# KIT du BAC 1

# Maths

## Annales

SUJETS + CORRIGÉS

1re D

- Sujets du Bac1-D (plus de 50 exercices)
- Tous les Corrigés détaillés et Commentés proposés par les Profs correcteurs du BAC
- 20 Epreuves de synthèses pour s'entrainer


*Suivi éditorial :*
**Victor Aménou LADJEKPO**
Ingénieur en technologie de l'éducation
Concepteur du projet kit du succès
*Professeur au cours secondaire*



Editions Bénies

Collection KIT du SUCCES

*Spécial Examen*

**KIT-BAC-1**

# MATHÉMATIQUES

# 1re D

*« Il n'y a que deux jours dans l'année*
*où rien ne peut-être fait...*
*Le premier se nomme Hier et l'autre se nomme Demain.*
*Aujourd'hui est donc le bon jour pour aimer,*
*pour croire et pour vivre. »*

EDITIONS BÉNIES
SUCCÈS PLUS

Code : KIT-1809-TG

Dialoguez avec nous sur whatsapp : +228-9028-9916

# Remerciements

Toute notre gratitude à l'Inspecteur **PERE Talaki**, Directeur Régional de l'Education Golfe-Lomé; à l'Inspecteur **NOUWOSSAN Eloi**, chargé des Mathématiques à l'Inspection de l'Enseignement Secondaire Générale de Lomé Golfe-Ouest.

Nous tenons à remercier très sincèrement, les collègues professeurs des Collèges et Lycées de HAHO ayant participé à la formation PAREC, projet de formation des professeurs de Sciences Physiques à l'ENI de Notsè dont la dernière phase s'est tenue du 26 au 30 décembre 2016.

AGBO Komlan, CEG Haïto
AKPO Kossivi, Lycée Tado
ANAGO AménYo Komi, CEG Tohoun
ANDJAO Massama-Esso, Lycée Kpédomé
ASSOUBA Kossi Ohoufodji, Lycée Kpégno
AZIABOU Komi, Lycée Kpégno
BLEWUSSI Dotse, Lycée Wahala
DAKPE Yaovi Kodégno, CEG Détokpo
DJATO Kondi, CEG Notsè Ville 1
DORKE Mihéayé Yawo, CEG Détokpo
GBELI Piyabalo, CEG Ahassomé
KALINDJA N'ponada, CEG Notsè Ville 3
KOUTELE N'Tchédéwè, CEG Notsè Ville 2
LADJEKPO Yawovi A., CEG Amakpapé
LAMADOKOU Koffi Kouma, CEG Kpégadje
N'KOUNOU Kojo, Lycée Wahala
PAYARO Kpatcha, Lycée Kpèlè
SOGBOHOE Kossivi, CEG Notsè Ville 3
SOVI K. Mensah, Lycée Hahomégbé
TCHAVA A. Essowè, CEG Alati-Kpota
TCHIA-SEMELI A'saad, CEG Saligbé
TROM-DEGBOVI Koku Mawuli, Lycée de Kpekleme
TSOGBE Komi, CEG Notsè Ville 2
YAOU A. Pahéou-Esso, CEG Batoumé

# Annales

# KIT du BAC

## 1re série D

EXAMENS

## MATHS

- 14 épreuves d'Examen corrigées
- 17 sujets proposés { 34 exerces + 17 problèmes non corrigés)
- *Corrigés largement détaillés et commentés*

CORRIGES

**Les éditions Bénies du Togo**

**Victor Aménou LADJEKPO**
Master en Education (M.A)
Option: *Technopédagogie*
*Ingénierie de la e-Formation*
Enseignant au secondaire

**CONTACTS – PROMOTEUR**

Annales KIT du BAC
BP: 2218 LOME
Tel. +228 90 28 99 16 / 98 48 99 22
E-mail: editionsbenies@gmail.com
Disponible dans toutes les librairies

# Sommaire


| N° | | Sujets | Corrigé |
|---|---|---|---|
| 1 | Examen du Bac1- 2008, session normale, série D | 6 | 8 |
| 2 | Examen du Bac1- 2009, session normale, série D | 22 | 24 |
| 3 | Examen du Bac1- 2010, session normale, série D | 37 | 40 |
| 4 | Examen du Bac1- 2011, session normale, série D | 50 | 53 |
| 5 | Examen du Bac1- 2012, session normale, série D | 66 | 68 |
| 6 | Examen du Bac1- 2013, session normale, série D | 80 | 82 |
| 7 | Examen du Bac1- 2014, session normale, série D | 94 | 96 |
| 8 | Examen du Bac1- 2015, session normale, série D | 108 | 110 |
| 9 | Examen du Bac1- 2016, session normale, série D | 120 | 122 |
| 10 | Examen du Bac1- 2017, session normale, série D | 132 | 134 |
| 11 | Examen du Bac1- 2018, session normale, série D | 143 | 146 |
| | + 20 SUJETS ET PROBLEMES D'ENTRAINEMENT | 156 | -- |


**Les annales KIT sont disponibles pour toutes les classes d'examen.**
**Achetez la qualité à des prix légers, légers**

Les Annales KIT du CEPD ▶ En deux livres : Sujets+ Corrigés
Les Annales KIT du BEPC ▶ Maths+PC+SVT + HG + Anglais+Fr
KIT du BAC-1 série D et C4 ▶ (Math + Physique Chimie + SVT+Fr)
KIT du BAC-2 série D et C4 ▶ (Math + PC +SVT + Fr+Philo)

**Contactez-nous au 90289916 ou 98489922 / 90575048**

« Tout le monde est un génie,
mais si vous jugez un poisson sur
ses capacités à grimper un arbre,
il passera sa vie à croire qu'il est stupide »
Albert Einstein

Maquette de couverture : **AFRICA-TICE**
Maquette intérieure et mise en page : **PAO** *Flammes Informatiques*
Saisi des Textes : TCHAMÉGNON Komlan Apélété
Coordination éditoriale : *Victor Aménou* LADJEKPO
Attaché à la publication : *Emmanuel* AZIAFON
Suivi éditorial : Assogbavi *Koffi Edem*
Éditions : Bénies du TOGO
Collection : *Flammes du Succès*

Ce livre est enregistré au BUTODRA sous le numéro : OL 933

© 2018, Les Éditions Bénies® - Spécial Examen
**Annales • KIT du BAC 1 • Maths Premieres D**
Dépot légal éditeur : Septembre 2018
07 BP : 12105 Lomé (TOGO)
Cel: 90 28 99 16 / 98 48 99 22
e-mail : edtionsbenies@gmail.com

**ISBN : 979-10-91770-29-3** **N° édiition : 1109-2018** **Collection : 30**

*Toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement des auteurs ou de leurs ayants droit ou ayants cause, est illicite donc rigoureusement interdite.*

*Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit : photocopie, microfilm, bande magnétique, disque ou autre, constituerait donc une contrefaction passibles des peines prévues par la loi n°91-92 du 10 juin 1991 sur la protection des droits d'auteur en République Togolaise.*

# 1 Epreuve de Maths ♦ Bac 1 Série : D ♦ 2008

## EXERCICE 1

On considère un triangle **ABC** tel que : **AB** = 7 ; **BC** = 4 et **AC** = 5.

1. Soit **I** le milieu de [BC]. Montrer que **AI** = $\sqrt{33}$.

2.a) Soit **M** un point du plan. Pour quelles valeurs du réel $m$ le vecteur $m\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ est-il égal à un vecteur $\vec{U}$ indépendant du point **M** ?

Déterminer alors le vecteur $\vec{U}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AI}$.

b) Déterminer et construire l'ensemble (**E**) des points **M** du plan tels que :

$-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = -58$.

3. Soit **D** le barycentre du système $\{(A ; -1) ; (B ; 1) ; (C ; 1)\}$.

a) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier votre réponse.

b) Déterminer et construire l'ensemble (**F**) des points **M** du plan tels que :

$-MA^2 + MB^2 + MC^2 = -25$.

## EXERCICE 2

On considère la suite **U** définie par :

$U_1 = \frac{3}{2}$ et $U_{n+1} = \frac{2}{3-U_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

1° Calculer $U_2$, $U_3$ et $U_4$.

La suite est-elle arithmétique ? Est-elle géométrique ?

2°a) Montrer que pour tout entier naturel $n$ différent de zéro, $1<U_n<2$.

b) Démontrer que la suite **U** est décroissante.

