans le cas d'un caractère quantitatif continu, les valeurs du caractère sont regroupées dans un intervalle de même amplitude $[x_i; x_{i+1}[$ soit appelées des classes.

Exemple : l'étude du caractère taille sur 30 élèves d'une classe de 12^e a donné les résultats suivants en cm :

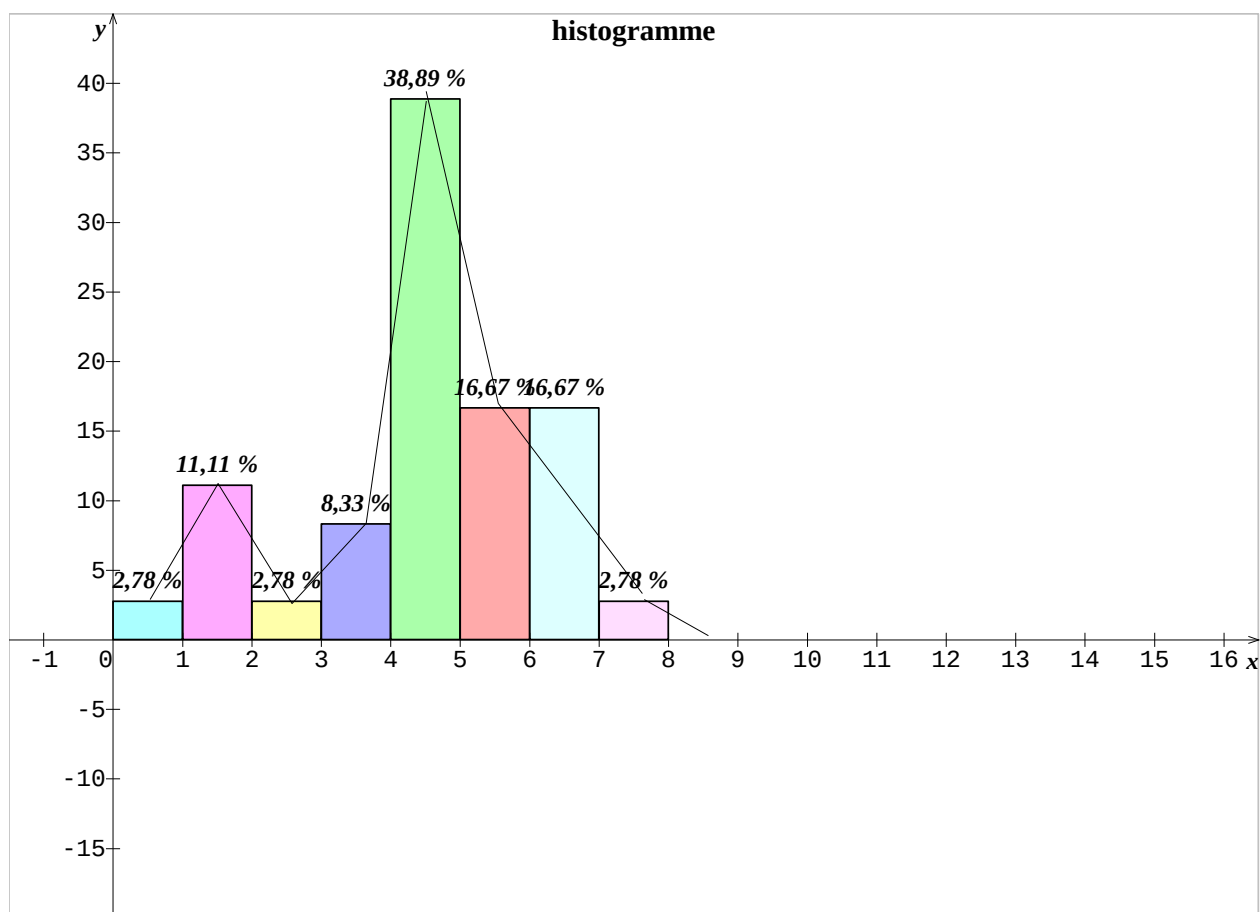
175	165	172	171	168
170	178	170	171	173
170	170	168	150	160
165	175	179	180	170
173	165	168	176	150
174	158	153	144	172

Dresser le tableau des effectifs et des fréquences cumulées.
Prenons des classes d'amplitude 6.

Classes	Effectif	Centre des classes	n_i	n_i croissante	f_i
$[X_i; X_{i+1}[$	n_i	c_i			
$[144; 150]$	1	147	1	30	0,633
$[150; 156]$	4	153	5	29	0,166
$[156; 162]$	1	159	6	25	0,2
$[162; 168]$	3	165	9	24	0,3
$[168; 174]$	14	171	23	21	0,76
$[174; 180]$	6	177	29	7	0,966
$[180; 186]$	1	183	30	1	1
Total	30	—	—	—	—

On appelle centre (c_i) de la classe (x_i, x_{i+1}) le nombre $c_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$
 Pour les calculs, nous conviendrons de prendre la valeur c_i commune à tous les individus de la classe (x_i, x_{i+1})

Histogramme des effectifs (représentation graphique)



Dans un repère cartésien, les valeurs des bornes de classe sont portées en abscisse et les effectifs (ou fréquence) sont portés en ordonnées.

Pour chaque classe $[x_i; x_{i+1}[$, on trace le rectangle de base $[x_i; x_{i+1}[$, et de hauteur $(n_i$ ou $f_i)$. La représentation graphique obtenue est appelée : **Histogramme des effectifs ou des fréquences**.

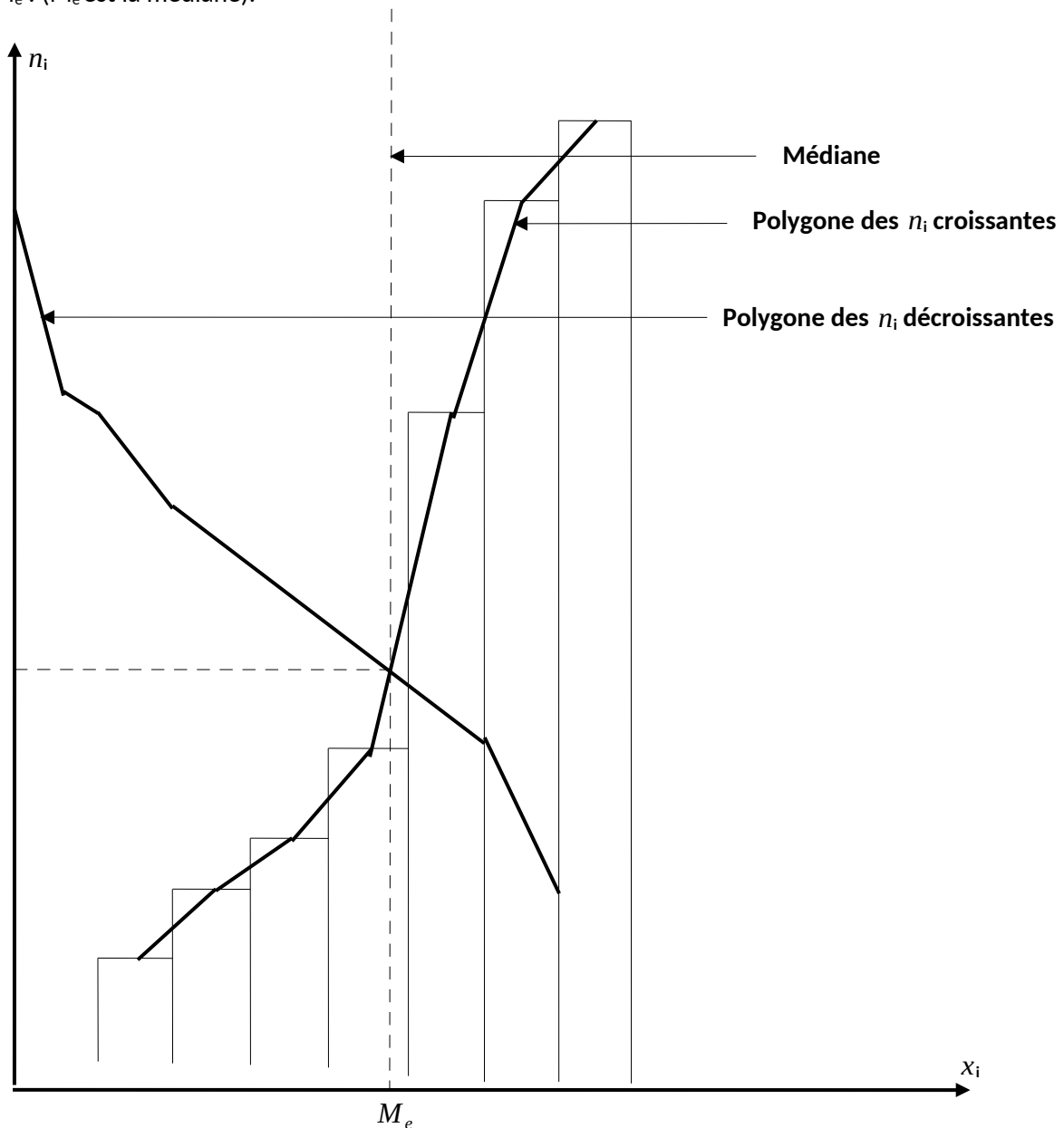
Les polygones :

On appelle polygones les effectifs, la ligne brisée joignant les points $(c_i ; n_i)$.

On appelle polygone des effectifs cumulés croissants, la ligne brisée passant par les points d'abscisse et d'ordonnées $(x_{i+1} ; n_i)$.

On appelle polygone des effectifs cumulés décroissants, la ligne bisée joignant les points de coordonnées $(x_i ; n_i)$ ↘

Les deux polygones des effectifs cumulés croissant et décroissant se coupent en un point d'abscisse M_e : (M_e est la médiane).



III- Les éléments caractéristiques d'une série :

1- Les caractéristiques de position :

a- Le mode ou dominantes :

Le mode d'une série statistique est la valeur du caractère qui a le plus grand effectif (ou fréquence). On le note M_o .

Exemple : Déterminer le mode de la série suivante :

10, 7, 8 ; 5, 2, 7 ; 4, 4, 5 ; 7, 10

Ici : le mode est 7 (car 7 est compté plus que les autres)

b- La médiane d'une série :

Définition : La médiane d'une série est la valeur du caractère qui divise la série en deux séries de même effectif. On la note M_e .

Exemple 1 : soit la série suivante :

11, 7, 8, 3, 5, 6, 2

Déterminer la médiane. Pour cela écrivons la série dans l'ordre croissant :

2, 3, 5, 6, 7, 8, 11

La médiane est donc $M_e = 6$

Exemple 2 : soit la série suivante : 12, 3, 5, 7, 8, 6, 11, 4

Déterminer la médiane de cette série :

3, 4, 5, 6, 7, 8, 11, 12. Par convention.

Ici la médiane est $M_e = \frac{6+7}{2} = 6,5$

La médiane d'une série statistique est la valeur du caractère qui correspond à l'effectif cumulé

$$n_i = \frac{N}{2}$$

NB :

N désignant les valeurs de la série statistique rangée dans l'ordre croissante, on a :

-Si N est impaire, la médiane correspond à la valeur de rang $\frac{N+1}{2}$

-Si N est paire, la médiane correspond à la valeur de rang $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2} + 1$

Détermination de la médiane dans le cas d'un caractère continu.

Exemple :

Déterminer la médiane dans la distribution des tailles de classe de 12^{ème} dont les données sont dans le tableau en 3°).

$$\frac{N}{2} = 15$$

La médiane M_e correspond à l'effectif cumulé

$M_e \in [168 ; 174[$ est la classe médiane.

$x_i : 168 < M_e < 174$

$n_i : 9 < 15 < 23$

$$\frac{M_e - 168}{174 - 168} = \frac{15 - 9}{23 - 9} \Rightarrow M_e = 170,57$$

c- Moyenne arithmétique d'une série :

Définition : La moyenne arithmétique d'une série est le quotient de la somme de ces valeurs par l'effectif total. Si $x_1, x_2, \dots, x_k$ sont les valeurs et $n_1, n_2, \dots, n_k$ sont les effectifs alors la moyenne est notée :

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{N} = \frac{1}{N} \sum_i n_i x_i$$

NB : Dans le cas d'un caractère continu, les x_i sont remplacés par les c_i (centre de classe $[x_i, x_{i+1})$)

Exemple : Soit le tableau statistique donné par :

x_i	n_i	$n_i \times x_i$
7	1	7
8	3	24
9	5	45
10	4	40
11	2	22
12	2	24
13	4	52
14	1	14
15	2	30
16	0	0
17	1	17
Total	25	275

2- Les caractéristiques de dispersion :

a- Amplitude ou étendue d'une série :

L'amplitude d'une série est la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur du caractère.

Exemple : Déterminer l'amplitude des séries suivantes :

- a) - 5 ; 4 ; 3 ; 1 ; 10 ; 12 / Rep. : $(12) - (-5) = 12 + 5 = 17$
- b) 5 ; 10 ; 9 ; 20 ; 40 ; 30 ; 8 / Rep : $(40) - (5) = 40 - 5 = 35$

b- Les quartiles

Les valeurs du caractère étant rangées dans l'ordre croissant ou décroissant, on appelle quartiles les 3 valeurs qui divisent la série en 4 groupes de même effectifs : on note : Q_1 ; Q_2 ; Q_3 ces 3 valeurs

Exemple : Déterminer les quantiles de la série suivante :

9 ; 12 ; 5 ; 11 ; 7 ; 15 ; 1 ; 2 ; 18 ; 20 ; 16 ; 19 ; 30 ; 40 ; 34

Rep : 1, 2 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11 ; 12 ; 15 ; 16 ; 18 ; 19 ; 20 ; 30 ; 34 ; 40

Q_1

Q_2

Q_3

Déterminer les quantiles de la série suivante : ci-dessus. On a donc $Q_1 = 7$; $Q_2 = 15$; $Q_3 = 20$
 Q_2 est la médiane, il est appelé quantile centrale
 Q_1 et Q_3 sont les quantiles extrémités

NB : Q_1 est la valeur du caractère qui correspond à l'effectif cumulé $n_i = \frac{N}{4}$

Q_3 est la valeur du caractère qui correspond à l'effectif cumulé $n_i = \frac{3N}{4}$
 $Q_3 - Q_1$ est l'écart interquartile

$$\frac{Q_3 - Q_1}{Q_2}$$

Est l'écart interquartile relatif.

c- Variance ou fluctuation :

La variance d'une série est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne c'est-à-dire :

Si $x_1, x_2, \dots, x_k$ sont les valeurs du caractère et $n_1; n_2; \dots, n_k$ les effectifs. La

variance est notée : $V = \frac{1}{N} \sum_i n_i x_i^2 - (\bar{x})^2$ ou encore on la note : $V = \frac{1}{N} \sum_i (n_i x_i - \bar{x})^2$

d- L'écart type :

C'est la racine carrée de la variance, on la note σ tel que $\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_i n_i x_i^2 - (\bar{x})^2}$

EXERCICE 1 :

Soit le tableau de la série statistique correspondant aux pointures des chaussures de 48 élèves.

x_i	n_i
36	5
37	11
38	12
39	8
40	4
41	3
42	4
43	1

- 1) Quelle est la population ?
- 2) le caractère étudié ?
- 3) Déterminer le mode
- 4) Déterminer la pointure moyenne

Solution

- 1- La population est un ensemble d'élèves.
- 2- Le caractère est : la pointure des chaussures.
- 3- Le mode est : 38

4- La moyenne des pointures :

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i x_i$$

$$\bar{x} = \frac{1849}{48} \Rightarrow \bar{x} = 38,52$$

=>

X_i	n_i	$n_i X_i$	X_i^2	$n_i X_i^2$
36	5	180	1296	6480
37	11	407	1369	15059
38	12	456	1444	17328
39	8	312	1521	12168
40	4	160	1600	6400
41	3	123	1681	5043
42	4	168	1761	7056
43	1	43	1849	1849
Total		1849		71383

EXERCICE 2 :

A l'occasion d'un concours de pêche, les 250 poissons pêchés ont été mesurés et leurs tailles ont été regroupées dans le tableau suivant :

Classe des tailles (cm)	Effectifs	n_i	c_i	$n_i \quad c_i$
[10, 20[	16	16	15	240
[20, 30[	26	42	25	1050
[30, 40[	36	78	35	2730
[40, 50[	52	130	45	5850
[50, 60[	38	168	55	9240
[60, 70[	30	198	65	12870
[70, 80[	20	218	75	16350
[80, 90[	12	230	85	19530
[90, 100[	10	240	95	22800
[100, 110[	6	246	105	25830
[110, 120[	4	250	115	28750

N.B : Les parties complétées sont :

n_i : $n_1 = 16$; $n_2 = 16 + 26 = 42$; $n_3 = 16 + 26 + 36 = 78$

c_i : $c_1 = \frac{10 + 20}{2} = 15$; $c_2 = \frac{20 + 30}{2} = 25$; $c_3 = \frac{30 + 40}{2} = 35$

$n_i \quad c_i$: $n_1 \quad c_1 = 16 \times 15 = 240$; $n_2 \quad c_2 = 42 \times 25 = 1050$; $n_3 \quad c_3 = 78 \times 35 = 2730$

Évaluation

- a- compléter le tableau :
- b- déterminer la population, le caractère et la nature du caractère
- c- déterminer les quartiles
- d- déterminer la moyenne et l'écart type.

Solution

a- Complétons le tableau (voir tableau)

b- La population : les poissons

- le caractère : la taille
- nature du caractère : caractère quantitatif continu

c- Déterminons les quartiles :

$$Q_1 n_i = \frac{N}{4} = \frac{250}{4} = 62,5 \text{ alors } Q_1 \in [30, 40[\quad \Leftrightarrow 42 < 62,5 < 78$$
$$\frac{Q_1 - 30}{40 - 30} = \frac{62,5 - 42}{78 - 42} \Leftrightarrow \frac{Q_1 - 30}{10} = 0,56 \Rightarrow Q_1 = 35,6 \quad \text{or le } n_i =$$

$$\frac{N}{2} = \frac{250}{2} = 125 \Leftrightarrow 40 < Q_2 < 50$$

$$n_i = \frac{3N}{4} = \frac{3 \times 250}{4} = 187,5$$
$$Q_3 \in [60 - 70[$$

d- Déterminons la moyenne et l'écart type

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i x_i \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \frac{1}{250} \times 13090 = 52,36$$

L'écart type :

$$\begin{aligned} \text{- Variance } V &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 - (\bar{x})^2 = \frac{1}{250} \times (1063064) - (52,36)^2 \\ \text{- Ecart type : } \sigma &= \sqrt{V} = \sqrt{1510,6864} = 38,86 \end{aligned}$$

$$\sigma = 38,86$$

IV- Série statistique à deux caractères x et y

1- Nuage de points associé :

Le plan étant muni d'un repère orthogonal, on appelle nuage de points associé, l'ensemble des points M_{ij} de coordonnées (x_i, y_i) .

2- Point moyen d'un nuage de points :

On appelle point moyen d'un nuage de points représentant une série, le point G de coordonnées $(X_G ; Y_G)$ où

$$\begin{cases} X_G = \bar{X} = \frac{\sum x_i}{N} \\ \text{et} \\ Y_G = \bar{Y} = \frac{\sum y_i}{N} \end{cases}$$

3- Covariance :

La covariance d'une série statistique à deux caractères x et y, de moyennes respectives $\bar{x}$ et $\bar{y}$ et d'effectif total N est le nombre réel noté $\text{Cov}(X, Y)$ ou $\sigma_{x,y}$ tel que :

$$\text{Cov}(x,y) = \frac{\sum n_{ij}(x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})}{\text{Effectif total}}$$

ou

$$\text{Cov}(x,y) = \frac{\sum n_{ij} x_i y_i}{\text{Effectif total}} - \bar{X} \cdot \bar{Y}$$

4- Droit de régression de y en x :

La droite (D) de régression de y en fonction de x passe par le point G $(\bar{X}, \bar{Y})$, point moyen du nuage de point son équation est $y = ax + b$ avec :

$$a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)} \text{ et } b = \bar{Y} - a \bar{X}$$

où V(X) est la variance et a pour formule : $V(X) = \frac{\sum X_i^2}{N} - \bar{X}^2$

5- Droite de régression de X en Y :

La droite (D') de régression de X en fonction de Y passe par le point G $(\bar{X} ; \bar{Y})$, point moyen du nuage de point. Son équation est $x = a'y + b'$ avec :

$$a' = \frac{Cov(X, Y)}{V(Y)} \text{ et } b' = \bar{X} - a\bar{Y}$$

$$\text{où } V(Y) \text{ est la variance et a pour formule : } V(Y) = \frac{\sum Y_i^2}{N} - \bar{Y}^2$$

Remarque :

$G(\bar{X} ; \bar{Y})$ appartient aux deux droites de régression pour tracer ces droites, il suffit donc de déterminer un autre point vérifiant l'équation.

6- Corrélation linéaire

Deux variables statistiques X et Y sont dites en corrélation linéaire lorsque la courbe de régression de Y en X et la courbe de régression de X en y sont des droites.

7- Coefficient de corrélation linéaire :

a) Définition :

On appelle coefficient de corrélation linéaire d'une série statistique double de caractère (X ; Y), le nombre réel **r** définie par $\mathbf{r} = \frac{Cov(X ; Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}}$

b) Propriétés de r :

P₁ : Si $0,87 \leq |r| \leq 1$, on considère que la corrélation linéaire entre les deux variables est forte.

P₂ : si $r = 1$, on dit que la corrélation est parfaite.

8- Estimation et prévision

Lorsqu'il existe une bonne corrélation linéaire, il est possible de prévoir la valeur de y connaissant celle de x, en utilisant l'équation de la droite de régression de y en x ; et vice - versa.

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Un pharmacien observe, durant les 6 premiers mois de l'ouverture de son officine, le chiffre d'affaire en millions de francs CFA. Le résultat de l'observation est résumé dans le tableau suivant où x désigne le numéro du mois et y le chiffre d'affaires - correspondant.

X	1	2	3	4	5	6
Y	12	13	15	19	21	22

1- Calculer $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ les moyennes des variables X et Y.

- 2- Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique double ainsi que le point G. on prendra : (Unités : 2 cm en abscisses et 1 cm pour 2 unités en ordonnées).
- 3- Calculer la variance $V(X)$ de x et la covariance $Cov(X,Y)$ de x et y .

N.B : Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

- 4- Démontrer qu'une équation de la droite de régression (D) de y en x est : $y = \frac{78}{35}x + 9,2$
- 5- Tracer la droite (D).
- 6- En utilisant la droite (D), calculer une estimation du chiffre d'affaires de cette pharmacie à la fin du 7^{ème} mois.

Exercice 2 :

En prévision du lancement d'un nouveau produit, une société a effectué une enquête auprès de clients éventuels pour fixer le prix de vente (en milliers de francs) de ce produit. Les résultats sont donnés dans le tableau ci - dessous.

Prix de vente en milliers de francs x_i	9	10	11	12	14	15	16	17
Nombre d'acheteurs potentiels y_i	180	160	150	130	100	90	80	70

- 1- Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique. On prendra pour unité :
1 cm pour 1000 francs en abscisse
1 cm pour 10 acheteurs en ordonnée.
- 2- Déterminer les coordonnées du point G
- 3- Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r puis interpréter le résultat obtenu.
- 4- Déterminer une équation de la droite (D) de régression de y en x . Tracer (D)
- 5- Estimer graphiquement le prix maximum à fixer pour qu'il y ait au moins 50 acheteurs potentiels.
- 6- En utilisant l'équation de la droite (D) de régression de y en x , puis déterminer :
 - a) Le nombre d'acheteurs à prévoir si le prix est fixé à 13 000 F
 - b) Le prix à fixer pour que le nombre d'acheteurs potentiels soit supérieur à 250.

Solution

Exercice 1

Pour le calcul, on pourra s'aider du tableau ci-dessous :

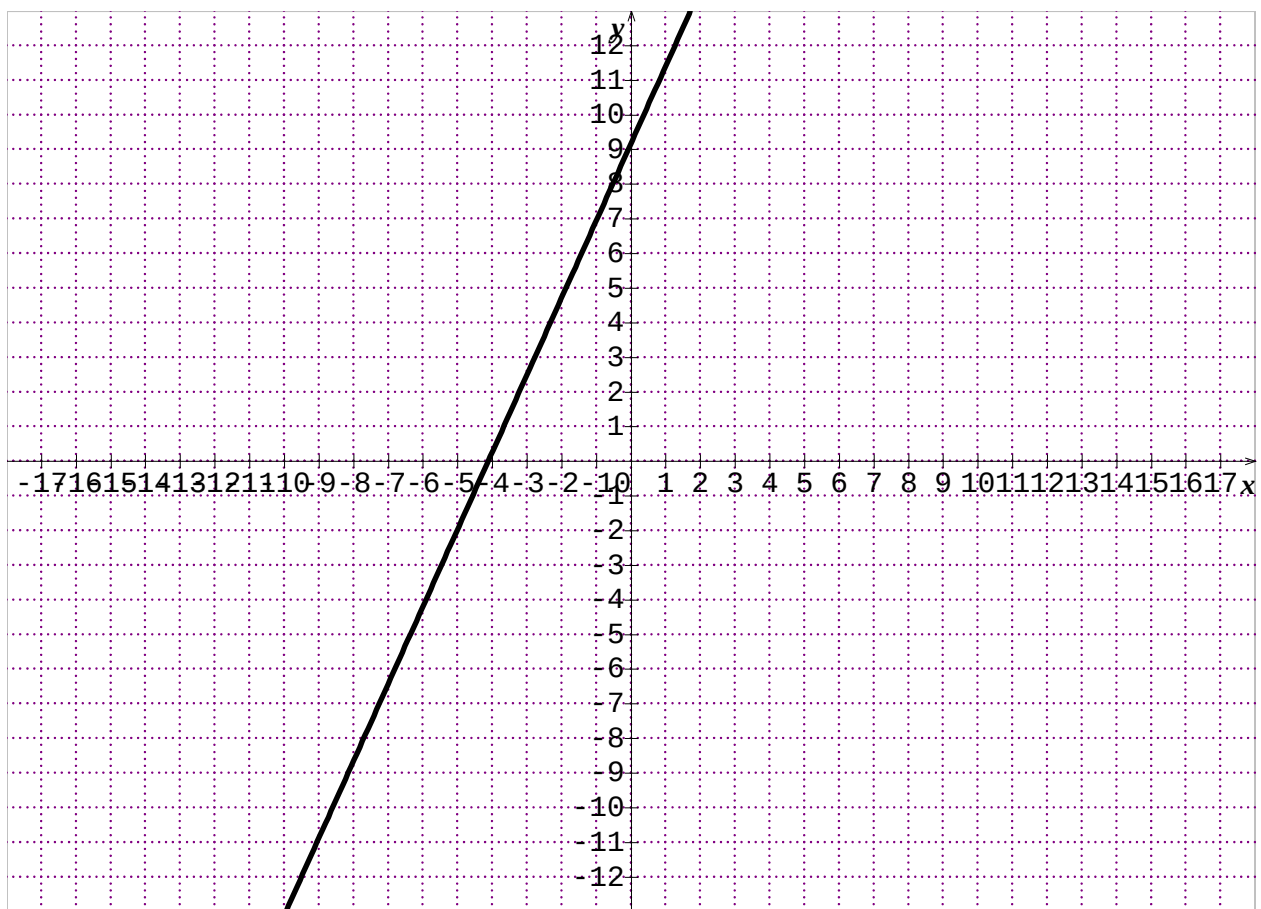
X_i	Y_i	X_i, y_i	X_i^2	Y_i^2	
1	12	12	1	144	
2	13	26	4	676	

3	15	45	9	225	
4	19	76	16	361	
5	21	105	25	441	
6	22	132	36	484	
21	102	396	91	2 331	Total

1- Calcul de $\bar{X}$ et $\bar{Y}$ les moyennes des variables x et y.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^6 x_i}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3,5 \quad ; \quad \bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^6 y_i}{6} = \frac{102}{6} = 17$$

2- Le nuage de points de la série statistique ainsi que le point moyen G.



1- Calcul de la variance $V(x)$ de x et la covariance $\text{Cov}(x, y)$ de x et y.

$$V(X) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{70}{24} = \frac{35}{12} \quad ; \quad \text{cov}(X; Y) = \frac{396}{6} - \left(\frac{7}{2} \times 17\right) = \frac{39}{6} = \frac{13}{2}$$

2- Montons qu'une équation de la droite de régression (D) de y en x est : $y = \frac{78}{35}x + 9,2$

$$a = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{35}{12}} = \frac{13}{2} \times \frac{12}{35} = \frac{156}{70} = \frac{78}{35} \text{ et } b = \bar{Y} - a\bar{X} = 17 - \frac{78}{35} \times \frac{7}{2} = 9,2$$

donc l'équation de la droite de régression est : $y = \frac{78}{35}x + 9,2$

3- Tracé de la droite (D). (Voir nuage de points)

La droite (D) passe par le point moyen point G (3,5 ; 17) et par un autre point que l'on détermine en remplaçant dans l'équation de la droite de régression, x par une valeur que l'on choisira.

Par exemple, si x = 0, on obtient y = 9,2. (D) passe donc également par le point A(0 ; 9,2).

4- Calcul d'une estimation du chiffre d'affaires de cette pharmacie à la fin du 7^{ème} mois.

Le 7^{ème} mois correspond à x = 7. Il s'agit de déterminer la valeur de y associée à cette valeur de x.

Pour x = 7, on a : $y = \frac{78}{35} \times 7 + 9,2 = 24,8$ millions de francs CFA.

3°) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r. interpréter le résultat obtenu.