3° Soit **V** la suite numérique définie pour tout entier naturel $n$ non nul par :

$$g(x) = ax+b+\frac{c}{x-1}+\frac{d}{(x-1)^2}$$

b) En déduire que la droite (Δ) d'équation $y=x+2$ est une asymptote à la courbe (𝒞).

c) Etudier les positions relatives de (𝒞) et de (Δ).

d) Montrer que la courbe (𝒞) admet une autre asymptote (D) que l'on précisera.

e) Tracer les droites (Δ), (D) et la courbe (𝒞).

Partie C

On considère la fonction h de ℝ vers ℝ définie par : $h(x) = \frac{|x|^3}{(|x|-1)^2}$.

1° Donner l'ensemble de définition de $h$ puis étudier la parité de $h$.
2° Donner le plus ensemble sur lequel $h$ et g coincident.
3° Tracer la représentation graphique (Γ) de la fonction $h$ dans le même repère que (𝒞).

## CORRIGE ♦ BAC 1-D ♦ 2008

### Exercice 1 — Corrigé proposé

**1° Montrons que AI = $\sqrt{33}$.**

*[AI]* est la médiane issue du sommet A.

$$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \quad \text{Donc, } AI^2 = AB^2+\frac{1}{4}BC^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$$

Ainsi, en appliquant le théorème des médianes on a :

$$AB^2+AC^2 = 2AI^2+\frac{BC^2}{2} \quad \text{donc,} \quad AI^2 = \frac{AB^2+AC^2}{2}-\frac{BC^2}{4}$$

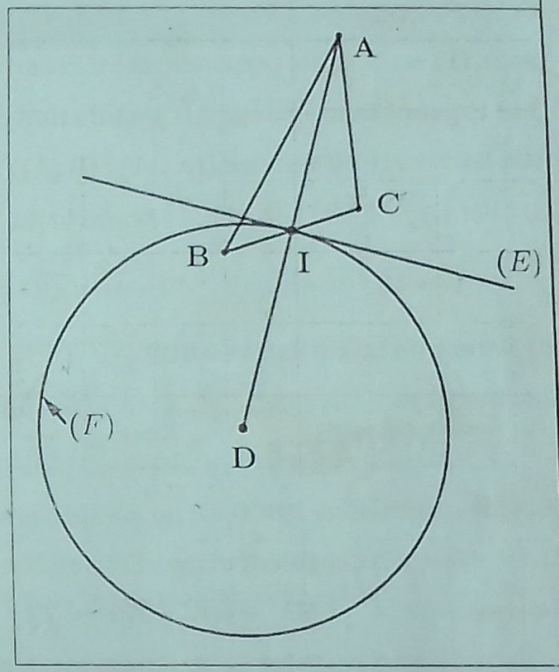
Puisque $AB^2 = 49$ ; $BC^2 = 16$ et $AC^2 = 25$

$AI^2 = \frac{49+25}{2}-\frac{16}{4} = 33$. D'où : $\boxed{AI = \sqrt{33}}$





Le triangle ABC est tel que : AB = 7 ; BC = 4 et AC = 5.
Le point I est le milieu de [BC].




**2.a) Recherche des valeurs du réel $m$**

Le vecteur $m\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ est indé-pendant de M lorsque le système de points pondérés {(A,m) ; (B,1) ; (C,1)} n'existe pas.

U est indépendant de $m$ si $m+1+1=0 \Rightarrow m+2=0$

$\Rightarrow \boxed{m_{.} = -2}$

Donc pour $m=-2$, U est indépendant de M.

* **Déterminons alors le vecteur $\vec{U}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AI}$.**

$$\overrightarrow{U} = -2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MI}-2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}$$

Alors $\overrightarrow{U}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Comme I milieu de [BC] donc : $\boxed{\vec{U}=2\overrightarrow{AI}}$

**b) Déterminons et construisons l'ensemble (E)**

$-2MA^2+MB^2+MC^2 = -58 \Rightarrow -2MA^2+\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)^2=-58$

$\Rightarrow -2MA^2+2MA^2+AB^2+AC^2+2\overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=-58$

$\Rightarrow AB^2+AC^2+2\overrightarrow{MA}\left(2\overrightarrow{AI}\right) = -58$ Or, $AB^2+AC^2 = 49+25 = 74$

$\Rightarrow -4\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AI} = -132 \Rightarrow \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AI} = 33$

En introduisant I, alors on a : $(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IM})\cdot\overrightarrow{AI} = 33 \Rightarrow AI^2+\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AI} = 33$

$V_n = \dfrac{-1+U_n}{2-U_n}$.

**a)** Montrer que la suite **V** est bien définie pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$.

**b)** Montrer que **V** est une suite géométrique.

**c)** Exprimer, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, $V_n$ et $U_n$ en fonction de $n$.

**d)** Calculer, en fonction de $n$, la somme $S_n = V_1 + V_2 + ..... + V_{n-1}$.

**e)** Déterminer la limite de $V_n$ et celle de $S_n$.

## PROBLEME

**Partie A** Soit $m$ un nombre réel.

On considère la fonction $f_m$ telle que: $f_m(x) = \dfrac{x^3}{(x+m)^2}$ et $(\mathscr{C}_m)$ sa courbe représentative dans un repère ortho-normé (O, I, J).

**1°** Déterminer l'ensemble de définition $D_m$ de $f_m$.

**2°** Calculer les limites de $f_m$ aux bornes de $D_m$.

(Pour cela, on distinguera trois cas : $m<0$ ; $m=0$ et $m>0$ )

**3°a)** Calculer la dérivée $f'_m$ de $f_m$ et montrer que pour tout $x$, de $D_m$ :

$f'_m(x) = \dfrac{P_m(x)}{(x+m)^3}$ où $P_m$ est une fonction numérique que l'on déterminera.

**b)** Etudier le sens de variation de la fonction $f_m$ puis dresser son tableau de variation. (On disctutera suivant le signe de $m$ ).

**Partie B**

On suppose que $m=-1$ et on considère la fonction $g = f_{-1}$ et $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O, I, J).

**1°** Expliciter la fonction g.

**2°** En exploitant les résultats de la partie A, donner le sens de variation de la fonction g, dresser son tableau de variation.

**3°a)** Déterminer les nombres réels $a$, $b$, $c$ et $d$ tels que

Or, $AI^2 = 33$ alors $33+\vec{IM}\cdot\vec{AI} = 33 \Rightarrow \vec{IM}\cdot\vec{AI} = 0$

Donc, (E) est la droite perpendiculaire à la droite (AI) passant par I.

**3.a) Exprimons le vecteur $\vec{AD}$ en fonction de $\vec{AI}$.**

D le barycentre du système {(A ; -1) ; (B ; 1) ; (C ; 1)}.

$D=\text{bar}\{(A;-1)(B;1)(C;1)\}$ *équivaut à* $-\vec{DA}+\vec{DB}+\vec{DC}=\vec{0}$

$-\vec{DA}+\vec{BA}+\vec{AD}+\vec{CA}+\vec{AD}=\vec{0} \Rightarrow \vec{AD}=\vec{AB}+\vec{AC} \Rightarrow \boxed{\vec{AD} = 2\vec{AI}}$

**b) Nature du quadrilatère ABCD.**

$D=\text{bar}\{(A;-1)(B;1)(C;1)\} \Rightarrow -\vec{DA}+\vec{DB}+\vec{DC}=\vec{0}$

$\Rightarrow \vec{AD}+\vec{DB}+\vec{DC}=\vec{0} \Rightarrow \vec{AB}+\vec{DC}=\vec{0} \Rightarrow \vec{AB}=\vec{CD}$

Donc, le quadrilatère **ABCD** est un parallélogramme.

**c) Déterminons et construisons l'ensemble (F)**

Nous avons : $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = -25$

En introduisant le point D et après développement et simplification on obtient : $MD^2 - DA^2 + DB^2 + DC^2 = -25$

Comme ABDC est un parallélogramme, I est milieu de la diagonale [AD] et AD = 2AI ; DB = AC ; DC = AB.

D'où, on a : $MD^2 - (2AI)^2 + AC^2 + AB^2 = -25$

équivaut à $MD^2 - 4(33) + 25 + 49 = -25$

$MD^2 = 33$ devient $MD = \sqrt{33}$. Or, $AI = ID = \sqrt{33}$

D'où, l'ensemble (F) est le cercle de centre D passant par I.