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= \frac{\sum X_i \cdot Y_i}{n} - \bar{X} \cdot \bar{Y} \\ &= \frac{9 \times 180 + 10 \times 160 + 11 \times 150 + 12 \times 130 + 14 \times 100 + 15 \times 90 + 16 \times 80 + 17 \times 70}{8} - \end{aligned}$$

13x120

$$\text{Cov}(X, Y) = -103,75$$

$$r = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}}$$

$$V(X) = \frac{\sum X_i^2}{N} - \bar{X}^2 = \frac{9^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2 + 14^2 + 15^2 + 16^2 + 17^2}{8} - 13^2$$

$$V(X) = 7,499$$

$$V(Y) = \frac{\sum Y_i^2}{N} - \bar{Y}^2 = \frac{180^2 + 160^2 + 150^2 + 130^2 + 100^2 + 90^2 + 80^2 + 70^2}{8} - 120^2$$

$$V(X) = 1450,003$$

$$r = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}} = \frac{-103,75}{\sqrt{7,499 \times 1450,003}} = -0,995$$

$0,87 \leq |r| \leq 1$: il existe alors une forte corrélation linéaire entre les variables X et Y. L'on peut donc faire un ajustement linéaire entre X et Y.

4°) Equation de la droite (D) de régression de y en x.

$$(D) : y = ax + b$$

$$a = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{-103,75}{7,499} = -13,88$$

$$\bar{Y} = a\bar{x} + b \Rightarrow b = \bar{y} - a\bar{x} = 120 - (-13,88) \times 13 = 199,83$$

$$(D) : y = -13,88x + 299,83$$

Tracé de (D) : (D) passe par le point moyen G(13,120), déterminons un second point en remplaçant par exemple x par 10. On trouve y = 161,03. On obtient : A (10 ; 161,03)

5°) Pour qu'il y ait au moins 50 acheteurs potentiels, on lit graphiquement que le prix à fixer ne doit pas dépasser 18 000 francs.

6°) a°) Le nombre d'acheteurs à prévoir, si le prix est fixé à 13 000 F, correspond à x = 13
 $y = -13,88 \times 13 + 299,83 = 119,39 \simeq 119$

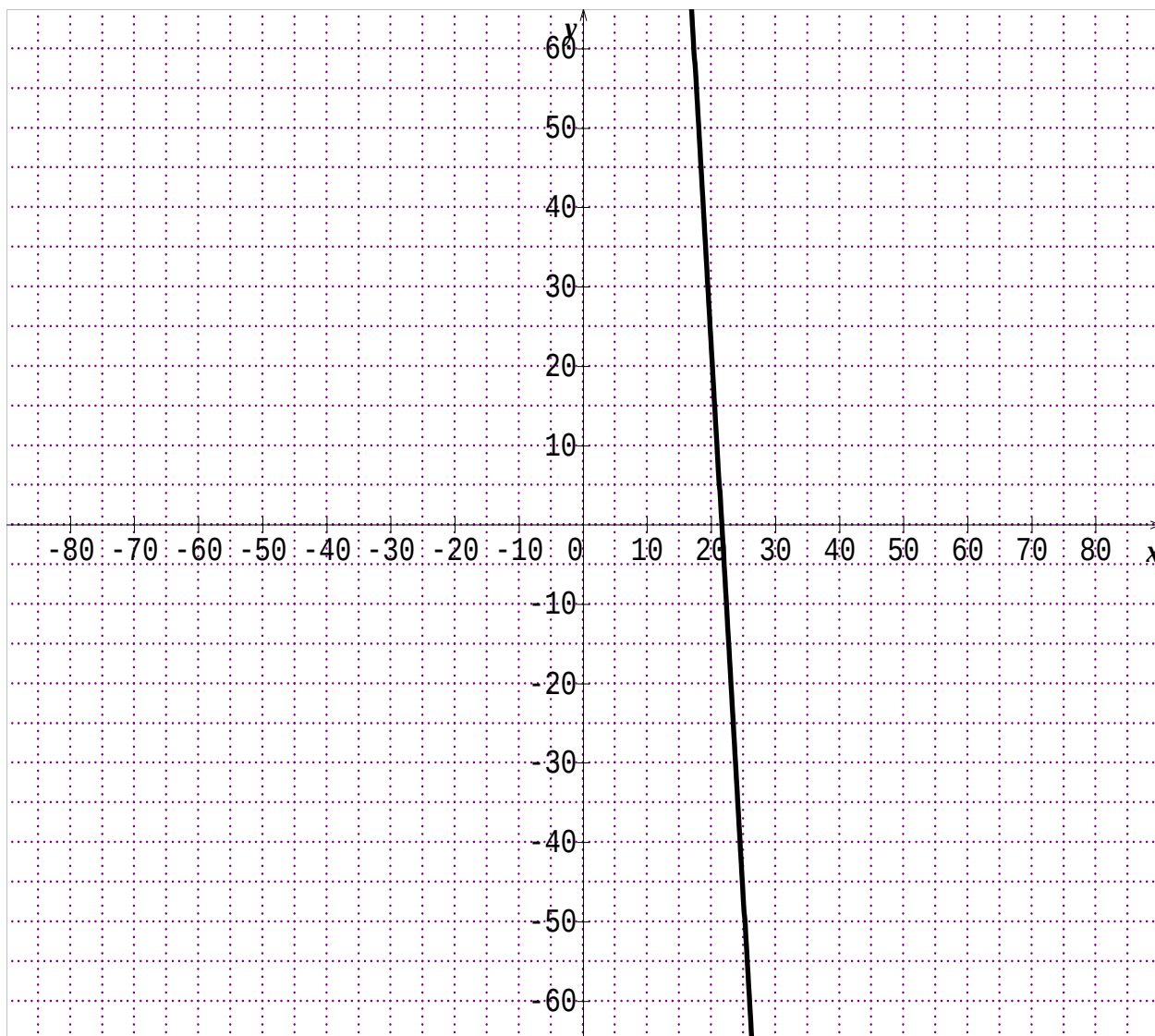
b°) Il s'agit de déterminer x pour y = 250.

$$y = -13,88x + 299,83 \Rightarrow x = \frac{y - 299,83}{-13,88}$$

$$\text{Pour } y = 250, \text{ on a : } x = \frac{250 - 299,83}{-13,88} = 3,59 \text{ milliers de francs} = 3590 \text{ F}$$

Exercice 2 :

- 1- Représentation graphique du nuage de points de cette série statistique (unité : 1 cm pour 1000 francs en abscisse, 1 cm pour 10 acheteurs en ordonnée).



2- Déterminons les coordonnées du point G.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^8 x_i}{8} = \frac{9+10+11+12+14+15+16+17}{8} = 13$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^8 y_i}{8} = \frac{180+160+150+130+100+90+80+70}{8} = 120$$

} $\Rightarrow G(13 ; 120)$

3-Détermination du coefficient de corrélation linéaire r .

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov} = \frac{\sum X_i \cdot Y_i}{N} - \bar{X} \cdot \bar{Y}$$

$$\Rightarrow \text{Cov}(X, Y) = \frac{9 \cdot 180 + 10 \cdot 160 + 11 \cdot 150 + 12 \cdot 130 + 14 \cdot 100 + 15 \cdot 90 + 16 \cdot 80 + 17 \cdot 70}{8} - 13 \cdot 120$$

$$\text{Cov}(X, Y) = -103,75$$

$$r = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}}$$

$$V(X) = \frac{\sum X_i^2}{N} - \bar{X}^2 = \frac{9^2 + 10^2 + 11^2 + 12^2 + 14^2 + 15^2 + 16^2 + 17^2}{8} - 13^2$$

$$V(X) = 7,499$$

$$V(Y) = \frac{\sum Y_i^2}{N} - \bar{Y}^2 = \frac{180^2 + 160^2 + 150^2 + 130^2 + 100^2 + 90^2 + 80^2 + 70^2}{8} - 120^2$$

$$V(Y) = 1450,003$$

$$r = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X) \cdot V(Y)}} = \frac{-103,75}{\sqrt{7,499 \cdot 1450,003}} = -0,995$$

$0,87 \leq |r| \leq 1$: il existe alors une forte corrélation linéaire entre les variations X et Y. linéaire
L'on peut donc faire un ajustement linéaire entre X et Y.

4-Equation de la droite (D) de régression de Y en X

$$(D) : y = ax + b$$

$$A = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{-103,75}{7,499} = -13,88$$

Alors on a $\bar{y} = a\bar{x} + b \Rightarrow b = \bar{y} - a\bar{x} = 120 - (-13,88) \times 13 = 299,83$

(D) : $y = -13,88x + 299,83$

Tracé de (D) : (D) passe par le point moyen G (13 ; 120). Déterminons un second en remplaçant par exemple x par 10. On trouve y = 161,03. On obtient : A (10 ; 161,03)

5- Pour qu'il ait au moins 50 acheteurs potentiels, on lit graphiquement que le prix à fixer ne doit pas dépasser 18000 francs.

6- a) le nombre d'acheteurs à prévoir, si le prix est fixé à 13000 F, correspond à $x = 13$.

$$Y = -13,88 \times 13 + 299,83 = 119,39$$

b) il s'agit de déterminer x pour y = 250

$$Y = -13,88x + 299,83 \text{ alors } x = \frac{y - 299,83}{-13,88}$$

$$\text{Pour } y = 240, \text{ on a : } x = \frac{250 - 299,83}{-13,88} = 3,59 \text{ milliers de franc} = 3590 \text{ F}$$

EXERCICES

EXERCICE 1 :

Soit tableau de la série statistique correspondant aux pointures des chemises de 48 militaires.

x_i	36	37	38	39	40	41	42	43
n_i	5	11	12	8	4	3	4	1

- 1) Déterminer la population et le caractère étudié.
- 2) Déterminer le mode des chemises
- 3) Calculer la pointure moyenne des chemises
- 4) Calculer la variance et l'écart – type de cette série.

EXERCICE 2 :

L'étude statistique faite sur la taille des voitures de la société Renault a donné les résultats suivants :

Classes $[x_i ; x_{i+1}[$	[144 ; 150[	[150 ; 156[	[156 ; 162[	[162 ; 168[	[168 ; 174[	[174 ; 180[	[180 ; 186[
Effectifs n_i	1	4	1	3	14	6	1

- 1) Dresser el tableau des centres ci .
- 2) Dresser le tableau des effectifs et des fréquences cumulées (croissants et décroissants).
- 3) En déduire l'histogramme des effectifs (n_i) puis celle effectifs (n_i et n_i).

EXERCICE 3 :

Soit la série suivante : 3 ; 8 ; 7 ; 11 ; 5 ; 13 ; 15 ; 10 ; 2 ; 17 ; 1 ; 20 ; 12.

- 1) Déterminer la médiane et les quartiles.
- 2) Faites la représentation en boîte de cette série.

EXERCICE 4 :

Une agence de voyage propose 21 voyages organisés dont voici les tarifs en euros :

152 ; 320 ; 250 ; 320 ; 137 ; 183 ; 137 ; 152 ; 244 ; 122 ; 190 ; 139 ; 202 ; 285 ; 137 ; 180 ; 143 ; 190 ; 137 ; 180 ; 190.

- 1) Calculer la moyenne et l'écart type de la série des prix. Quel est le premier et le troisième quartile, la médiane ?
- 2) Ne rentrant pas dans ses frais, l'agence hésite entre deux solutions : augmenter tous les tarifs de 190 euros ou doubler tous les tarifs. Donner pour chacune des solutions la moyenne et l'écart – type de la nouvelle série des prix. Que deviennent les quartiles et la médiane ?
- 3) Une des deux solutions est – elle plus avantageuse financièrement pour l'agence ? Tracer les deux diagrammes en boîte correspondants.

EXERCICE 5 :

Lors d'un concours d'entrée à l'école statistique, la moyenne générale des 600 candidats a été de 11,4 sur 20. Il y a 300 places au concours. Hélène a eu une moyenne de 12. Pourtant elle a échoué. Expliquer ce résultat.

EXERCICE 6 :

Une série statistique a pour effectif 40. Sa moyenne est égale à 15,75 et son écart – type à 11,438. On ajoute à cette série une 41^{ème} valeur égale à 18. Calculer la moyenne et l'écart – type de la nouvelle série.

EXERCICE 7 :

On a relevé le montant en euros de 100 chèques déposés dans un commerce dans une journée. Voici le tableau obtenu : les chèques ont été regroupés en fonction de leur montant par classes dont l'amplitude est 15 euros.

Montant des chèques	effectif	Fréquence	Fréquence cumulée croissante
[0,15[	20		
[15,30[	9		
[30,45[	19		
[45,60[	27		
[60,75[	18		
[75,90[	6		
[90,105[	1		
Total			

- 1) compléter le tableau
- 2) soit s le montant de l'ensemble des 100 chèques. Donner un encadrement de S . En déduire un intervalle I tel que le montant moyen des chèques appartienne à I .
- 3) pour estimer la moyenne d'une série statistique où les valeurs ont été regroupées en classes de même amplitude, on procède souvent de la manière suivante : on remplace chaque classe par son centre et on calcule la moyenne de la série des centres (avec les mêmes effectifs).

Faire le calcul pour la série ci-dessus. Vérifier que la moyenne obtenue est le centre de l'intervalle I trouvé à la question précédente.

- 4) Quelle est la classe pour laquelle la fréquence cumulée croissante passe la « barre » des 50 % ? Justifier pourquoi on appelle cette classe la classe médiane.

Exercice 8 :

En prévision du lancement d'un nouveau produit, une société a effectué une enquête auprès de clients éventuels pour fixer le prix de vente (en milliers de francs) de ce produit. Les résultats sont donnés dans le tableau ci – dessous.

Prix de vente en milliers de francs x_i	9	10	11	12	14	15	16	17
Nombre d'acheteurs potentiels y_i	180	160	150	130	100	90	80	70

1- Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique. On prendra pour unité :

1 cm pour 1000 francs en abscisse

1cm pour 10 acheteurs en ordonnée.

2- Déterminer les coordonnées du point G

3- Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r puis interpréter le résultat obtenu.

4- Déterminer une équation de la droite (D) de régression de y en x . Tracer (D)

5- Estimer graphiquement le prix maximum à fixer pour qu'il y ait au moins 50 acheteurs potentiels.

6- En utilisant l'équation de la droite (D) de régression de y en x , puis déterminer :

a) Le nombre d'acheteurs à prévoir si le prix est fixé à 13 000 F

b) Le prix à fixer pour que le nombre d'acheteurs potentiels soit supérieur à 250.

EXERCICES

EXERCICE 1 :

Soit tableau de la série statistique correspondant aux pointures des chemises de 48 militaires.

x_i	36	37	38	39	40	41	42	43
n_i	5	11	12	8	4	3	4	1

- 5) Déterminer la population et le caractère étudié.
- 6) Déterminer le mode des chemises
- 7) Calculer la pointure moyenne des chemises
- 8) Calculer la variance et l'écart – type de cette série.

EXERCICE 2 :

L'étude statistique faite sur la taille des voitures de la société Renault a donné les résultats suivants :

Classes $[x_i ; x_{i+1}[$	[144 ; 150[	[150 ; 156[	[156 ; 162[	[162 ; 168[	[168 ; 174[	[174 ; 180[	[180 ; 186[
Effectifs n_i	1	4	1	3	14	6	1

- 4) Dresser el tableau des centres ci .
- 5) Dresser le tableau des effectifs et des fréquences cumulées (croissants et décroissants).
- 6) En déduire l'histogramme des effectifs (n_i) puis celle effectifs (n_i et n_i).