## Exercice 2 — Corrigé proposé

La suite U définie par : $U_1 = \frac{3}{2}$ et $U_{n+1} = \frac{2}{3-U_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

**1° Calculons $U_2$, $U_3$ et $U_4$.**

$U_2 = \frac{2}{3-\frac{3}{2}} = \frac{2}{\frac{6-3}{2}}$ D'où : $\boxed{U_2 = \frac{4}{3}}$

$U_3 = \frac{2}{3-\frac{4}{3}} = \frac{2}{\frac{9-4}{3}}$ D'où : $\boxed{U_3 = \frac{6}{5}}$

$U_4 = \frac{2}{3-\frac{6}{5}} = \frac{2}{\frac{15-6}{5}}$ D'où : $\boxed{U_4 = \frac{10}{9}}$

*** Justifions que la suite U n'est ni arithmétique, ni géométrique**

En plus, $U_2-U_1 = \frac{4}{3}-\frac{3}{2} = -\frac{1}{6}$ et $U_3-U_2 = \frac{6}{5}-\frac{4}{3} = -\frac{2}{15}$

Puisque $U_2-U_1 \neq U_3-U_2$, donc, la suite **U** n'est pas une suite arithmétique.

De même $\frac{U_2}{U_1} = \frac{4}{3}\div\frac{3}{2} = \frac{8}{9}$ et $\frac{U_3}{U_2} = \frac{6}{5}\div\frac{4}{3} = \frac{9}{10}$

Puisque $\frac{U_2}{U_1} \neq \frac{U_3}{U_2}$, donc, la suite **U** n'est pas aussi une suite géométrique.

**2°a) Montrons que pour tout entier naturel $n \neq 0$, $1<U_n<2$.**

▶ **initialisation :** $U_1 = \frac{3}{2}$, $U_1 \in ]1;2[$ donc, $1 < U_1 < 2$

*La proposition est vraie au rang 1.*

▶ Supposons que pour un rang $k$, $k \geq 1$ alors $1 < U_k < 2$
et démontrons que la proposition est vraie au rang $k+1$
c'est-à-dire $1 < U_{k+1} < 2$

A partir de $U_k \in ]1;2[$ donc, $1 < U_k < 2$. On a successivement :

$-2 < -U_k < -1 \Leftrightarrow 1 < 3-U_k < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{3-U_k} < 1$

**PROBLEME** — Corrigé proposé

**1° Déterminons l'ensemble de définition $D_m$ de $f_m$.**

$f_m(x) = \dfrac{x^3}{(x+m)^2}$. $D_m = \{x \in \mathbb{R}, \text{ tel que } (x+m)^2 \neq 0\}$

Posons $x+m=0$ *équivaut à* $x=-m$.

Le domaine recherché est : $\boxed{D_m = ]-\infty;-m[ \cup ]-m;+\infty[}$

**2° Calculons les limites de $f_m$ aux bornes de $D_m$.**

▸ $\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} x$

D'où : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f_m(x) = -\infty}$

▸ $\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x$

D'où : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f_m(x) = +\infty}$

▸ $\lim\limits_{x\to-m} f_m(x) = \lim\limits_{x\to-m}\left[\dfrac{-m^3}{(x+m)^2}\right]$. Ici, on distinguera trois cas pour la limite.

▸ 1er cas : $m<0$

$m<0 \Rightarrow -m^3>0$

$\boxed{\lim\limits_{x\to-m} f_m(x) = +\infty}$

▸ 2e cas : $m=0$

$m=0 \Rightarrow f_0(x)=x$

$\boxed{\lim\limits_{x\to0} f_0(x) = 0}$

▸ 3e cas : $m>0$

$m>0 \Rightarrow -m^3<0$

$\boxed{\lim\limits_{x\to-m} f_m(x) = -\infty}$

**3°a) Calculons la dérivée $f'_m$ de $f_m$ et montrons que $f'_m(x) = \dfrac{P_m(x)}{(x+m)^3}$**

$f_m$ est dérivable sur $]-\infty;-m[ \cup ]-m;+\infty[$

$$f'_m(x) = \frac{3x^2(x+m)^2 - 2(x+m)\times(x^3)}{(x+m)^4} = \frac{(x+m)[3x^2(x+m)-2x^3]}{(x+m)^4}$$

$$f'_m(x) = \frac{(x+m)(x^3+3mx^2)}{(x+m)^4} = \frac{x^3+3mx^2}{(x+m)^3}$$





D'où : $\boxed{f'_m(x) = \dfrac{x^3+3mx^2}{(x+m)^3}}$ avec $P_m(x) = x^3+3mx^2$

**b) Etude du sens de variation dressons son tableau de variation suivant le signe de $m$.**

Posons $f'_m(x) = 0$ *équivaut à* $P_m(x) = x^3+3mx^2 = 0$.

$P_m(x) = 0$ équivaut à $x^2(x+3m)=0 \Rightarrow x^2=0$ ou $x+3m=0$

*équivaut à* $x=0$ ou $x=-3m$

Etude du 1er cas : $m<0$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $-m$ | | $-3m$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'_m(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

▸ Pour $x \in ]-\infty;0[ \cup ]0;-m[ \cup ]-3m;+\infty[$, $f'_m(x) > 0$

$f_m$ est strictement croissante sur $]-\infty;-m[$ et $]-3m;+\infty[$.

▸ Pour $x \in ]-m;-3m[$, $f'_m(x) < 0$

$f_m$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]-m;-3m[$.

▸ Pour $x \in \{0;-3m\}$ ; alors $f'_m(x) = 0$

Le tableau de variation

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $-m$ | | $-3m$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'_m(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f_m(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $-\frac{27m}{4}$ | ↗ | $+\infty$ |

$1 < \dfrac{2}{3-U_k} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < U_{k+1} < 2$

*La proposition est vraie au rang* $k+1$.

▶ *Conclusion* : Pour tout entier naturel $n \neq 0$, $1 < U_n < 2$.

**b) Démontrons que la suite U est décroissante.**

$$U_{n+1}-U_n = \frac{2}{3-U_n} - U_n = \frac{U_n^2-3U_n+2}{3-U_n} = \frac{(U_n-1)(U_n-2)}{3-U_n}$$

$1 < U_n < 2$ alors $\begin{cases} U_n-1 > 0 \\ U_n-2 < 0 \\ 3-U_n > 0 \end{cases}$ ceci implique $\dfrac{(U_n-1)(U_n-2)}{3-U_n} < 0$

Donc, $U_{n+1}-U_n < 0$. La suite U est par conséquent décroissante.

Autre méthode : En observant $U_1 = \dfrac{3}{2}$, $U_2 = \dfrac{4}{3}$, $U_3 = \dfrac{6}{5}$, $U_4 = \dfrac{10}{9}$

on remarque que $U_1 < U_2 < U_3 < U_4$ donc, U est une suite décroissante.

**3° a) Montrons que la suite V est bien définie pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$.**

La suite V est définie si et seulement si $2-U_n \neq 0$ c'est-à-dire $U_n \neq 2$

Or d'après ce qui précède $U_n < 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2-U_n > 0$

On en déduit que $2-U_n \neq 0$, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$.

La suite V est bien définie pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$.

**b) Montrons que V est une suite géométrique.**

$$* \quad V_n = \frac{-1+U_n}{2-U_n} \qquad \text{Donc,} \qquad V_{n+1} = \frac{-1+U_{n+1}}{2-U_{n+1}} = \frac{-1+\dfrac{2}{3-U_n}}{2-\dfrac{2}{3-U_n}}$$

$$V_{n+1} = \frac{-3+U_n+2}{6-2U_n-2} = \frac{-1+U_n}{4-2U_n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(-1+U_n)}{(2-U_n)}. \quad \text{Donc,} \quad \frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{1}{2}$$





V est une suite géométrique de raison $q=\dfrac{1}{2}$ premier terme $V_1=1$

**c) Exprimons, pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, $V_n$ et $U_n$ en fonction de $n$.**

$$* \quad V_n = V_1 \times q^{n-1} = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \qquad \text{D'où :} \qquad \boxed{V_n = \frac{1}{2^{n-1}}}$$

$$* \quad V_n = \frac{-1+U_n}{2-U_n} \qquad V_n(2-U_n) = -1+U_n$$

$$2V_n - V_nU_n = -1+U_n \qquad U_n(1+V_n) = 2V_n+1$$

$$U_n = \frac{2V_n+1}{V_n+1} \quad \text{donc,} \quad U_n = \frac{2\left(\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)+1}{\dfrac{1}{2^{n-1}}+1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_n = \frac{2+2^{n-1}}{1+2^{n-1}}}$$

**d) Calculons, en fonction de $n$, la somme $S_n = V_1+V_2+.....+V_{n-1}$.**

Nous avons : $S_n = V_1 \times \dfrac{1-q^{n-1}}{1-q} = 1 \times \dfrac{1-\dfrac{1}{2^{n-1}}}{1-\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1-\dfrac{1}{2^{n-1}}}{\dfrac{1}{2}}$

Il vient : $\boxed{S_n = 2\times\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)}$

**e) Déterminons la limite de $V_n$ et celle de $S_n$.**

$\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{-1}{2^{n-1}}\right) = 0$ D'où : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2\times\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right) = 2$ D'où : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 2}$

Etude du 2e cas : $m=0$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'_0(x)$ | + | | ‖ | | + |

$f_0$ est strictement croissante sur les intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'_0(x)$ | + | | ‖ | | + |
| $f_0(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

Etude du 3e cas : $m>0$

| $x$ | $-\infty$ | | $-3m$ | | $-m$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'_m(x)$ | + | | 0 | − | ‖ | + | 0 | + | |

- Pour $x\in]-\infty;-3m[\cup]-m;0[\cup]0;+\infty[$, $f'_m(x) > 0$

$f_m$ est strictement croissante sur $]-\infty;-3m[$ et $]-m;0[$ et $]0;+\infty[$.