EXERCICE 3 :

Soit la série suivante : 3 ; 8 ; 7 ; 11 ; 5 ; 13 ; 15 ; 10 ; 2 ; 17 ; 1 ; 20 ; 12.

- 3) Déterminer la médiane et les quartiles.
- 4) Faites la représentation en boîte de cette série.

EXERCICE 4 :

Une agence de voyage propose 21 voyages organisés dont voici les tarifs en euros :

152 ; 320 ; 250 ; 320 ; 137 ; 183 ; 137 ; 152 ; 244 ; 122 ; 190 ; 139 ; 202 ; 285 ; 137 ; 180 ; 143 ; 190 ; 137 ; 180 ; 190.

- 4) Calculer la moyenne et l'écart type de la série des prix. Quel est le premier et le troisième quartile, la médiane ?
- 5) Ne rentrant pas dans ses frais, l'agence hésite entre deux solutions : augmenter tous les tarifs de 190 euros ou doubler tous les tarifs. Donner pour chacune des solutions la moyenne et l'écart – type de la nouvelle série des prix. Que deviennent les quartiles et la médiane ?
- 6) Une des deux solutions est – elle plus avantageuse financièrement pour l'agence ? Tracer les deux diagrammes en boîte correspondants.

EXERCICE 5 :

Lors d'un concours d'entrée à l'école statistique, la moyenne générale des 600 candidats a été de 11,4 sur 20. Il y a 300 places au concours. Hélène a eu une moyenne de 12. Pourtant elle a échoué. Expliquer ce résultat.

EXERCICE 6 :

Une série statistique a pour effectif 40. Sa moyenne est égale à 15,75 et son écart – type à 11,438. On ajoute à cette série une 41^{ème} valeur égale à 18. Calculer la moyenne et l'écart – type de la nouvelle série.

EXERCICE 7 :

On a relevé le montant en euros de 100 chèques déposés dans un commerce dans une journée. Voici le tableau obtenu : les chèques ont été regroupés en fonction de leur montant par classes dont l'amplitude est 15 euros.

Montant des chèques	effectif	Fréquence	Fréquence cumulée croissante
[0,15[	20		
[15,30[	9		
[30,45[	19		
[45,60[	27		
[60,75[	18		
[75,90[	6		
[90,105[	1		
Total			

- 4) compléter le tableau
- 5) soit s le montant de l'ensemble des 100 chèques. Donner un encadrement de S . En déduire un intervalle I tel que le montant moyen des chèques appartienne à I .
- 6) pour estimer la moyenne d'une série statistique où les valeurs ont été regroupées en classes de même amplitude, on procède souvent de la manière suivante : on remplace chaque classe par son centre et on calcule la moyenne de la série des centres (avec les mêmes effectifs).

Faire le calcul pour la série ci-dessus. Vérifier que la moyenne obtenue est le centre de l'intervalle I trouvé à la question précédente.

- 4) Quelle est la classe pour laquelle la fréquence cumulée croissante passe la « barre » des 50 % ? Justifier pourquoi on appelle cette classe la classe médiane.

Exercice 8 :

En prévision du lancement d'un nouveau produit, une société a effectué une enquête auprès de clients éventuels pour fixer le prix de vente (en milliers de francs) de ce produit. Les résultats sont donnés dans le tableau ci – dessous.

Prix de vente en milliers de francs x_i	9	10	11	12	14	15	16	17
Nombre d'acheteurs potentiels y_i	180	160	150	130	100	90	80	70

- 7- Représenter graphiquement le nuage de points de cette série statistique. On prendra pour unité :
- 1 cm pour 1000 francs en abscisse
1 cm pour 10 acheteurs en ordonnée.
- 8- Déterminer les coordonnées du point G
- 9- Déterminer le coefficient de corrélation linéaire r puis interpréter le résultat obtenu.
- 10- Déterminer une équation de la droite (D) de régression de y en x . Tracer (D)
- 11- Estimer graphiquement le prix maximum à fixer pour qu'il y ait au moins 50 acheteurs potentiels.
- 12- En utilisant l'équation de la droite (D) de régression de y en x , puis déterminer :
- c) Le nombre d'acheteurs à prévoir si le prix est fixé à 13 000 F
- d) Le prix à fixer pour que le nombre d'acheteurs potentiels soit supérieur à 250.

Fonctions rationnelles

1- Fonctions rationnelles :

a- Définition :

On appelle fonction rationnelle, toute fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{où } p(x) \text{ et } q(x) \text{ sont deux fonctions polynômes.}$$

$$x \rightarrow \frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{avec } (q(x) \neq 0)$$

b- Etude des cas : $x \rightarrow \frac{ax+b}{cx+d}$ et $x \rightarrow \frac{ax^2+bx+c}{ex+f}$

- **Etude de la fonction :** $x \rightarrow \frac{ax+b}{cx+d}$

La fonction : $x \rightarrow \frac{ax+b}{cx+d}$ est une fonction **rationnelle** en générale mais aussi une fonction **homographique** en particulier.

Remarque : Toute fonction homographique peut s'écrire sous la forme $x \rightarrow \frac{\alpha}{cx+d} + \beta$ (où $\alpha ; \beta$ sont des réels), avec $cx + d \neq 0$.

Exemple : Soit fonction homographique f définie par $f(x) = \frac{3x-8}{5x+1}$.

Déterminer les réels α et β tels que $f(x) = \frac{\alpha}{5x+1} + \beta$

- **Ensemble de définition de la fonction :** $x \rightarrow \frac{ax+b}{cx+d}$

Pour déterminer en quelle valeur de x une fonction homographique n'est pas définie, il suffit de savoir en quelle valeur de x le dénominateur s'annule.

Exemple :

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

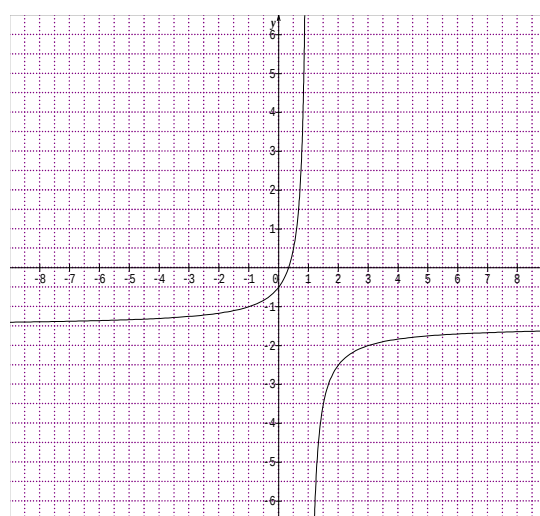
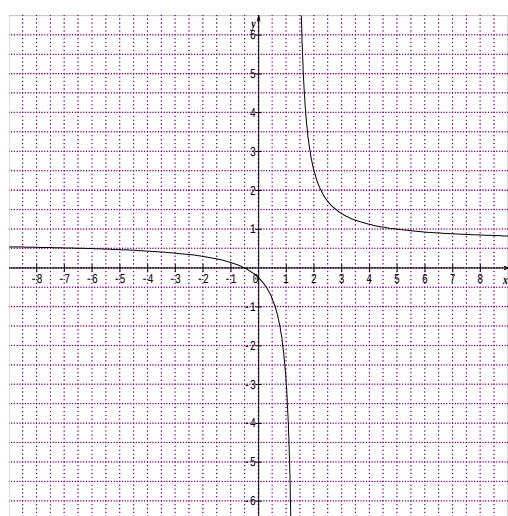
$$\text{a- } f(x) = \frac{1}{x+5} \quad ; \quad \text{b- } g(x) = \frac{6x}{x-4} \quad ; \quad \text{c- } h(x) = \frac{x-2}{3x+5}$$

- **Courbe representative :**

La courbe représentative d'une fonction homographique dans un repère orthonormé $(O ; I ; J)$ est appelée **hyperbole**.

Exemple :

$$\text{Soient } f: x \rightarrow \frac{2x+1}{3x-4} \quad \text{et} \quad g: x \rightarrow \frac{-3x+1}{2x-2}$$



- **Etude de la fonction** : $x \rightarrow \frac{ax^2 + bx + c}{ex + f}$

La fonction : $x \rightarrow \frac{ax^2 + bx + c}{ex + f}$ est aussi un autre cas de fonction **rationnelle**.

Remarque : ce genre de fonction peut s'écrire sous la forme $x \rightarrow \alpha x + \beta + \frac{\lambda}{ex + f}$ (où α ; β et λ sont des réels), avec $ex + f \neq 0$.

Exemple : Soit fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$.

Déterminer les réels α ; β et λ tels que $f(x) =$

$$\alpha x + \beta + \frac{\lambda}{x+1}$$

- **Ensemble de définition de la fonction** : $x \rightarrow \frac{ax + c}{dx + e}$

Pour déterminer en quelle valeur de x une fonction homographique n'est pas définie, il suffit de savoir en quelle valeur de x le dénominateur s'annule.

Exemple :

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

b- $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{-x - 5}$; b- $g(x) = \frac{-3x^2 + x + 1}{x + 1}$; c- $h(x) = \frac{x^2 + x + 1}{3x}$

- **Courbe représentative :**

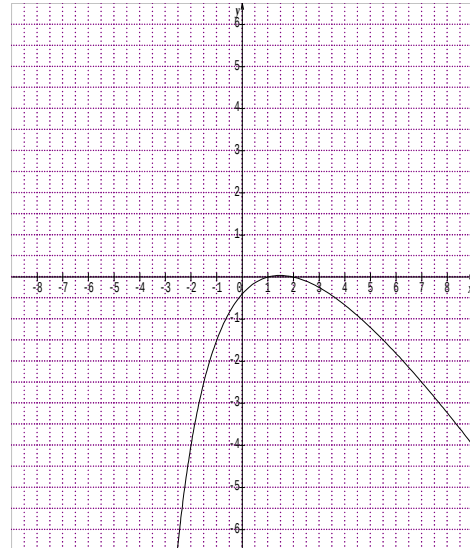
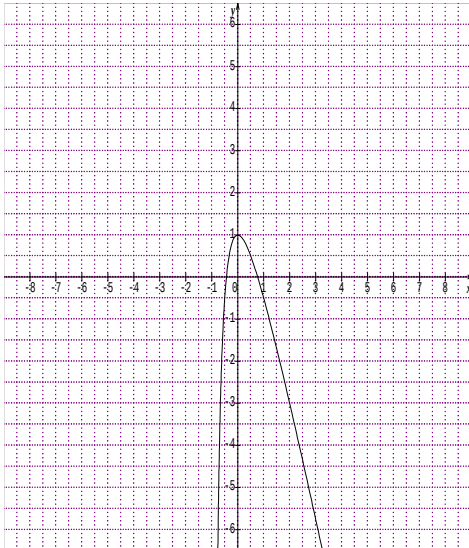
La courbe représentative de la fonction $x \rightarrow \frac{ax^2 + bx + c}{ex + f}$ dans un repère orthonormé $(O; I; J)$.

Exemple :

Soient $f: x \rightarrow \frac{x^2 - 3x + 2}{-x - 5}$

et

$g: x \rightarrow \frac{-3x^2 + x + 1}{x + 1}$



EXERCICES

Dérivations des fonctions

I- Dérivation :

Objectifs

Ce chapitre vise à :

- consolider les notions abordées en classe de première telles que la détermination du sens de variation d'une fonction et la recherche de tangentes à une courbe en des points donnés ;
- consolider la notion de dérivé et l'étendre à la composée de deux fonctions dérivables ;
- compléter les théorèmes concernant la dérivabilité par les notions de dérivabilité à gauche et de dérivabilité à droite ;
- utiliser des propriétés des fonctions dérivables pour démontrer des inégalités ou établir des encadrements.

Savoirs et savoir-faire

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Dérivées successives ; nouvelle notations. $\frac{df}{dx}$; $\frac{d^2f}{dx^2}$ • Si une fonction est dérivable sur un intervalle, alors elle continue sur cet intervalle. • Dérivée d'une fonction composée (admise) ; application à la dérivation des fonctions de la forme : u^n ($n \in \mathbb{Z}^*$) ; $\sqrt{u}$ • Existence de la dérivée d'une fonction réciproque (admise), formule de la dérivée de la fonction réciproque. • Dérivée des fonctions puissances d'exposants rationnels.	• Démontrer qu'une fonction composée est dérivable en un point et savoir calculer le nombre dérivé en ce point. • Préciser l'ensemble des éléments où la fonction réciproque d'une fonction donnée est dérivable. • Déterminer le nombre dérivé de la fonction réciproque en un point x_0 • Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour : - démontrer une inégalité ; - établir un encadrement.

• Inégalité des accroissements finis (2 formes) • nombre dérivé à droite (à gauche) d'une fonction en un point. • Demi-tangente	• Etudier la dérivabilité d'une fonction définie par intervalles en un point de raccordement. • Interpréter graphiquement la dérivabilité à droite (resp. à gauche) d'une fonction en un point x_0.
---	---

1) Nombre dérivé en un point x_0 :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 .

On dit que f est dérivable en x_0 si et seulement si la quantité $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0 . Cette limite est appelée **nombre dérivé en x_0** et est noté $f'(x_0)$. C'est-à-dire :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

N.B : f est dérivable en x_0 est équivalente que la quantité $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers zéro ; il suffit de poser $h = x - x_0$

f est dérivable en x_0 si elle admet un nombre dérivé $f'(x_0)$

2) Lien entre la notion de limite et de continuité :

Toute fonction dérivable en un point x_0 est continue en x_0 .

N.B : La réciproque est inexacte.

3) Nombre dérivé à gauche - Nombre dérivée à droite

a) Nombre dérivé à gauche :

Si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie, alors on dit que f est dérivable à gauche en x_0 .

On la note $f'_g(x_0)$

b) Nombre dérivé à droite :

Si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ Existe et est finie, alors on dit que f est dérivable à droite en x_0 .

On la note $f'_d(x_0)$

Théorème :

si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 et si les deux nombres dérivés sont égaux alors f est dérivable en x_0 et on a :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

4) Interprétation graphique d'un nombre dérivé

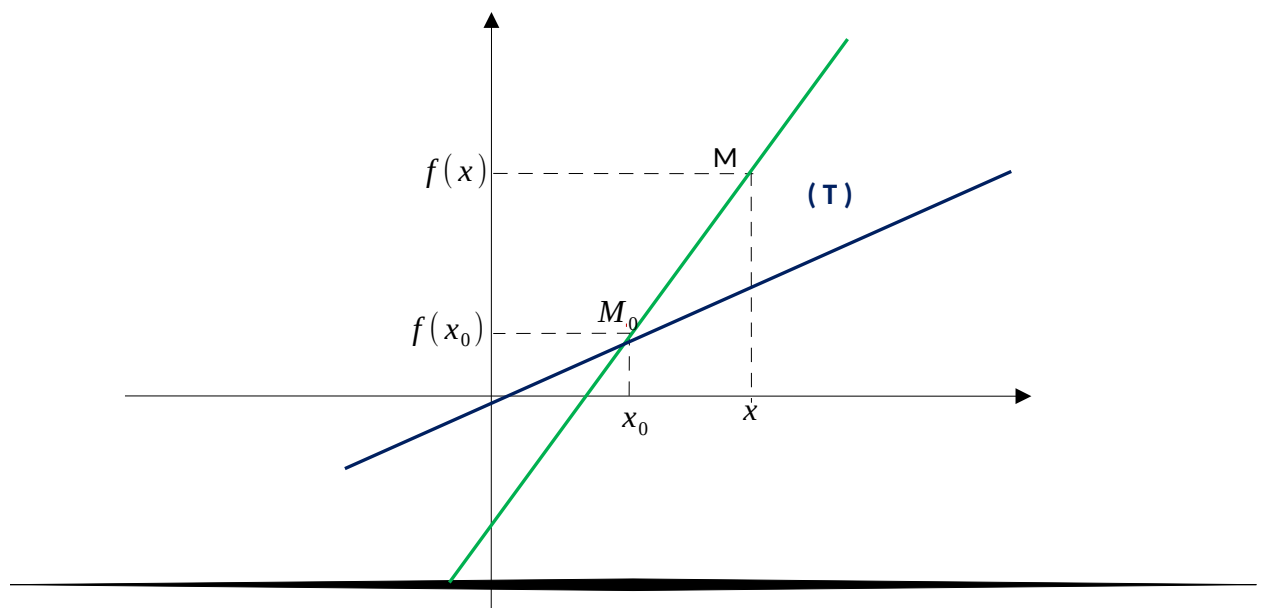
Soit f une fonction numérique d'une variable réelle et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; I ; J)$

Soit $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ un point fixé de (C) . $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un point courant de (C) ; construisons la droite

(M_0M) . Lorsque x tend vers x_0 la droite (M_0M) vient occuper une position limite (M_0T)

appelée tangente à la courbe (C) au point $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$; $f'(x_0)$ est appelé pente ou coefficient

directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$



a) Equation de la tangente au point d'abscisse x_0 : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Si le nombre dérivé à gauche et le nombre dérivé à droite existent et sont différents, alors la courbe admet deux demi - tangentes en M_0 de coefficients respectifs les nombres dérivés à gauche et à droite de x_0 et fait un angle en ce point.

Si la courbe (C). de la fonction f admet en un point x_0 , une tangente parallèle à l'axe des abscisses alors $f'(x_0) = 0$

5) Utilisation des dérivées :

Sens de variation d'une fonction.

Soit f une fonction définie par : $x \mapsto f(x)$. On appelle dérivée de f , la fonction f' définie par : $f' : x \mapsto f'(x)$ nombre dérivé de la fonction f au point x

Formules sur les dérivées :

Dérivées usuelles :

Fonctions	Dérivées	Domaines de dérivabilité
a (constante)	0	$\mathbb{R}$
ax	a	$\mathbb{R}$
ax^n	nax^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{a}{x^n}$	$\frac{-na x^{n-1}}{x^{2n}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\sqrt{ax+b}$	$\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$	$\mathbb{R}_+$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
Tgx	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$\mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{2} \right\}$
$\cos(ax + b)$	$-a \sin(ax + b)$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax + b)$	$a \cos(ax + b)$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{tg}(ax + b)$	$\frac{a}{\cos^2(ax + b)} = 1 + \operatorname{tg}^2(ax + b)$	$\mathbb{R} - \left\{ ax + b \neq \frac{k\pi}{2} \right\} k \in \mathbb{Z}$

Opérations sur les dérivées :

Fonctions	Dérivées
$u + v$	$u' + v'$
$au \quad (a \in \mathbb{R})$	au'
$(u) \times (v)$	$u'v + v'u$
$\frac{a}{u} \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{-au'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{(u')(v) - (v')(u)}{(v)^2}$
$(u)^n$	$n(u') (u)^{n-1}$
$\frac{a}{u^n} \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{-na u' u^{n-1}}{u^{2n}}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\cos(u)$	$-u' \sin(u)$
$\sin(u)$	$u' \cos(u)$
$\operatorname{tg}(u)$	$\frac{u'}{\cos^2 u}$
$u = (g \circ f)(x)$	$u' = f'(x) g'(f(x))$

6) Dérivée de la réciproque d'une fonction f :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I .

Alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$ et admet une bijection f^{-1} de $f(I)$ dans I

Ayant même sens de variation que f

Pour calculer $(f^{-1})'(x_0)$, on peut procéder comme suite :

- On détermine la solution de l'équation $f(x) = x_0$
- On calcule $f'(x)$ et on vérifie que $f'(x) \neq 0$
- On conclue $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(x)}$

b) Sens de variation d'une fonction.

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . On retient que les variations d'une fonction dépendent du signe de sa dérivée. Ainsi :

- Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in I$, alors $\forall x \in I$, f est strictement décroissante.
- Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors $\forall x \in I$, f est strictement croissante.
- Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors $\forall x \in I$, f est constante ou stationnaire

N.B.:

Les variations d'une fonction peuvent être résumées dans un tableau appelé tableau de variation de f . Ainsi un tableau de variation comporte les éléments suivants :

- Domaine de définition

$$\left\{ \begin{aligned} f(x) &= \frac{(x-2)^2}{x^2+x-6} \end{aligned} \right.$$

f est dérivable en $x_0 = 2$ si $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = l$ avec ($l \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{x^2+x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x^2+x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)^2(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-1} = 1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Alors f est dérivable en $x_0 = 2$ et son nombre dérivé est $f'(2) = 1$

2) Calculer la fonction dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x) = \frac{-x^2 + 3x - 5}{x^3 - 2}$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-x^2 + 3x - 5}{x^3 - 2} \quad \left| \begin{array}{l} U(x) = -x^2 + 3x - 5 \Rightarrow U'(x) = -2x + 3 \\ V(x) = x^3 - 2 \Rightarrow V'(x) = 3x^2 \end{array} \right. \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{(U'(x))(V(x)) - (V'(x))(U(x))}{(V(x))^2} = \frac{(-2x + 3)(x^3 - 2) - (3x^2)(-x^2 + 3x - 5)}{(x^3 - 2)^2} \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{x^4 - 6x^3 + 15x^2 + 4x - 6}{(x^3 - 2)^2} \end{aligned}$$

3) Ecrivons une équation de la tangente (T) à la courbe (C) de f aux points x_0 :

$$f(x) = \cos^2\left(\frac{x\pi}{6}\right); \text{ on donne } x_0 = 2$$

L'équation de la tangente (T) à la courbe (C) de f aux points $x_0 = 2$ est :

$$y = f'(2)(x-2) + f(2)$$

$$\begin{aligned} U(x) &= \cos\left(\frac{x\pi}{6}\right) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} U'(x) = -\frac{\pi}{6} \sin\left(\frac{x\pi}{6}\right) \\ f(x) = \cos^2\left(\frac{x\pi}{6}\right) \end{array} \right. \\ n=2 &\Rightarrow U^{n-1}(x) = \cos\left(\frac{x\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(x) = n(U'(x))(U^{n-1}(x))$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2 \left[\left(-\frac{\pi}{6} \sin\left(\frac{x\pi}{6}\right) \right) \left(\cos\left(\frac{x\pi}{6}\right) \right) \right] \Rightarrow f'(2) = -\frac{\pi\sqrt{3}}{12} \text{ et } f(2) = \frac{1}{4}$$

$$\text{D'où : } y = -\frac{\pi\sqrt{3}}{12}(x-2) + \frac{1}{4} \Rightarrow y = -\frac{\pi\sqrt{3}}{12}x + \frac{2\pi\sqrt{3} + 3}{12}$$

4) Dressons le tableau de variation de la fonction $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1\} =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$	
$x+1$	-		0	+		

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}, \quad U(x) = x^2 + 2x + 2 \Rightarrow U'(x) = 2x + 2$$

$$V(x) = x + 1 \Rightarrow V'(x) = 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(U'(x))(V(x)) - (V'(x))(U(x))}{(V(x))^2} = \frac{(2x + 2)(x + 1) - (1)(x^2 + 2x + 2)}{(x + 1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2} \quad \text{or } \forall x \in Df, (x + 1)^2 > 0$$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend donc du signe du numérateur $x^2 + 2x$.

$$\text{Posons } x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -2$$

D'où le tableau de variation de f est le suivant :

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$f(x)$	+	-	-	+	
$f'(x)$	$-\infty$ ↗	↘ $-\infty$		↘ 2	↗

$$f(-2) = -2 \quad \text{et} \quad f(0) = 2$$

EXERCICES

1 Déterminer une équation de la tangente en $M_0(x_0; f(x_0))$ à la courbe (C) de f dans les cas suivants :

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 3$ et $x_0 = -2$; b) $f(x) = \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ et $x_0 = 0$

c) $f(x) =$ et $x_0 = 3$; d) $f(x) = \frac{\tan x}{x}$ et $x_0 = 0$

2

Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 3$; b) $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$; c) $f(x) = (-x^2 + 2x)^3$

d) $f(x) = \sqrt{2x^3 - 4x^2 + 1}$; e) $f(x) = (1 - 3x^2)(-x^2 + 1)$; f) $f(x) = \cos^3 x$

g) $f(x) = (x-1)\sqrt{x^3 - x^2}$; h) $f(x) = \sin(3x - 1)^4$; i) $f(x) = \sin^4(3x - 1)$

Dénombrement - Probabilité

Objectifs

Ce thème vise à :

- consolider les acquis sur le dénombrement.
- calculer la probabilité d'un événement ;
- calculer les probabilités d'événement indépendants.

Savoirs et savoir-faire

1. PROBABILITES

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Vocabulaire. • Définition d'une probabilité dans le cas d'une équiprobabilité. • Propriété. • Evénements indépendants - Définition ; - Propriétés.	• Dénombrer, dans le cas d'une expérience conduisant à un nombre fini d'éventualités : - Les cas possibles d'une expérience ; - Les cas favorables d'un événement • Calculer la probabilité d'un événement. • Démontrer que deux événements sont indépendants.

Dénombrement :

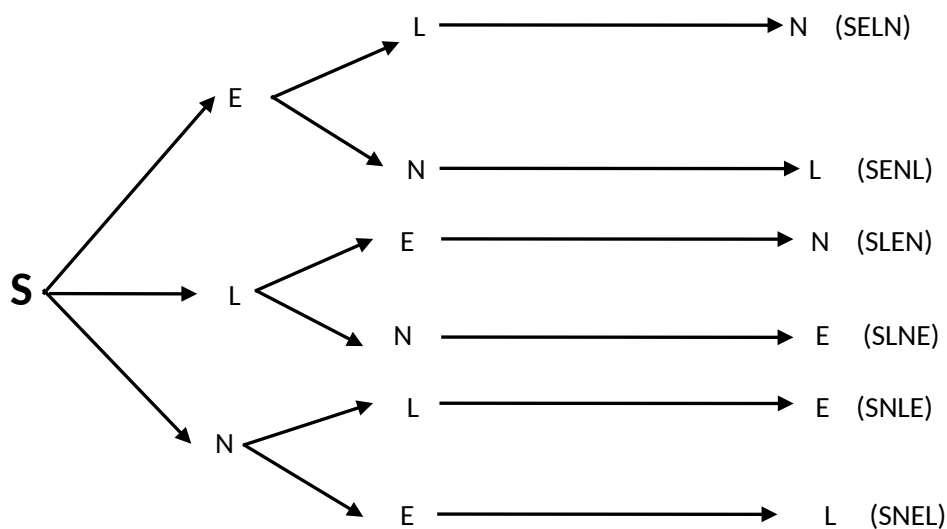
1) Théorie des ensembles :

a) Activité 1 :

Combien de mot peut-on former avec 4 lettres et sans répétition avec le mot : SELN ?

SELN ;	ESLN ;	LESN ;	NELS ;
SENL ;	 ;	 ;	 ;
SLNE;	 ;	 ;	 ;
SLNE;	 ;	 ;	 ;
SLEN;	 ;	 ;	 ;
SNLE;	 ;	 ;	 ;
SNEL;	 ;	 ;	 ;
Pour S en 1 ^{ère} Position	Pour E en 1 ^{ère} Position	Pour L en 1 ^{ère} Position	Pour N en 1 ^{ère} Position

Ainsi on aura donc formé au total $6 \times 4 = 24$ mots. Ceci peut être résumé par l'arbre ou le diagramme suivant :



On a donc fait un arrangement de 4 lettres pour 4 places et d'une manière symbolique on écrit : $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

b) activité 2 :

Former un bureau de 3 personnes (un directeur, un secrétaire et un commis) ; combien de bureau peut on former ? Sachant que le bureau n'admet pas de doubles postes.

Solution :

D

S

C

$$45 \times 44 \times 43 = 85140$$

On a donc fait un arrangement de 45 personnes pour 3 élèves. On la note ainsi A_{45}^3 tel que $A_{45}^3 = 45 \times 44 \times 43 = 85140$

c) **Activité 3 :**

Dans un jeu de 32 cartes ordinaires, on tire successivement 3 cartes.

- 1) Quel est le nombre de tirage possible ?
- 2) Quel est le nombre de tirage contenant 1 seule carte cœur ?
- 3) Quel est le nombre de tirage possible contenant 1 seule carte noire ?

Solution :

- 1) On a $A_{32}^3 = 32 \times 31 \times 30 = 29760$
- 2) On a : $A_8^1 \times A_{24}^2$
- 3) On a : $A_{16}^1 \times A_{13}^2$

2) Probabilité sur un ensemble fini :

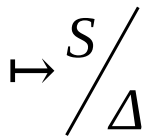
a- **Vocabulaire :**

- **Expérience aléatoire** : expérience dont le résultat dépend du hasard.
- **Eventualité** : résultat possible d'une expérience aléatoire.
- **Univers ou CardE** = **n**: ensemble de toutes les éventualités d'une expérience aléatoire.
- **Événement** : sous-ensemble de l'univers.
- **Événement élémentaire** : événement réduit à un seul élément.
- **Union de 2 ensembles**: Soit A et B deux ensembles finis. On appelle Union de A et B

l'ensemble des éléments de A ou B. On note : $A \cup B = \{x/x \in A \text{ ou } x \in B\}$

- **Intersection de 2 ensemble** : L'intersection de deux ensembles A et B regroupent les éléments communs aux deux ensembles A et B. On note : $A \cap B$

N.B :



Exercices d'application :

Soit E et F deux ensembles tels que :

$$E = \{0, 1, 2, 3\}, F = \{1, 2, 0, a, b, c, 4, 8\}$$

- 1) Déterminer $E \cap F$ et $E \setminus F$
- 2) Déterminer $\text{card} E$, $\text{card} F$, $\text{card} (E \cap F)$, $\text{card} (E \setminus F)$

Solution :

- 1) $E \cap F = \{0, 1, 2, 3, 4, 8, a, b, c\}$
 $E \setminus F = \{0, 1, 2\}$
- 2) $\text{Card } E = 4$, $\text{Card } F = 8$
 $\text{Card} (E \cap F) = 9$, $\text{Card} (E \setminus F) = 3$

b- Propriétés :

$$P_1 : \text{Card} \emptyset = 0$$

P_2 : Soient A et B deux univers finis :

- $\text{Card} (A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card} (A \cap B)$
- $\text{Card} (A \setminus B) = \text{Card } A - \text{Card} (A \cap B)$

P_3 : Soient A et B, deux ensembles distinctes de B, on appelle produit cartésien $A \times B$ l'ensemble défini par : $\{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$

Exemple:

Soient A et B deux ensembles tel que :

$$A = \{1, 2\}; B = \{a, b, c\}$$

- a) Donner les éléments de $A \times B$
- b) Déterminer $\text{Card} (A \times B)$

Solution :

- a) $A \times B = \{(1, a); (1, b); (1, c); (2, a); (2, b); (2, c)\}$
- b) $\text{Card} (A \times B) = \text{Card } A \times \text{Card } B = 2 \times 3 = 6$.