- Pour $x\in]-3m;m[$, $f'_m(x) < 0$

$f_m$ est strictement décroissante sur l'intervalle $]-3m;m[$.

- Pour $x\in\{-3m;0\}$ ; alors $f'_m(x) = 0$





Voici le tableau de variation

| $x$ | $-\infty$ | | $-3m$ | | $-m$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'_m(x)$ | + | | 0 | − | ‖ | + | 0 | + | |
| $f_m(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-\frac{27m}{4}$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↗ | $0$ | ↗ | $+\infty$ |

## Partie B

**1° Explicitons la fonction g.**

On suppose que $m=-1$ et on considère la fonction $g=f_{-1}$

alors, nous avons $g(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

**2° Donnons le sens de variation de la fonction g,**

En exploitant les résultats de la partie A, $D_g = ]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

La dérivée est : $g'(x) = \dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$

Ainsi, nous nous retrouvons dans le premier cas $m<0$.

- La fonction g est strictement croissante sur $]-\infty;1[$ et $]3;+\infty[$.
- La fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $]1;3[$.

▶ **Dressons son tableau de variation.**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $-3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'_m(x)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f_m(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $-\frac{27}{4}$ | ↗ | $+\infty$ |

**3°a) Déterminons les nombres réels $a$, $b$, $c$ et $d$.**

$$g(x) = ax+b+\frac{c}{x-1}+\frac{d}{(x-1)^2} = \frac{(ax+b)(x-1)^2+c(x-1)+d}{(x-1)^2}$$

$$g(x) = \frac{ax^3+(b-2a)x^2+(a+c-2b)x+b+d-c}{(x-1)^2}$$

On identifie que : $\boxed{a=1}$ ; $-2a+b=0$ donne $\boxed{b=2}$

$a-2b+c=0$ donne $\boxed{c=3}$

Enfin $b-c+d=0$ donne $\boxed{d=1}$

On obtient : $\boxed{g(x) = x+2+\frac{3}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}}$





**b) Déduisons que la droite (Δ) d'équation $y=x+2$ est une asymptote à la courbe (𝒞).**

$$\lim_{x\to-\infty}[g(x)-(x+2)] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{3}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right] = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}[g(x)-(x+2)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right] = 0$$

La droite (Δ) d'équation $y=x+2$ est une asymptote à la courbe (𝒞) à l'infini.

**c) Etudions les positions relatives de (𝒞) et de (Δ).**

Etudiond le signe de $g(x)-(x+2) = \frac{3x-2}{(x-1)^2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{2}{3}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{3x-2}{(x-1)^2}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | |

Sur $\left]-\infty;\frac{2}{3}\right]$ ; $\frac{3x-2}{(x-1)^2}<0$ donc la courbe (𝒞) est en dessous de (Δ).

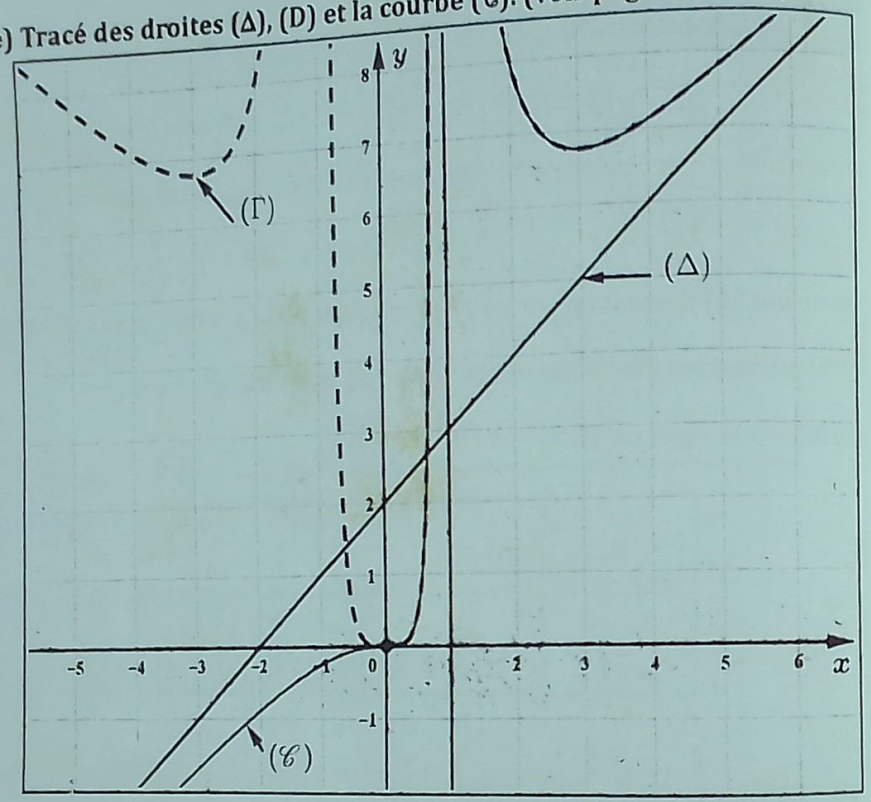
Sur $\left]\frac{2}{3};1\right[\cup]1;+\infty[$ ; $\frac{3x-2}{(x-1)^2}>0$ donc la courbe (𝒞) est au-dessous de (Δ).

**d) Montrons que la courbe (𝒞) admet une autre asymptote (D)**

$\lim_{x\to1}[g(x)] = +\infty$

On conclut que la droite (D) d'équation $x=1$ est asymptote à la courbe (𝒞)

e) Tracé des droites (Δ), (D) et la courbe (𝒞). (voir page suivante)




**Partie C**

la fonction h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $h(x) = \dfrac{|x|^3}{(|x|-1)^2}$.

**1°Donnons l'ensemble de définition de $h$ puis étudions la parité de $h$**

♦ Soit : $D_h=\{x\in\mathbb{R} \text{ tel que } |x|-1\neq 0\}$

Posons $|x|-1=0$ équivaut à $|x|=1 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$

On obtient : $D_h = ]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$





♦ Pour $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, $-x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$

$h(-x)=h(x)$ car $|-x|=|x|$ et $h$ est définie sur un intervalle centré sur 0

Donc, $h$ est paire.

**2° Donnons le plus ensemble sur lequel $h$ et g coincident.**

Pour $x\in[0;+\infty[\setminus\{1\}$, $h(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2} = g(x)$

Ainsi, h et g coincident sur l'intervalle $[0;+\infty[\setminus\{1\}$.

**3° Traçons la représentation graphique (Γ) de la fonction $h$.**

Soit $(C_1)$ = (𝒞) sur l'intervalle $[0;+\infty[\setminus\{1\}$.

et $(C_2)$ = L'image de $(C_1)$ par la symétrie orthogonale d'axe des ordonnées.

Finalement, la courbe $(\Gamma) = (C_1) \cup (C_2)$.

« *Toutes les batailles de la vie nous enseignent quelque chos même celles que nous perdons.* »
*Paulo Coelho, La cinquième montagne*

# 2 Epreuve de Maths ♦ Bac 1 Série : D ♦ 2009

## EXERCICE 1

1° $\alpha$ est un nombre réel de l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

a) Vérifier que : $\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$. En déduire la valeur de $\sin\alpha$.

b) Calculer $\cos 2\alpha$ et en déduire la valeur exacte de $\alpha$.