N.B :

- $A \times B \neq B \times A$ (le produit cartésien n'est pas commutatif)
- $\text{Card}(A \times B) = \text{Card } A \times \text{Card } B$.

P₄ : Complémentarité : On appelle complémentaire de A dans B l'ensemble des éléments de B n'appartenant pas à A on la note $\overline{A}$

Exemple :

Soit $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$; $F = \{0, 3, 4, 5\}$

- Déterminer $\overline{F}$
- Déterminer $\text{Card } \overline{F}$

Solution

a) $\overline{F}$

b) $\text{Card } \overline{F} = \text{Card } E - \text{Card } F = 9 - 4 = 5$

N.B : $\text{Card } \overline{F} = \text{Card } E - \text{Card } F$

3) Permutation-Arrangement - combinaison

a) Permutation :

- Définition :

On appelle permutation d'un ensemble fini F de cardinal n ; toute bijection de $\{1, 2, \dots, n\}$ dans F. Le nombre de permutation d'un ensemble fini de cardinal n. On la note : $n!$ (et se lit Factorielle n).

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots \times 2 \times 1$$

- Propriétés :

$$P_1: 1! = 1 \quad ; \quad P_2: 0! = 1$$

b) Arrangement :

- Définition:

Soit E un ensemble à n éléments, et P un ensemble fini tel que : $(n \geq P)$. On appelle arrangement de P éléments de E, toute injection de P dans E.

On le note : A_n^P et on lit : « A, n, P ».

$$A_n^P = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1) \quad \text{ou} \quad A_n^P = \frac{n!}{(n-P)!}$$

- **Propriétés:**

$$P_1 : A_n^0 = 1 \qquad P_3 : A_n^n = n !$$

$$P_2 : A_n^1 = n P_4 : A_n^{n-1} = n !$$

c) **Combinaison :**

- **Définition :**

Soit **E** un ensemble à n éléments, et **P** un ensemble fini tel que : $(n \geq P)$. On appelle combinaison de p éléments de **E** tout sous ensemble de **E** ayant p éléments.

On le note : C_n^P et on lit : $\ll C, n, P \gg$.

$$C_n^P = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{n(n-1)\dots\dots\dots 2 \times 1.} \text{ ou } C_n^P = \frac{A_n^P}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

- **Propriétés :**

$$P_1 : C_n^0 = 1 \qquad P_3 : C_n^n = 1$$

$$P_2 : C_n^1 = n P_4 : C_n^{n-1} = n$$

N.B : Pour calculer le C_n^P , on utilise le triangle de Pascal qui est le suivant :

P \ N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	1													
1	1	1												
2	1	2	1											
3	1	3	3	1										
4	1	4	6	4	1									
5	1	5	10	10	5	1								
6	1	6	15	20	15	6	1							

d) **Nombre d'application d'un ensemble fini dans un ensemble fini (P- liste)**

- **Définition :**

Soit **E** et **F** deux ensembles finis ; on appelle application de l'ensemble **E** dans **F**, toute relation qui permet d'associer à tout élément de **E**, un élément unique de **F**. Le nombre d'application distincte d'un ensemble fini de cardinal p dans un ensemble fini de **Cardinal** n est noté : $A_n^{\hat{p}}$ tel que : $A_n^{\hat{p}} = n^p$

- **Propriétés:**

$$P_1 : A_n^{\hat{0}} = n^0 = 1 ;$$

$$P_2 : A_n^{\hat{1}} = n^1 = n ;$$

4) Les différents types de tirages

a) Tirages successif et sans remise :

Si l'énoncé contient les mots : **successif et sans remise**, cela signifie que l'ordre dans le quel on considère les éléments a de l'importance mais que tous les éléments considérés sont distincts (**ou qu'il n'y a pas de répétition d'éléments**).

Ainsi le modèle mathématique utilisé est : **l'arrangement**.

$$A_n^P = n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1) \text{ ou } A_n^P = \frac{n!}{(n-P)!}$$

b) Tirages successif et avec remise :

Si l'énoncé contient les mots : **successif et avec remise**, cela signifie que l'ordre dans le quel on considère les éléments a de l'importance et qu'un élément peut éventuellement être répété.

Ainsi le modèle mathématique utilisé est : **la P-liste**.

$$A_n^{\hat{P}} = n^P$$

c) Tirage simultané :

Si l'énoncé contient le mot : **simultanément**, cela signifie que l'ordre dans le quel on considère les éléments n'a pas d'importance.

Ainsi le modèle mathématique utilisé est : **la combinaison**.

$$C_n^P = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)}{n(n-1)(n-2)\dots\cdot 2\cdot 1} \text{ ou } C_n^P = \frac{A_n^P}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

d) Tirage successif :

Si l'énoncé contient le mot : **successif**, il faut en tenir compte de tous les ordres dans les quels on peut obtenir un événement donné.

On doit souvent multiplier par le nombre d'ordres possibles le résultat trouvé pour un ordre déterminé.

Attention :

Il ne s'agit que d'indications, elles admettent des exceptions.

Application :

Une boîte contient 11 boules rouges, 4 boules bleues, 9 boules jaunes, et 6 boules noires.
Dénombrer les cas possible à cette épreuve si l'on tire 3 boules de la boîte et que :

- a) le tirage est simultané
- b) le tirage est successif et sans remise
- c) le tirage est successif et avec remise

Solution :

Ici : - le nombre d'élément qui constitue l'univers est : $n = 30$
- le nombre d'élément tiré est : $p = 3$

- a) le tirage est simultané :

Alors le nombre de cas possible est : $C_{30}^3 = \frac{30!}{3!(30-3)!} = 4060$

- b) le tirage est successif et sans remise :

Alors le nombre de cas possible est : $A_{30}^3 = \frac{30!}{(30-3)!} = 24360$

- c) le tirage est successif et avec remise :

Alors le nombre de cas possible est : $A_{30}^{\hat{3}} = 30^3 = 2700$

I- Probabilité simple :

1) Définition :

Dans une épreuve où tous les événements élémentaires d'un univers Ω sont équiprobables, la probabilité d'un événement A est le nombre réel défini par le rapport entre le Nombre de Cas Favorable à l'évènement A et le Nombre de Cas Possibles. On note P_A ou $P(A)$.

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{Nombre de Cas Favorables à la réalisation de A}}{\text{Nombre Total de Cas Possibles à la réalisation de A}}$$

Exemple:

On jette un dé ordinaire non piqué. Soit ω l'ensemble des résultats possibles tel que : $\omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. ω est appelé univers ou population.

- Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre paire ?
- Quelle est la probabilité d'obtenir exactement le chiffre 3 ?
- Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre inférieur à 1 ?
- Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre inférieur ou égal à 6 ?

Solution :

Le nombre de cas possible est : 6.

- La probabilité d'obtenir 1 chiffre paire est $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- La probabilité d'obtenir exactement le chiffre 3 est : $P = \frac{1}{6}$
- La probabilité d'obtenir un chiffre inférieur à 1 est $P = 0$
- La probabilité d'obtenir un chiffre inférieur ou égale à 6 est $P = 1$

2) Propriétés :

Soit ω l'univers ou l'évènement certain et A et B deux évènement élémentaires de ω .
On a :

- $P(\omega) = 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- Si A et B sont disjoints ($A \cap B = \emptyset$) alors on a : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Exemple :

Une urne contient 7 boules indiscernables au touché dont 3 blanches et 4 noires. On tire simultanément et au hasard 3 boules de cette urne.

- 1) Quelle est la probabilité d'avoir : "A" exactement 2 boules blanches.
- 2) Quelle est la probabilité d'avoir "B" au plus 1 boule noire.
- 3) Quelle est la probabilité d'avoir "C" 2 boules de même couleur.
- 4) Quelle est la probabilité d'avoir "D" des boules de même couleur.

Solution :



Tirage simultané : on utilise

Désignons par NCP : le Nombre de Cas Possible
et

par NCF : le Nombre de Cas Favorable

$$\binom{a_{ij}}{(1 \leq i \leq m ; 1 \leq j \leq p)}$$

$$(a_{ij})_{m \times p}, B = (b_{ij})_{m \times p}$$

$$\forall i, j, a_{ij} = b_{ij}$$

3) Equiprobabilité:

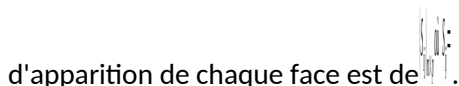
On parle d'équiprobabilité si la probabilité de réalisation de chaque évènement élémentaire est la même.

- Le lancé du dé est un évènement d'équiprobable car la probabilité d'apparition de chaque face



est

- Le lancé d'une pièce de monnaie est aussi un évènement d'équiprobable car la probabilité



d'apparition de chaque face est de .

Suites numériques

Objectifs

Ce thème vise à :

- étudier le comportement global d'une suite numérique (majoration, minoration, convergence, variations) ;
- mettre en œuvre le raisonnement par récurrence ;
- donner des outils pour traiter des problèmes d'approximation.

Savoirs et savoir-faire

SAVOIRS	SAVOIR-FAIRE
• Suites monotones • Suites majorées, minorées, bornées • Suites convergentes : - Notion de convergence. - Unicité de la limite (admise) - Toute suite croissante et majorée converge - Toute suite décroissante et minorée converge. - Si f est une fonction numérique telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = l$ alors la suite définie par $u_n = f(n)$ converge vers l. • si (u_n) est une suite convergeant vers a et f une fonction continue en a alors la suite $v_{n=f(u_n)}$ converge vers $f(a)$. • Convergence des suites géométriques (suites du type (a^n)).	• Démontrer qu'une suite est monotone : - Par comparaison de deux termes généraux consécutifs ; - Par l'étude des variations d'une fonction ; - Par un raisonnement par récurrence. • Démontrer qu'une suite est majorée et/ou minorée : - Par un calcul direct ; - Par l'étude des variations d'une fonction ; - Par un raisonnement par récurrence. • Démontrer qu'une suite est convergente ou divergente par : - L'étude du comportement d'une fonction ; - L'utilisation des opérations sur les limites ;

• Suites divergentes • Convergence des suites géométriques et des suites du type n^α • Suites divergentes • Théorèmes de comparaison : Soient les suites (v_n) et (u_n) 1) Si à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n$ et si (v_n) tend vers $+\infty$, alors (u_n) tend vers $+\infty$. 2) Si à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n$ et si (u_n) tend vers $-\infty$, alors (v_n) tend vers $-\infty$. 3) Si à partir d'un certain rang, $v_n - l \leq u_n$ et si (u_n) tend vers 0, alors (v_n) tend vers l. 4) Si à partir d'un certain rang, $v_n \leq u_n \leq w_n$ et si (v_n) et (w_n) tend vers l, alors (u_n) tend vers l. 5) Si à partir d'un certain rang $v_n \leq u_n$ et (u_n) tend vers l et (v_n) tend vers l' alors $l' \leq l$. • suites (a^n) et (n^α). Croissance comparée Limites et comportements asymptotiques comparés des suites $(\ln n)$; (a^n), $a > 0$ et (n^α), $\alpha > 0$. - Suites récurrentes définies par une relation du type : $u_{n+1} = f(u_n)$. Soit (u_n) une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. Si (u_n) converge vers l et si f est continue en l alors $f(l) = l$.	- L'utilisation des théorèmes de comparaison. • conjecturer à partir d'une représentation graphique et comportement d'une suite récurrente.
--	--

I- Généralité :

1) Définition :

On appelle suite numérique toute fonction définie de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. On note

$$U : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ n \rightarrow U(n) = u_n$$

Exemple :

Soit une suite u_n définie par : $u_n \in \mathbb{R}$. Calculer : $u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4$

$$u_0 = \mathcal{E} ; u_1 = 1 ; u_2 = \vec{u}_0 ; u_3 = \phi ; u_4 = \phi$$

2) Mode de définition d'une suite :

- Une suite peut être définie par 1 formule explicite c'est-à-dire : u_n en fonction de n
 $u_n = f(n)$.

Exemple : $u_n = n + 3 ; v_n = \frac{2n - 4}{n + 1} ; w_n = 4n^2 - 3n + 1$

- Une suite peut être définie par son 1^{er} terme et une formule de récurrence, c'est-à-dire u_{n+1} s'exprime en fonction de u_n .

Exemple : soit la suite :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n + 4 \end{cases}$$
 .Calculer : $u_1 ; u_2 ; u_3 ; u_4$

Solution :

Pour $n = 0, u_1 = \frac{3}{2}u_0 + 4 = \frac{3}{2}(2) + 4 = 7$

Pour $n = 1$, $u_2 = \frac{3}{2} u_1 + 4 = \frac{29}{2}$

Pour $n = 2$, $u_3 = \frac{3}{2} u_2 + 4 = \frac{103}{4}$

Pour $n = 3$, $u_4 = \frac{3}{2} u_3 + 4 = \frac{341}{8}$

u_0 est le 1^{er} terme de la suite et u_n est le terme général.

2) Sens de variation d'une suite

- Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$ alors u_n est croissante
- Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$ alors u_n est décroissante
- Si $u_{n+1} - u_n = 0$; $\forall n \in \mathbb{N}$ alors u_n est constante

Exemple :

Etudier le sens de variation de chacune des suites :

$$u_n = \frac{2n + 3}{n + 2} ; v_n = -\frac{3}{2}n + 4$$

Solution :

$$u_n = \frac{2n + 3}{n + 2} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{2(n + 1) + 3}{(n + 1) + 2} = \frac{2n + 5}{n + 3}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n + 5}{n + 3} - \frac{2n + 3}{n + 2} = \frac{1}{(n + 3)(n + 2)} > 0$$

D'où u_n est croissante

$$v_n = -\frac{3}{2}n + 4 \Rightarrow v_{n+1} = -\frac{3}{2}(n + 1) + 4 = -\frac{3}{2}n + \frac{5}{2}$$

$$v_{n+1} - v_n = \left(-\frac{3}{2}n + \frac{5}{2}\right) - \left(-\frac{3}{2}n + 4\right) = -\frac{3}{2} < 0$$

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{3}{2} < 0 \quad \text{D'où } v_n \text{ est décroissante}$$

3) Représentation des termes d'une suite :

Pour représenter les termes d'une suite u_n sur l'axe de abscisses, on trace la 1^{ère} bissectrice (D) d'équation $y = x$. Puis on trace la fonction associée à la suite u_n en posant $u_n = x$ et $u_{n+1} = f(x)$. On détermine les termes de la suite sur l'axe des abscisses par projection.