2° Soit (E) l'équation $x\in\mathbb{R}$, $\left[\sqrt{6}+\sqrt{2}\cos 2x+(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin 2x\right]^2 = 4$.

a) Démontrer que l'équation (E) est équivalente à $\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{4}$.

b) Résolvez alors (E) et placez les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

3° Résolvez dans $]-\pi\,;\pi[$, $\left[\sqrt{6}+\sqrt{2}\cos 2x+(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin 2x\right]^2 \geq 4$

## EXERCICE 2

ABC est un triangle rectangle en A, tel que $BC=2a$ et G le barycentre de (A ; 4), (B ; -1), (C ; 1).

1° Démontrer que G et le milieu de [BC] sont symétriques par rapport au point A.

2° Démontrer que pour tout M du plan, on a :

$$4MA^2 - MB^2 - MC^2 = 2MG^2 + 4GA^2 - GB^2 - GC^2.$$

3° Soit $(E)=\left(M\in(P) / 4MA^2-MB^2-MC^2=4a^2\right)$.

Vérifier que $A\in(E)$ ; puis déterminez et construisez l'ensemble (E).





## PROBLEME

On considère la fonction définie par : $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \frac{(-x^3+x^2-4)}{(x^2-4)}$$

Soit $(\mathscr{C})$, sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J)

**1°a)** Calculer les limites de $f$ aux bornes de son domaine de définition.

**b)** Etudier les variations de $f$ est donner son tableau de variation.

**2°a)** Ecrire $f(x)$ sous la forme de $f(x)=ax+b+\frac{cx}{x^2-4}$ où $a$, $b$ et $c$ sont des réels à déterminer.

**b)** Déterminer les asymptotes de $(\mathscr{C})$.

**c)** Soit (D) l'asymptote oblique à $(\mathscr{C})$, étudier les positions relatives de $(\mathscr{C})$ et (D).

**d)** Montrer que **A(0 ; 1)** est centre de symétrie de $(\mathscr{C})$.

**3°** Tracer $(\mathscr{C})$.

**4°** Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation :

$x\in\mathbb{R}$, $x^3+(2m-1)x^2+4(1-2m) = 0$.

**5°** On considère la fonction g définie par $g(x) = \frac{x^3+x^2-4}{x^2-4}$.

On appelle $(\Gamma)$ la courbe représentative de g dans le même repère.

**a)** Trouver une relation entre $f(x)$ et $g(x)$, $\forall x\notin\{-2\,;2\}$

**b)** Expliquer comment $(\Gamma)$ s'obtient à partir de $(\mathscr{C})$.

**c)** Tracer $(\Gamma)$ dans le même repère.

Fin

Donc, (E) : $\left[(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos 2x+(\sqrt{6}-\sqrt{2})\right]^2=4$ devient :

$$\left[4\cos 2x\cos\frac{\pi}{12}+4\sin 2x\sin\frac{\pi}{12}\right]^2=4 \Leftrightarrow 16\left[\cos\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)\right]^2=4$$

$$\left[\cos\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)\right]^2=\frac{4}{16} \Leftrightarrow \text{Il vient : } \boxed{\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{4}}$$

**2°b) Résolvons alors l'équation (E)**

$$\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{2} \text{ ou } \cos\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)=-\frac{1}{2}$$

▶ $\cos\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ \text{ou} \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ 2x-\frac{\pi}{12}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5\pi}{24}+k\pi \\ \text{ou} \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ x=-\frac{\pi}{8}+k\pi \end{cases}$$

▶ $\cos\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

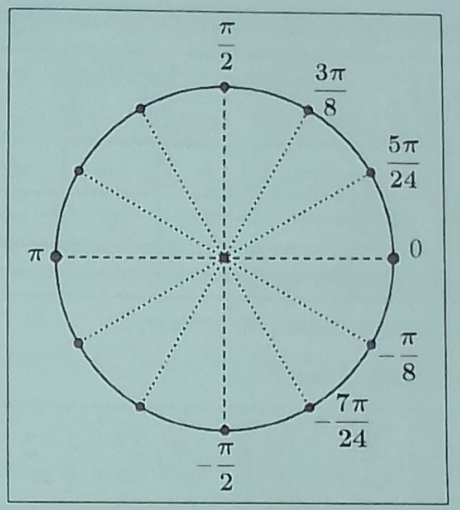
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-\frac{\pi}{12}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi \\ \text{ou} \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ 2x-\frac{\pi}{12}=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3\pi}{8}+k\pi \\ \text{ou} \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ x=-\frac{7\pi}{24}+k\pi \end{cases}$$

$$\boxed{S=\left\{\frac{-7\pi}{24}+k\pi\ ;\ \frac{-\pi}{8}+k\pi\ ;\ \frac{5\pi}{24}+k\pi\ ;\ \frac{3\pi}{8}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})\right\}}$$

**Plaçons les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.**








**3° Résolvons dans $]-\pi\,;\pi[$, l'inéquation (I) :**

On a : $\left[(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos 2x+(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin 2x\right]^2 \geq 4$

L'inéquation (I) est équivalente à $\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)\geq\frac{1}{4}$

$x\in]-\pi\,;\pi[$, $\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)-\frac{1}{4}\geq 0 \Leftrightarrow$

$$\left[\cos\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)-\frac{1}{2}\right]\left[\cos\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)+\frac{1}{2}\right]\geq 0$$

Posons $A=\cos\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)-\frac{1}{2}$ et $B=\cos\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)+\frac{1}{2}$

En effet, les racines de A sont : $\left\{\frac{-19\pi}{24}\,;\frac{-\pi}{8}\,;\frac{5\pi}{24}\,;\frac{7\pi}{8}\right\}$

De même, les racines de B sont : $\left\{\frac{-5\pi}{8}\,;\frac{-7\pi}{24}\,;\frac{3\pi}{8}\,;\frac{17\pi}{24}\right\}$

# CORRIGE ♦ BAC 1-D ♦ 2009

## Exercice 1

Corrigé proposé

1°a) Vérification :

$$\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{6-4\sqrt{3}+2}{16} = \frac{8-4\sqrt{3}}{16} = \frac{4(2-\sqrt{3})}{4\times 4}$$

D'où : $\boxed{\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}}$

Déduisons la valeur de $\sin\alpha$ .

$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$

$$\sin^2\alpha = 1-\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 1-\left(\frac{8+4\sqrt{3}}{16}\right) = 1-\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

$$\sin^2\alpha = \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2} \text{ donc, deux solutions:}$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \text{ou} \quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Or, $\alpha\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[ \Rightarrow \sin\alpha > 0 \Rightarrow \boxed{\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

b) ■ Calculons $\cos 2\alpha$ et en déduire la valeur exacte de $\alpha$ .

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 1 = 2\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right) - 1 = \frac{2+\sqrt{3}-2}{2}$$





Il vient : $\boxed{\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}}$ NB: on peut utiliser $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

■ Déduisons la valeur exacte de $\alpha$

$$\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos 2\alpha = \cos\frac{\pi}{6}$$

$$\begin{cases} 2\alpha = \frac{\pi}{6}+2k\pi \\ \text{ou} \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ 2\alpha = -\frac{\pi}{6}+2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{12}+k\pi \\ \text{ou} \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ \alpha = -\frac{\pi}{12}+k\pi \end{cases}$$

Comme $\alpha\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[ \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{12}}$

2°a) Démonstration de l'équivalence

$\left[\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)\cos 2x+\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\right]^2 = 4$

En multipliant tout par $\frac{1}{16}$ on a

$$\left[\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)\cos 2x+\frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}\sin 2x\right]^2 = \frac{4}{16}$$

$[\cos\alpha\cos 2x+\sin\alpha\sin 2x]^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos^2(2x-\alpha) = \frac{1}{4}$ Or $\alpha = \frac{\pi}{12}$

Il vient : $\boxed{\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{4}}$

■ Une autre méthode consiste à écrire :

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{6}+\sqrt{2} = 4\times\cos\frac{\pi}{12}$$

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{6}-\sqrt{2} = 4\times\sin\frac{\pi}{12}.$$

On obtient, le tableau de signe suivant, qui donne les solutions de (I).

| $x$ | $-\pi$ | $\frac{-19\pi}{24}$ | $\frac{-3\pi}{8}$ | $\frac{-7\pi}{24}$ | $\frac{-\pi}{8}$ | $\frac{5\pi}{24}$ | $\frac{3\pi}{8}$ | $\frac{17\pi}{24}$ | $\frac{7\pi}{8}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | + | 0 | − | − | − | 0 | + | 0 | − | − | − | 0 | + |
| B | + | + | 0 | − | 0 | + | + | + | 0 | − | 0 | + | + |
| I | + | 0 | − | 0 | + | 0 | − | 0 | + | 0 | + | 0 | − | 0 | + |

Les valeurs positives sont déduites du tableau :

d'où, les solutions de l'inéquation :

$$S=\left]-\pi;\frac{-19\pi}{24}\right]\cup\left[\frac{-5\pi}{8};\frac{-7\pi}{24}\right]\cup\left[\frac{-\pi}{8};\frac{5\pi}{24}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{8};\frac{17\pi}{24}\right]\cup\left[\frac{7\pi}{8};\pi\right]$$

## Exercice 2 — Corrigé proposé

**1° Démontrons que G et le milieu de [BC] sont symétriques par rapport au point A.**

$G=\text{bar}\{(A;4)(B;-1)(C;-1)\}$ implique $4\vec{GA}-\vec{GB}-\vec{GC}=\vec{0}$

Soit, I milieu de [BC] donc $\vec{IB}+\vec{IC}=\vec{0}$ et $\vec{GB}+\vec{GC}=2\vec{GI}$

$4\vec{GA}-\vec{GB}-\vec{GC}=\vec{0}$ devient $4\vec{GA}-2\vec{GI}=\vec{0}$

$\Rightarrow 4\vec{GA}-2\vec{GA}-2\vec{AI}=\vec{0} \Rightarrow 2\vec{GA}-2\vec{AI}=\vec{0} \Rightarrow -2\vec{AG}-2\vec{AI}=\vec{0}$

On obtient $\vec{AG}+\vec{AI}=\vec{0}$ qui justifie que le point **A** milieu de [GI].

On en déduit que, le point G et le milieu du segment [BC] sont symétriques par rapport au point **A**.

**2° Démontrons que $4MA^2-MB^2-MC^2=2MG^2+4GA^2-GB^2-GC^2$.**

On sait que : $MA^2=\vec{MA}^2=(\vec{MG}+\vec{GA})^2=\vec{MG}^2+\vec{GA}^2+2\vec{MG}\cdot\vec{GA}$

$MB^2=\vec{MB}^2=(\vec{MG}+\vec{GB})^2=\vec{MG}^2+\vec{GB}^2+2\vec{MG}\cdot\vec{GB}$





$MC^2=\vec{MC}^2=(\vec{MG}+\vec{GC})^2=\vec{MG}^2+\vec{GC}^2+2\vec{MG}\cdot\vec{GC}$

Après développement et simplification on obtient :

$4MA^2-MB^2-MC^2=2MG^2+4GA^2-GB^2-GC^2+2\vec{MG}(4\vec{GA}-\vec{GB}-\vec{GC})$

Or, $4\vec{GA}-\vec{GB}-\vec{GC}=\vec{0}$ car **G** le barycentre de (A ; 4), (B ; -1), (C ; 1).

Il vient : $\boxed{4MA^2-MB^2-MC^2=2MG^2+4GA^2-GB^2-GC^2}$

**3° ▶Vérifions que $A\in(E)$.**

$(E)=\{M\in(P)/4MA^2-MB^2-MC^2=4a^2\}$ ; $BC=2a$ et $(AB)\perp(AC)$

$4MA^2-MB^2-MC^2=4AA^2-AB^2-AC^2=-(AB^2+AC^2)=-BC^2=-4a^2$

On vient de vérifier ainsi que le point **A** appartient à (E).

**▶Déterminez et construisez l'ensemble (E).**

On sait que : $(E)=\{M\in(P)/4MA^2-MB^2-MC^2=-4a^2\}$

A partir de la relation établie au 2°, nous avions :

$4MA^2-MB^2-MC^2=2MG^2+4GA^2-GB^2-GC^2$

On introduit le point A : $4AA^2-AB^2-AC^2=2AG^2+4GA^2-GB^2-GC^2$

Donc, $-(AB^2+AC^2)=6GA^2-GB^2-GC^2$

Or $AB^2+AC^2=BC^2$ car le triangle ABC est rectangle en A et $BC^2=4a^2$.

Donc, $-AB^2=6GA^2-GB^2-GC^2 \Leftrightarrow -GB^2-GC^2=-BC^2-6GA^2$

Par conséquent: $2MG^2+4GA^2-GB^2-GC^2=-4a^2$

cette relation devient : $2MG^2+4GA^2-BC^2-6GA^2=-4a^2$

$2MG^2-2GA^2-4a^2=-4a^2 \Leftrightarrow 2MG^2-2GA^2=0$

Finalement : $MG=GA$

Donc, l'ensemble (E) est le cercle de centre **G** passant par **A**.

♦ **Tableau de signe de $f'$.**

| $x$ | $-\infty$ | $-2\sqrt{3}$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $2\sqrt{3}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-x^2$ | — | — | — | 0 | — | — | — |
| $x^2-12$ | + | 0 | — | — | — | 0 | + |
| $(x^2-4)^2$ | + | + | 0 | + | + | 0 | + |
| $f'(x)$ | — | 0 | + | + | 0 | + | 0 | — |

♦ **Sens de variation :**

▶ $\forall x\in]-\infty;-2\sqrt{3}[\cup]2\sqrt{3};+\infty[$, $f'(x)<0$

Donc, $f$ est strictement décroissante sur $]-\infty;-2\sqrt{3}[$ et sur $]2\sqrt{3};+\infty[$

▶ $\forall x\in]-2\sqrt{3};-2[\cup]-2;0[\cup]0;2[\cup]2;2\sqrt{3}[$ ; $f'(x)>0$

Donc $f$ est strictement croissante sur $]-2\sqrt{3};-2[$, sur $]-2;0[$, sur $]0;2[$ et sur $]2;2\sqrt{3}[$.

▶ $f(-2\sqrt{3})=1+3\sqrt{3}$ et $f(2\sqrt{3})=1-3\sqrt{3}$

♦ **Tableau de variation**

| $x$ | $-\infty$ | $-2\sqrt{3}$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $2\sqrt{3}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | — | 0 | + | + | 0 | + | + | 0 | — |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ $1+3\sqrt{3}$ | ↗ $+\infty$ | $-\infty$ ↗ 1 ↗ $+\infty$ | | $-\infty$ ↗ $1-3\sqrt{3}$ ↘ | | $-\infty$ |





**2°a) Ecrivonse $f(x)$ sous la forme de $f(x)=ax+b+\dfrac{cx}{x^2-4}$**

$$\begin{array}{r|l} -x^3+x^2-4 & x^2-4 \\ \hline -(-x^3+4x^2) & -x+1 \\ \hline x^2-4x-4 & \\ -(x^2-4) & \\ \hline -4 & \end{array}$$

$a=-1$ ; $b=1$ et $c=-4$

On peut écrire $f(x)$ sous la forme

$$f(x)=-x+1-\frac{4x}{x^2-4}$$

**b) Déterminons les asymptotes de la courbe ($\mathscr{C}$).**

▶ $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\<}} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\>}} f(x)=-\infty$

Donc, la droite $(D_1)$ d'équation $x=-2$ est asymptote verticale à $(\mathscr{C})$

▶ $\lim\limits_{\substack{x\to2\\<}} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\>}} f(x)=-\infty$

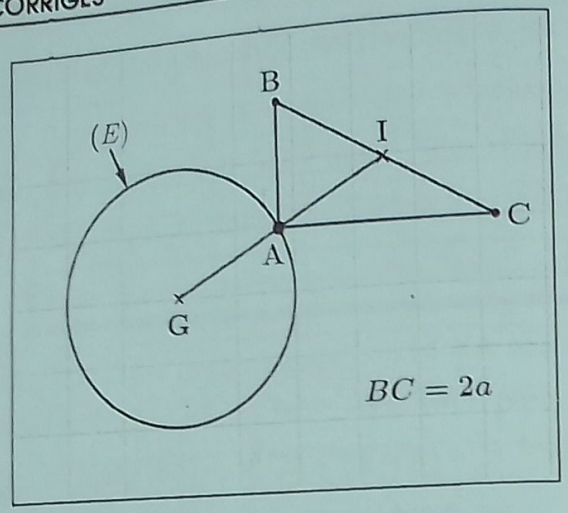
Donc, la droite $(D_2)$ d'équation $x=2$ est asymptote verticale à $(\mathscr{C})$.