Exemple

Soit (u_n) définie Par :

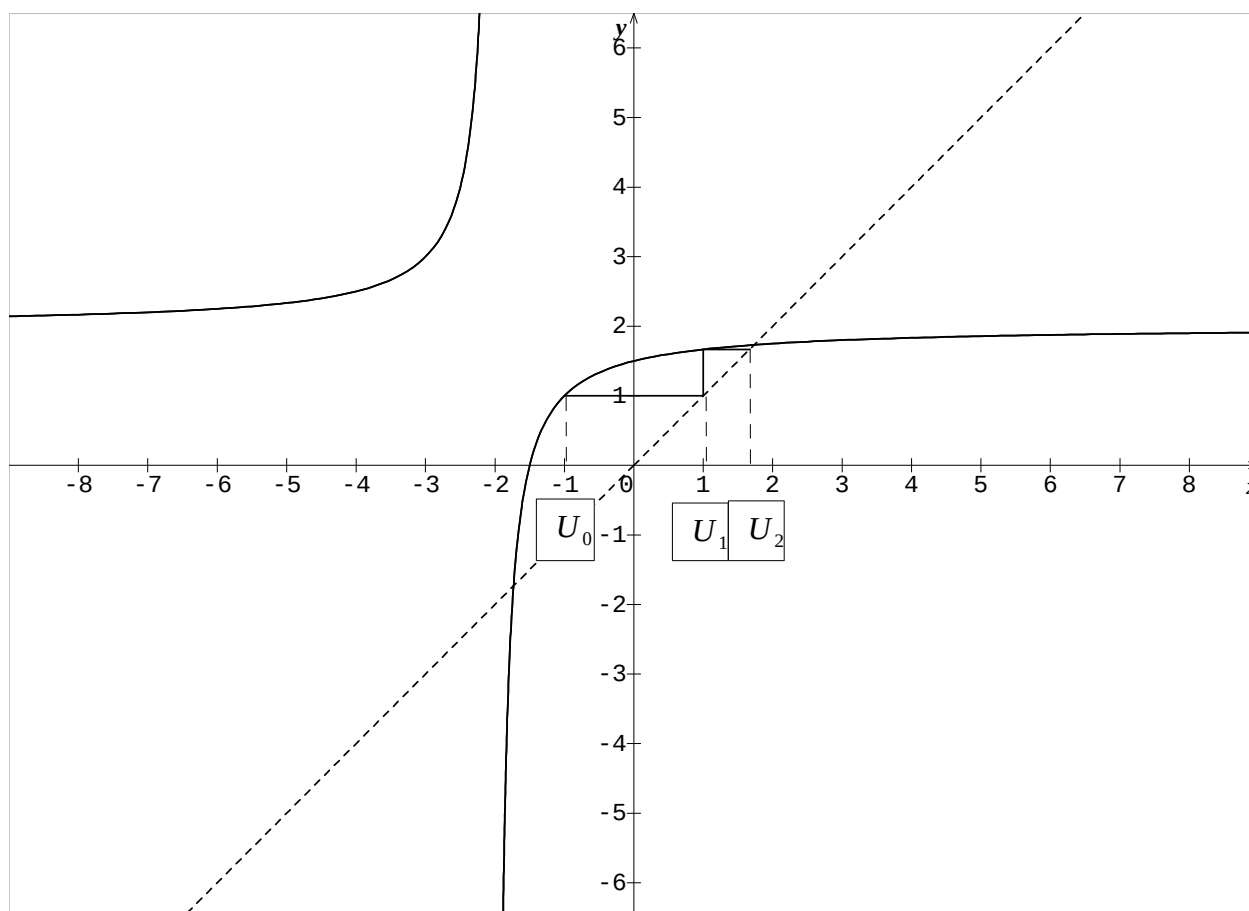
$$\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \frac{3 + 2U_n}{2 + U_n} \end{cases}$$

Représenter sur l'axe (ox) les 3 premiers termes de la suite u_n .

Solution

Désignons par f la fonction définie sur $] -2 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{3 + 2x}{2 + x}$

En suivant les règles de constructions ci-dessous , on a la représentation suivante :



II- Suites Arithmétiques

1) Activité :

Au 1^{er} Janvier 2012, le prix d'un kilo de sucre est de 550 f CFA.

Sachant que le prix du kilo subit une augmentation de 50 f CFA au 1^{er} Janvier de chaque année, quel serait le prix du kilo de sucre au 1^{er} Janvier 2013 ? Au 1^{er} Janvier 2014 ?

On désigne par p_n le prix du kilo du sucre au 1^{er} Janvier + n .

Calculer P_1 ; P_2 ; P_3 et p_n .

Calculer $p_{n+1} - p_n$.

Solution

Soit P_0 le prix d'un kilo de sucre au 1^{er} Janvier 2012 tel que $P_0 = 550$.

Calculons le prix d'un kilo de sucre :

- **Au 1^{er} Janvier 2013**, le prix d'un kilo de sucre serait $P_1 = P_0 + 50 = 550 + 50 = 600$.
- **Au 1^{er} Janvier 2014**, le prix d'un kilo de sucre serait $P_2 = P_1 + 50 = 600 + 50 = 650$.

Soit P_n le prix d'un kilo de sucre au 1^{er} Janvier + n .

Calculons : P_1 ; P_2 ; P_3 et p_n .

- $P_0 = 550$.
- $P_1 = P_0 + 50 = 550 + 50 = 600$.
- $P_2 = P_1 + 50 = 600 + 50 = 650$.
- $P_3 = P_2 + 50 = 650 + 50 = 700$.
- $p_n = P_0 + 50n = 550 + 50n$.

Calculons $p_{n+1} - p_n$.

$$p_n = 550 + 50n \Rightarrow p_{n+1} = 550 + 50(n + 1) = 550 + 50 + 50n = 600 + 50n$$

$$\Rightarrow p_{n+1} - p_n = (600 + 50n) - (550 + 50n) = 600 + 50n - 550 - 50n = 50$$

Alors on a : une suite arithmétique de raison $r = 50$.

2) Définition :

Une suite u_n est dite arithmétique si et seulement si : $\vec{IM} \cdot \vec{IJ} = \frac{\phi(I)-k}{2}$; $u_{n+1} - u_n = r$.

r est appelé la raison de la suite u_n .

Exemple :

Soit une suite u_n définie par : $u_n = \frac{\vec{IH} \times \vec{IJ} - \frac{\phi(I)-k}{2}}{2}$.

Démontrer que u_n est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le 1^{er} terme U_0 .

Solution :

$$u_n = \mathcal{E}$$

$$3\sqrt{3}-2) + i(3+2\sqrt{3}) \Rightarrow r = \frac{1}{2} \text{ et de 1}^{\text{er}} \text{ terme } u_0 = 4$$

3) Expression du terme général :

Soit U_n une suite de 1^{er} de terme U_0 et de raison r .

$$U_1 - U_0 = r$$

$$U_2 - U_1 = r$$

$$U_3 - U_2 = r$$

$$\vdots$$

$$\tau$$

$$\Rightarrow u_n = u_0 + nr$$

D'une façon générale si u_p est le 1^{er} terme l'expression du terme général est :

$$u_n = u_p + (n - p)r$$

Exemple :

$$\tau$$

Soit la suite réel définie par

- Démontrer que u_n est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le 1^{er} terme.
- Exprimer u_n en fonction de n .

Solution :

$$a) u_{n+1} = u_n - 3 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = -3$$

D'où U_n est une suite arithmétique de raison $r = -3$ et de 1^{er} terme $u_0 = -1$.

$$b) U_n = U_0 + nr = -1 + n(-3) \Rightarrow u_n = -3n - 1$$

4) Termes équidistants d'une suite :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite arithmétique p un entier naturel tel que $p \leq n$ les termes u_p et u_{n-p} sont des termes équidistants des termes extrêmes u_0 et u_n car il ya p termes avant le terme u_p et p termes après le terme u_{n-p} on a :

5) Somme des termes équidistants d'une suite arithmétique

Soit p un entier naturel tel que $p \leq n$

Les termes u_p et u_{n-p} sont des termes équidistants des termes extrêmes

$$u_p + u_{n-p} = (u_0 + pr) + (u_0 + (n-p)r) = u_0 + (u_0 + nr) \text{ d'où}$$

$$u_p + u_{n-p} = u_0 + u_n \text{ d'où le théorème}$$

Théorème : la somme de deux termes équidistants d'une suite arithmétique est égale à la somme des termes extrêmes

6) Propriétés :

En application du théorème on a :

P₁ : Trois nombres **a, b, c** forment une progression arithmétique si :

$$2b = a + c.$$

Preuve :

Soit

a, b et c trois réels

$$b = a + r$$

$$c = b + r$$

$$a + c = a + b + r = 2a + 2r = 2(a + r). \text{ Alors : } a + c = 2b$$

P₂ : Trois nombres *a, b, c* forment une progression arithmétique de raison *r* si :

$$b = a + r \quad \text{et} \quad c = a + 2r.$$

P₃ : Quatre nombres *a, b, c, d* forment une progression arithmétique de raison *r* si :

$$3b - d = 2a$$

P₄ : Soit u_n une suite arithmétique de 1^{er} terme u_0 . La somme de deux termes équidistants est toujours à la somme des extrêmes

$$u_0, u_1, u_2, \dots, u_{n-2}, u_{n-1}, u_n$$

u_1, u_{n-1} sont équidistants

$$u_0 + u_n = u_p + u_{n-p}$$

Exemple

Trouver 3 nombres consécutifs *a ; b et c* d'une suite en progression arithmétique sachant que

$$\begin{cases} a+b+c = 3 \\ 3a-6b+c = 6 \end{cases}$$

Solution :

Trouvons 3 nombres consécutifs *a ; b et c* d'une suite en progression arithmétique sachant

$$\text{que } \begin{cases} a+b+c = 3 \\ 3a-6b+c = 6 \end{cases}$$

On sait que pour une progression arithmétique de 3 termes a ; b ; c , on a : a + c = 2b
Ainsi l'équation dévient :

$$\begin{cases} 2b + b = 3 \\ 3a - 6b + c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3b = 3 \\ 3a - 6b + c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ 3a - 6b + c = 6 \end{cases}$$

D'autre part a + b + c = 3 => a + 1 + c = 3 => a + c = 2

$$\begin{cases} a + c = 2 \\ 3a - 6 + c = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 2 \\ 3a + c = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a - c = -2 \\ 3a + c = 12 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5 \text{ et } c = -3$$

D'où les nombres a ; b et c sont tels que a = 5 ; b = 1 et c = -3

7) Sens de variation d'une suite arithmétique

Soit u_n une suite arithmétique de raison r. On a :

$$u_{n+1} - u_n = r \text{ d'où :}$$

- Si $r > 0$ alors u_n est croissante
- Si $r < 0$ alors u_n est décroissante
- Si $r = 0$ alors u_n est constante

8) Somme des termes d'une suite arithmétique :

Soit u_n une suite arithmétique de 1^{er} terme u_0 et de raison r .

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{n-2} + U_{n-1} + U_n$$

$$S_n = U_n + U_{n-1} + U_{n-2} + \dots + U_2 + U_1 + U_0$$

$$2S_n = (U_0 + U_n) + (U_1 + U_{n-1}) + (U_2 + U_{n-2}) + \dots + (U_n + U_0)$$

$$2S_n = (U_0 + U_n) + (U_0 + U_n) + (U_0 + U_n) + \dots + (U_0 + U_n)$$

$$\Rightarrow 2S_n = (n + 1) (U_0 + U_n)$$

$$\boxed{S_n} = \|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} - 3\vec{MB}\| < \Rightarrow S_n = 3\sqrt{3} - 2 + 1(3 + 2\sqrt{3}) - (-\sqrt{3} - 1) - (1 - \sqrt{3}) + 1 - 4\sqrt{3} + (-4 - \sqrt{3}) \quad (1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme})$$

$$\text{ou } \boxed{S_n} = 3\sqrt{3} - 2 + 3 + 2\sqrt{3} + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} + 1 - 4\sqrt{3} - 4 - \sqrt{3} = 0$$

Remarque : une suite arithmétique est toujours divergente

III- Suites géométriques

Situation problème

Le premier Janvier 1999, la population d'une commune rurale était de 3000 habitants.

On admet que cette population diminue de 4 % chaque année.

Calcule la population de cette commune :

a) Au 1^{er} Janvier 2005 ;

b) Au 1^{er} Janvier 2006

c) Au 1^{er} Janvier

2012

Solution

Soit U_n la population de cette commune au 1^{er} Janvier de l'année n .

Soit $U_1 = 3000$ la population initiale de cette commune.

On a :

$$U_1 = 3000 .$$

$$U_2 = U_1 - 4\%U_1 = > U_2 = U_1(1 - 4\%) = U_1\left(1 - \frac{4}{100}\right) = U_1(0,96)$$

$$U_3 = U_2(0,96)$$

$$\cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot$$

$$U_{n+1} = U_n(0,96)$$

$$=> \frac{U_{n+1}}{U_n} = 0,96.$$

Alors on a : une suite géométrique de raison $q = 0,96$.

$$\text{D'où son expression est : } U_n = U_1(q)^{n-1} = 3000(0,96)^{n-1}$$

Déterminons ainsi la population :

- Au 1^{er} Janvier 2005

$$\text{On sait que : } U_n = 3000(0,96)^{n-1} \quad \text{et} \quad n = 2005 - 1999 = 6$$

$$\text{D'où la population au 1^{er} Janvier 2005 est : } U_6 = 3000(0,96)^{6-1} = 3000(0,96)^5$$

$$=> U_6 = 2446,11 \approx 2446$$

Ainsi la population au 1^{er} Janvier 2005 est : 2244 habitants.

- Au 1^{er} Janvier 2006

On sait que : $U_n = 3000(0,96)^{n-1}$ et $n = 2006 - 1999 = 7$

D'où la population au 1^{er} Janvier 2006 est : $U_7 = 3000(0,96)^{7-1} = 3000(0,96)^6$

$$=> U_7 = 2348,27 \approx 2348$$

Ainsi la population au 1^{er} Janvier 2006 est : 2348 habitants.

- Au 1^{er} Janvier 2012

On sait que : $U_n = 3000(0,96)^{n-1}$ et $n = 2012 - 1999 = 13$

D'où la population au 1^{er} Janvier 2005 est : $U_{13} = 3000(0,96)^{13-1} = 3000(0,96)^{12}$

$$=> U_{13} = 1838,12 \approx 1838$$

Ainsi la population au 1^{er} Janvier 20012 est : 1838 habitants.

1) Définition :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \rho_1(M) = \vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}$$

U_n est une suite géométrique si et seulement si :

$$\text{ou } U_{n+1} = qU_n.$$

q est un réel fixé appelé la raison de la suite géométrique.