▶ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{-4x}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-4x}{x^2-4}\right)=0$

D'où, la droite (D) d'équation : $y=-x+1$ est asymptote oblique à $(\mathscr{C})$ à $+\infty$ et à $-\infty$

**c) Étudions les positions relatives de ($\mathscr{C}$) et (D).**

En calculant : $f(x)-(-x+1)=\dfrac{-4x}{x^2-4}$




## Problème — Corrigé proposé

**1.a) Calcul des limites de $f$ aux bornes de son domaine de définition.**

♦ Soit : $D_f=\{x\in\mathbb{R} \text{ tel que } x^2-4\neq 0\}$

Posons $x^2-4=0$ équivaut à $x=2$ ou $x=-2$

On obtient : $\boxed{D_f=\,]-\infty;-2[\cup]-2;2[\cup]2;+\infty[}$

♦ **Limites :**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x^3}{x^2}\right)=\lim_{x\to-\infty}(-x)$$

D'où : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^3}{x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}(-x)$$

D'où : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty}$

$$\lim_{x\to-2} f(x)=\lim_{x\to-2}\left(\frac{-x^3+x^2-4}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to-2}\left[\frac{-x^3+x^2-4}{(x-2)(x+2)}\right]$$

$$\lim_{x\to-2} f(x)=\lim_{x\to-2}\left(\frac{-x^3+x^2-4}{x-2}\right)\times\lim_{x\to-2}\left(\frac{1}{x+2}\right)=-2\times\lim_{x\to-2}\left(\frac{1}{x+2}\right)$$





Nous avions : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to-2\\ <}} f(x)=+\infty}$ $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to-2\\ >}} f(x)=-\infty}$

$$\lim_{x\to2} f(x)=\lim_{x\to2}\left(\frac{-x^3+x^2-4}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to2}\left[\frac{-x^3+x^2-4}{(x-2)(x+2)}\right]$$

$$\lim_{x\to2} f(x)=\lim_{x\to2}\left(\frac{-x^3+x^2-4}{x+2}\right)\times\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{x-2}\right)=-2\times\lim_{x\to2}\left(\frac{1}{x+2}\right)$$

Nous avions : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to2\\ <}} f(x)=+\infty}$ $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to2\\ >}} f(x)=-\infty}$

**b) Etudions les variations de $f$ est donner son tableau de variation.**

♦ **Dérivée:**

La fonction est : $f(x)=\dfrac{-x^3+x^2-4}{x^2-4}$

$$f'(x)=\frac{(-3x^2+2x)(x^2-4)-2x(-x^3+x^2-4)}{(x^2-4)^2}=\frac{x^2(-x^2+12)}{(x^2-4)^2}$$

La dérivée est : $\boxed{f'(x)=\dfrac{x^2(12-x^2)}{(x^2-4)^2}}$

♦ **Signe de la dérivée :**

$f'(x)=0$ équivaut à $x=0$ ou $12-x^2=0$

équivaut à $x=0$ ou $x=-2\sqrt{3}$ ou $x=-2\sqrt{3}$

$\boxed{\text{Les solutions de l'équation sont : } \{x=0\ ;\ x=-2\sqrt{3}\ ;\ x=-2\sqrt{3}\}}$

Donc, nous consignons le signe dans le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | -2 | 0 | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-4x$ | + | + | − | − | |
| $x^2-4$ | + | − | − | + | |
| $\frac{-4x}{x^2-4}$ | + | − | + | − | |

$\forall x\in]-\infty;-2[\cup]0;2[$ ; $\frac{-4x}{x^2-4}\geq 0$ donc la courbe $(\mathscr{C})$ est au-dessus de (D).

$\forall x\in]-2;0[\cup]2;+\infty[$ ; $\frac{-4x}{x^2-4}<0$ , la courbe $(\mathscr{C})$ est en-dessous de (D)

Pour $x=0$ ; $\frac{-4x}{x^2-4}=0$ donc $(\mathscr{C})$ et (D) se coupent au point $(0;1)$.

**d) Montrons que A(0 ; 1) est centre de symétrie de $(\mathscr{C})$.**

Pour $-x\in D_f$, et $-x\in D_f$ calculons $f(x)+f(-x)$.

$$f(-x)+f(x) = x+1+\frac{4x}{x^2-4}-x+1-\frac{4x}{x^2-4} = 2 = 2\times 1$$

D'où, le point A(0 ;1) est centre de symétrie de la courbe $(\mathscr{C})$

**3° Construction de la courbe $(\mathscr{C})$ et de ses asymptotes**

**4° Déterminons graphiquement le nombre de solutions de l'équation :**

$x\in\mathbb{R}$ , $x^3+(2m-1)x^2+4(1-2m) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2m$

**Discussion :**

* Pour $m\in\left]-\infty;\frac{1-3\sqrt{3}}{2}\right[$ , on obtient trois (03) solutions.





* Pour $m\in\left]\frac{1-3\sqrt{3}}{2};\frac{1+3\sqrt{3}}{2}\right[$ , une solution.

* Pour $m\in\left]\frac{1+3\sqrt{3}}{2};+\infty\right[$ , on obtient trois (03) solutions.

* Pour $m\in\left\{\frac{1-3\sqrt{3}}{2};\frac{1+3\sqrt{3}}{2}\right\}$ , on obtient deux (02) solutions.

**5°a) Trouvons une relation entre $f(x)$ et $g(x)$ , $\forall x\notin\{-2;2\}$**

$$g(x) = \frac{x^3+x^2-4}{x^2-4} = \frac{-(-x)^3+(-x)^2-4}{(-x)^2-4} = f(-x)$$

D'où : $\forall x\notin\{-2;2\}$ ; $g(x) = f(-x)$

**b) Expliquons comment (Γ) s'obtient à partir de $(\mathscr{C})$.**

Puisque $\forall x\notin\{-2;2\}$ ; $g(x) = f(-x)$ alors la courbe (T) est l'image de la courbe $(\mathscr{C})$ par la symétrie orthogonale d'axe des ordonnées.

(Γ) = $S_{(OJ)}(\mathscr{C})$, où $S_{(OJ)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (OJ)

**c) Traçons (Γ) dans le même repère.**

3° Calculez les distances CD, BD et AD en fonction de $a$.

4° Pour tout point M du plan tels que : $f(M) = 2MA^2 - 2MB^2 - MC^2$ et on désigne par $(\Gamma)$ l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = 0$

a) Vérifiez que le point C appartient à $(\Gamma)$.

b) Exprimez $f(M)$ en fonction de MD et de $a$.

c) Déterminez et construisez $(\Gamma)$.

5° Pour tout point M du plan on pose $g(M) = 2\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{DB} + a^2$.

a) Déterminer l'ensemble $(\Delta)$ des points M du plan tels que $g(M) = a^2$.

b) Soit I le point d'intersection autre que C des ensembles $(\Gamma)$ et $(\Delta)$.

Montrez que le triangle CDI est équilatéral.

## PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). (unité 1cm).

$f$ est la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{2x^3 - 2x^2 + 27}{2x^2}$.

$(\mathscr{C})$ est la représentation graphique de $f$ dans le repère (O, I, J).

1°a) Donner l'ensemble de définition D de $f$

b) Calculer les limites de $f$ aux bornes de D.

2°a) Calculer la dérivée $f'$ de $f$.

b) Montrer que le signe de $f'(x)$, $x \in D$ est celui de la fonction U définie par : $U(x) = 4x(x^2 - 27)$. En déduire le sens de variation de $f$.

c) Dresser le tableau de variation de $f$.

3°a) Déterminer les nombres réels $a$, $b$, $c$ et $d$ tels que :





$$\forall x \in D,\ f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{2x^2}.$$

b) Montrer que la courbe admet une asymptote oblique (D) dont on précisera une équation.

c) Déterminer la position de (D) par rapport à $(\mathscr{C})$.

4°a) Construire la courbe $(\mathscr{C})$.

b) Préciser l'existence d'une autre asymptote pour la courbe $(\mathscr{C})$.

5° g est la fonction définie par : $g(x) = \dfrac{-2|x|^3 - 2x^2 + 27}{2x^2}$.

a) Etudier la parité de g.