Exemple :

1, 2, 4, 8, 16, 32..... 2^n sont les termes d'une suite géométrique de raison $q = 2$ et de 1^{er} terme $U_0 = 1$

L'expression de terme général est $U_n = 2^n$

2) Expression du 1^{er} terme générale

Soit u_n une suite géométrique de raison q et de 1^{er} terme u_0

$$U_1 = qU_0$$

$$U_2 = qU_1$$

$$U_3 = qU_2$$

$$U_4 = qU_3$$



$$U_n = qU_{n-1}$$

Multiplions membre à membre les termes de l'égalité.

$$U_1 \times U_2 \times U_3 \times U_4 \times \dots \times U_n = (qU_0) (qU_1) (qU_2) \dots (qU_{n-1})$$

$u_n = q^n \times U_0$ ou d'une manière générale $U_n = U_p \cdot q^{n-p}$ (après simplification des facteurs semblables dans les deux membres)

Où U_p désigne le 1^{er} terme.

3) Produit des termes équidistants des termes extrêmes d'une suite géométrique :

Théorème : Le produit de deux termes équidistants des termes extrêmes est égal au produit des termes extrêmes c'est-à-dire $U_p \times U_{n-p} = U_0 \times U_n$

Propriétés :

P₁ : Trois nombres a, b, c forment une progression géométrique si :

$$b^2 = ac. \text{ (en application du théorème précédent)}$$

P₂ : Trois nombres a, b, c forment une progression géométrique de raison q si :

$$b = qa \text{ et } c = q^2a.$$

P₃ : Quatre nombres a, b, c, d forment une progression géométrique de raison q si :

$$b = qa \quad ; \quad c = q^2a \quad \text{et} \quad d = q^3a$$

Exemple

Trouver 3 nombres consécutifs a, b et c d'une suite en progression géométrique sachant que

$$\begin{cases} a \cdot b \cdot c = 8 \\ a + b = -1 \\ c - a = 1 \end{cases}$$

On sait que pour une progression géométrique de 3 termes a, b, c , on a : $a \times c = b^2$
Ainsi l'équation dévient :

$$\begin{aligned} \begin{cases} (a \cdot c) \cdot b = 8 \\ a + b = -1 \\ c - a = 1 \end{cases} & \Rightarrow \begin{cases} (b^2) \cdot b = 8 \\ a + b = -1 \\ c - a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^3 = 8 \\ a + b = -1 \\ c - a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a + b = -1 \\ c - a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = -4 \\ c - a = 1 \end{cases} \\ & \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ a = -4 \\ c = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

D'où les nombres a, b et c sont tels que $a = -4$; $b = 3$ et $c = -3$

4) Sens de variation d'une suite géométrique :

Soit u_n suite géométrique de raison q et de 1^{er} terme u_0 :

- **1^{er} cas** $U_0 > 0$: si
 - $q > 1 \Rightarrow u_n$ est croissante
 - $0 < q < 1 \Rightarrow u_n$ est décroissante
 - $q = 1$ alors u_n constante
- **2^e Cas** $U_0 < 0$: si
 - $q > 1 \Rightarrow u_n$ est croissante
 - $0 < q < 1 \Rightarrow u_n$ est décroissante
 - $q = 1 \Rightarrow u_n$ est constante

9) Convergence d'une suite géométrique :

La limite d'une suite étant la limite de son terme général une géométrique est convergente si

$$-1 < q \leq 1$$

La suite est divergente si $q \in]-\infty; -1] \cup]1; +\infty[$

5) Somme des termes d'une suite géométrique :

Soit U_n une suite géométrique de raison q et de 1^{er} terme U_0

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n \quad (1)$$

$$qS_n = qU_0 + qU_1 + qU_2 + qU_3 + \dots + qU_n \quad (2)$$

En effectuant la différence des équations (1) et (2), on a :

$$S_n - qS_n = U_0 - qU_n \text{ or } U_n = U_0 \times q^n$$

$$S_n(1 - q) = U_0 - q(q^n \times U_0)$$

$$S_n (1 - q) = U_0 (1 - q^{n+1})$$

$$S_n = \|\vec{MO}\| = \|-2\vec{AB} + \vec{AC}\|$$

$$S_n = \left(\ell \right) = \left(M \in \left(\ell \right) / \|\vec{MO}\| = \|-2\vec{AB} + \vec{AC}\| \right)$$

D'une manière générale si U_p est le 1^{er} terme alors l'expression de la somme est :

$$\|-2\vec{AB} + \vec{AC}\| \text{ Avec } (q \neq 1)$$

6) Cas d'une suite géométrique :

Soit u_n une suite géométrique de raison q

- Si $\vec{OC} = \vec{0}$ alors U_n converge vers 0
- Si $\vec{OC} = \vec{0}$ alors U_n est divergente
- Si $\vec{OC} = \vec{0}$ alors U_n converge vers U_0

IV- Suites économiques :

1) Les intérêts :

L'intérêt est la rémunération d'un placement pendant une période donnée, (c'est-à-dire entre un temps T_1 et un temps T_2).

Ainsi les intérêts sont classés en deux catégories: (**intérêts simples et intérêts composés**).

NB :

- L'intérêt simple est utilisé pour des placements à court et moyen terme.
- L'intérêt composé est utilisé pour des placements à long terme.

a- Intérêts simples :

Un placement est fait à intérêt simple, lorsque, à des époques fixées d'avance celui qui prête ou place son argent en touche les intérêts de façon que le capital placé reste le même jusqu'à l'époque du remboursement.

Sa formule est :

$$I = \frac{C \cdot t \cdot n}{P} = \frac{(\text{Capital placé}) \cdot (\text{Taux d'intérêt}) \cdot (\text{Durée du placement})}{\text{Période}}$$

NB :

- Si : n est en **jours**, alors la **période** $P = 36.000$.
- Si : n est en **mois**, alors la **période** $P = 1.200$.
- Si : n est en **année**, alors la **période** $P = 100$.

b- Intérêts composés :

Un placement est fait à intérêt composé, lorsque, à la fin de chaque unité de temps, l'intérêt est ajouté au capital pour produire un intérêt à son tour, pendant l'unité de temps suivante.

Sa formule est :

$$I_n = C_0 \left[(1 + i)^n - 1 \right] = (\text{Capital initial}) \left[(1 + \text{taux d'intérêt})^{\text{Durée}} - 1 \right]$$

NB :

- 1 an = 2 semestres = 4 trimestres = 12 mois.
- 1 semestre = 2 trimestres = 6 mois = $\frac{1}{2}$ an.

➤ 1 trimestre = $\frac{1}{2}$ semestre = 3 mois = $\frac{1}{4}$ an.

➤ 1 bi - an = 4 semestres = 8 trimestres = 24 mois = 2 ans.

c- Valeurs acquises :

$$C_n = C_0 (1 + i)^n = (\text{Capital initial}) (1 + \text{Taux d'intérêt})^{\text{Durée}}$$

NB :

Le taux d'intérêt s'exprime toujours en pourcentage (%)

2) Taux de décroissance - Taux d'accroissement d'une population :

a- Notion de population et d'individu :

L'ensemble sur le quel porte une étude statistique est appelé **population** et un élément de cet ensemble est l'**individu**.

NB :

Dans une étude statistique, les mots : population et individu peuvent désigner des **êtres**, des **objets animés** ou **inanimés**.

b- Taux de décroissance d'une population :

Définition :

Soit (en %) est le taux de décroissance d'une population et U_P la population initiale à l'année n, alors le taux de décroissance de cette population représente une progression géométrique de premier terme U_P et de raison $q = 1 - t$.

Ainsi le taux de décroissance d'une population à l'année n est donné par l'expression :

$$U_n = U_P (1 - t)^{n-P} \text{ ou } U_n = U_P (q)^{n-P} \text{ avec } q = 1 - t.$$

NB :

Si la population initiale est U_P à l'année n_1 , alors la population à l'année n_2 est :

$$U_{n_2-n_1} = U_P (1 - t)^{(n_2-n_1)-P} \text{ ou } U_{n_2-n_1} = U_P (q)^{(n_2-n_1)-P} \text{ avec } q = 1 - t$$

c- Taux d'accroissement d'une population :

Définitions :

Définition 1 : Soit (en %) est le taux d'accroissement d'une population et U_p la population initiale à l'année n , alors le taux d'accroissement de cette population représente une progression géométrique de premier terme U_p et de raison $q = 1 + t$.

Ainsi le taux d'accroissement d'une population à l'année n est donné par l'expression :

$$U_n = U_p (1 + t)^{n-p} \quad \text{ou} \quad U_n = U_p (q)^{n-p} \quad \text{avec } q = 1 + t.$$

NB :

Si la population initiale est U_p à l'année n_1 , alors la population à l'année n_2 est :

$$U_{n_2-n_1} = U_p (1 + t)^{(n_2-n_1)-p} \quad \text{ou} \quad U_{n_2-n_1} = U_p (q)^{(n_2-n_1)-p} \quad \text{avec } q = 1 + t$$

Définition 2 : Si r exprimé (en FCFA) est la raison d'accroissement d'une population et u_p la population initiale à l'année n , alors la raison d'accroissement de cette population représente une progression arithmétique de premier terme u_p et de raison r .

Ainsi la raison d'accroissement d'une population à l'année n est donnée par l'expression :

$$u_{n+1} - u_n = r$$

Evaluation1

Ali a reçu de son père une somme de 100.000 FCFA.

Après réception, il dépose cette somme à la banque le 1^{er} Janvier 2009 à intérêt composé au taux annuel de 5 % en vue d'acheter une moto à 300000 FCFA.

1. A partir de quelle année pourra-t-il acheter sa moto sachant qu'il ne dispose que de cette somme ?
2. Quelle serait la nouvelle valeur acquise par Ali s'il place un capital de 100.000 FCFA au bout de 30 semestres au taux de 2 % par semestre ?

Evaluation2

Le premier Janvier 2011, le nombre d'élève d'une école était de 6000 .

Le nombre d'élève de cette école diminue chaque année de 5 % faute de performance.

Quelle sera le nombre d'élève de cette école au 1^{er} Janvier 2015 ?

Evaluation3

Le premier Janvier 2012, le prix d'essence au Mali était de 690 FCFA.

a- Sachant que le prix du litre subit une augmentation de 5 FCFA au 1^{er} Janvier de chaque année, calculer le prix du litre d'essence au premier Janvier 2013 ? Au premier Janvier 2014 ?

b- Soit p_n le prix du litre d'essence au premier Janvier + n , calculer : P_n et $p_{n+1} - p_n$ puis en déduire la nature et la raison de la suite p_n

Synthèse 1 :

a-Déterminons le temps au bout duquel Ali pourra acheter sa moto.
Soient :

- $C_0 = 100.000$ FCFA : le capital initial.
- $C_n = 300.000$ FCFA : la valeur acquise.
- $i = 5 \% = \frac{5}{100} = 0,05$: le taux d'intérêt.

Calculons ainsi la durée n pour que Ali puisse acheter sa moto.

$$\text{On a : } C_n = C_0 (1+i)^n \Leftrightarrow (1+i)^n = \frac{C_n}{C_0} \Rightarrow (1+0,05)^n = \frac{300000}{100000} \\ = (1,05)^n = 3 \text{ (or } a^n = e^{n \ln a} \text{)}$$

$$(1,05)^n = 3 \Leftrightarrow e^{n \ln(1,05)} = 3 \text{ (or } e^a = b \Leftrightarrow a = \ln b \text{)}$$

$$e^{n \ln(1,05)} = 3 \Leftrightarrow n \ln(1,05) = \ln 3 \Rightarrow n = \frac{\ln 3}{\ln(1,05)}$$

$$\Rightarrow n = \frac{1,09}{0,04} \Rightarrow n = 27,25 \approx 27.$$

Donc Ali pourra acheter sa moto au bout de 27 ans.

b-Déterminons la nouvelle valeur acquise par Ali au bout de 30 semestres au taux de 2 %.

$$C_n = C_0 (1+i)^n \Rightarrow C_{30} = 100.000 (1+2\%)^{30} \Rightarrow C_{30} = 100.000 (1+0,02)^{30} \\ \Rightarrow C_{30} = 100.000 (1,02)^{30} = 181.136 \text{ FCFA.}$$

Donc Ali aura une valeur acquise de 181.136 FCFA au bout de 30 semestres.

Synthèse 2

Soit U_n le nombre d'élève de cette école au 1^{er} Janvier de l'année n .

Soit $U_1 = 6000$ le nombre d'élève de cette école au 1^{er} Janvier 2011.

On a :

$$U_1 = 6000.$$

$$U_2 = U_1 - 5\% U_1 \Rightarrow U_2 = U_1 (1 - 5\%) = U_1 \left(1 - \frac{5}{100}\right) = U_1 (0,95)$$

$$U_3 = U_2 (0,95)$$

...

$$\begin{array}{c} \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \\ U_{n+1} = U_n(0,95) \end{array}$$

$$= > \frac{U_{n+1}}{U_n} = 0,95.$$

Alors on a : une suite géométrique de raison $q = 0,95$.

D'où son expression est : $U_n = U_1(q)^{n-1} = 6000(0,95)^{n-1}$

Déterminons ainsi le nombre d'élève de cette école au 1^{er} Janvier 2015 :

- Au 1^{er} Janvier 2015

On sait que : $U_n = 6000(0,95)^{n-1}$ et $n = 2015 - 2011 = 4$

D'où la population au 1^{er} Janvier 2015 est : $U_4 = 6000(0,95)^{4-1} = 6000(0,95)^3$

$$= > U_4 = 5144,25 \approx 5144$$

Ainsi l'effectif de l'école serait de 5144 élèves au 1^{er} Janvier 2015.

Synthèse 3 :

a- Sachant que le prix du litre subit une augmentation de 5 FCFA au 1^{er} Janvier de chaque année, calculons le prix du litre d'essence au premier Janvier 2013 ? Au premier Janvier 2014 ?

Soit $P_0 = 690$ FCFA le prix initial de l'essence au 1^{er} Janvier 2012.

Au 1^{er} Janvier 2013, on a : $P_1 = P_0 + 5 = > P_1 = 690 + 5 = 695$ FCFA.

Au 1^{er} Janvier 2014, on a : $P_2 = P_1 + 5 = > P_2 = 695 + 5 = 700$ FCFA.

b- Si p_n est le prix du litre d'essence au premier Janvier + n , calculons : p_n et $p_{n+1} - p_n$ puis en déduisons la raison et la nature de la suite p_n .

On sait que :

$$P_0 = 690.$$

$$P_1 = P_0 + 5.$$

$$P_2 = P_1 + 5.$$

$$P_3 = P_2 + 5.$$

$$\begin{array}{c} \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}$$

$$p_n = p_{n-1} + 5n$$

Alors $p_n = P_0 + 5n$

Calculons $p_{n+1} - p_n$

On sait que $p_n = P_0 + 5n \Rightarrow p_{n+1} = P_0 + 5(n+1) = P_0 + 5n + 5$.

Alors $p_{n+1} - p_n = (P_0 + 5n + 5) - (P_0 + 5n) = P_0 + 5n + 5 - P_0 - 5n = 5$

$\Rightarrow p_{n+1} - p_n = 5$.

Déduction :

p_n est

EXERCICES