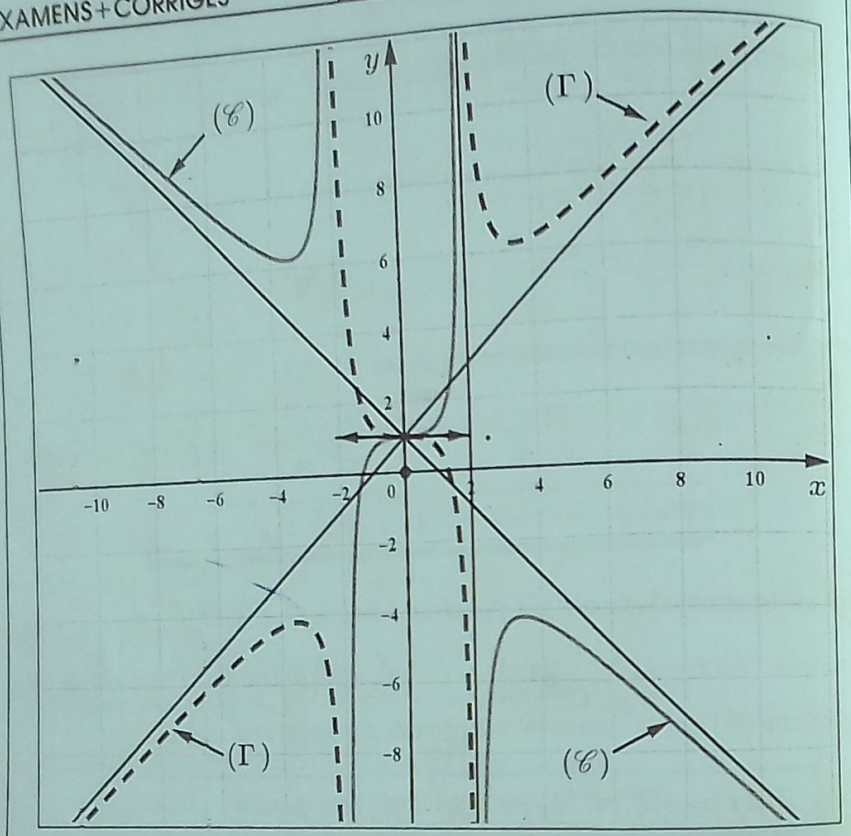
b) Montrer que $f$ et g coïncident sur un ensemble que l'on précisera.

c) Justifier sans étude, la construction de la courbe $(\mathscr{C}')$ représentative de la fonction g, puis construire $(\mathscr{C}')$.

6° A l'aide de la courbe $(\mathscr{C})$, discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel $k$, le nombre de solutions de l'équation : $2x^3 - 2(k+1)x^2 + 27 = 0$.

*****

« De toutes les armes, la plus puissante
Sera toujours l'éducation. »
Nelson Mandela




« Toutes les batailles de la vie nous enseignent quelque chos même celles que nous perdons. »
Paulo Coelho, La cinquième montagne





# 3 Épreuve de Maths ♦ Bac 1 Série : D ♦ 2010

## EXERCICE 1

On considère la suite $(U_n)$ définie par : $\begin{cases} U_0=1\ ;\ U_1=2 \\ \forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ 3U_{n+1}=5U_n-2U_{n-1} \end{cases}$

1° Calculer $U_1$, $U_2$ et $U_3$.

2° Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite définie par $V_n = U_{n+1}-U_n$.

a) Montrer que : $(V_n)$ est une suite géométrique.

Préciser la raison et le premier terme.

b) Exprimer $(V_n)$ en fonction de $n$. La suite $(V_n)$ est-elle convergente ?

c) Exprimer $S_n=V_0+V_1+\ldots+V_n$ en fonction de $n$.

3°a) Montrer que pour tout entier naturel $n$, $S_n=U_n-U_0$.

b) Déduisez-en $U_n$ en fonction de $n$. Préciser sa limite.

## EXERCICE 2

Soit ABC un triangle équilatéral de côté $a$, $a$ étant strictement positif.

1°a) Construisez le point D définie par $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

b) Démontrer que D est le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients que vous préciserez.

c) Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

2.a) Démontrer que : $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ puis que $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

b) Déduisez-en que le triangle BCD est rectangle en B.

# CORRIGE ♦ BAC 1-D ♦ 2010

## Exercice 1

Corrigé proposé

1° Calculons les réels $U_2$, $U_3$ et $U_4$.

$\begin{cases} U_0=1 ;\ U_1=2 \\ \forall n\in\mathbb{N}^*, 3U_{n+1}=5U_n-2U_{n-1} \end{cases}$ donc, on a : $U_{n+1}=\dfrac{5U_n-2U_{n-1}}{3}$

$U_2=\dfrac{5U_1-U_0}{3}$ D'où : $\boxed{U_2=\dfrac{8}{3}}$

$U_3=\dfrac{5U_2-U_1}{3}$ D'où : $\boxed{U_3=\dfrac{28}{9}}$

$U_4=\dfrac{5U_3-U_2}{3}$ D'où : $\boxed{U_4=\dfrac{92}{27}}$

a) Montrons que : $(V_n)$ est une suite géométrique.

$V_n=U_{n+1}-U_n \Leftrightarrow V_n=\dfrac{5U_n-2U_{n-1}}{3}-U_n=\dfrac{5U_n-2U_{n-1}-3U_n}{3}$

$V_n=\dfrac{2U_n-2U_{n-1}}{3}=\dfrac{2}{3}(U_n-U_{n-1})=\dfrac{2}{3}V_{n-1}$ car $V_{n-1}=U_n-U_{n-1}$

Donc, $\dfrac{V_n}{V_{n-1}}=\dfrac{2}{3}$ et $V_0=U_1-U_0=2-2=1$

$(V_n)$ est une suite géométrique de raison $q=\dfrac{2}{3}$ et de 1er terme $V_0=1$

b) Exprimons la suite $(V_n)$ en fonction de $n$.

$V_n=V_0\times q^n$, or, $V_0=1$ et $q=\dfrac{2}{3}$ *ceci implique* $V_n=\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$





Puisque $|q|<1$ donc la suite $(V_n)$ converge vers 0.

c) Exprimons $S_n=V_0+V_1+\ldots+V_n$ en fonction de $n$.

$S_n=V_0+V_1+\ldots+V_n$ somme des $n$ premier termes d'une suite géométrique de premier terme $V_0=1$ et de raison $q=\dfrac{2}{3}$.

$$S_n=V_0\times\frac{1-q^n}{1-q}=1\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} \Rightarrow \boxed{S_n=3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}$$

3°a) Montrons que pour tout entier naturel $n$, $S_n=U_n-U_0$.

$\begin{cases} V_0=U_1-U_0 \\ V_1=U_2-U_1 \\ V_2=U_3-U_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_{n-1}=U_n-U_{n-1} \end{cases}$

Après la somme membre à membre de ces équations puis une réduction, on obtient la relation demandée:

$\boxed{S_n=U_n-U_0}$

b) Déduisons que $U_n$ en fonction de $n$.

$S_n=U_n-U_0 \Rightarrow U_n=S_n+U_0=3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]+1$

D'où : $\boxed{U_n=4-3\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

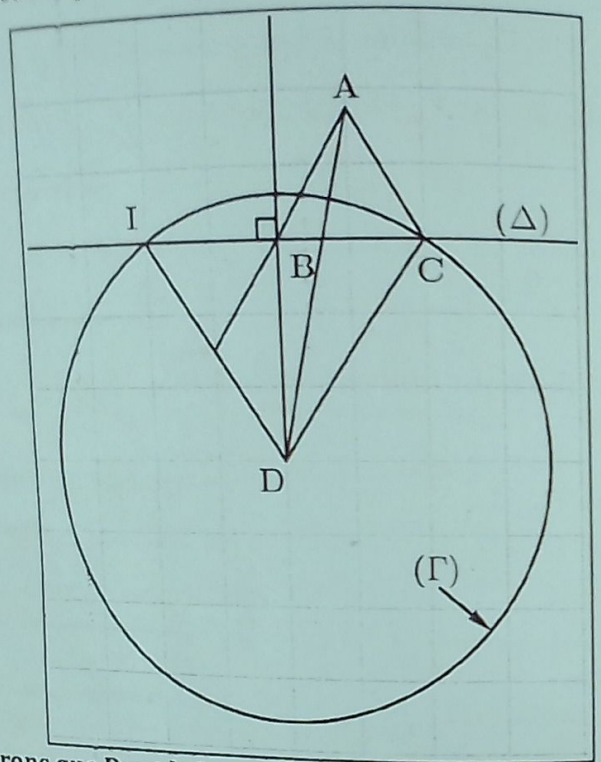
■ **Précisons sa limite.**

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n=0$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=4}$

## Exercice 2

Corrigé proposé

**1°a) Construisons le point D définie par** $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.




**b) Démontrons que D est le barycentre des points A, B et C**

$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ *équivaut à* $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC} = \vec{0}$ *équivaut à* $2\overrightarrow{DA}-2\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC} = \vec{0}$

$D=\text{bar}\{(A;2)(B;-2)(C;-1)\}$. Le point **D** est le barycentre des points pondérés : (A, 2) ; (B, -2) et (C, -1).

**c) Démontrons que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.**

$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ *équivaut à* $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$ *équivaut à* $\boxed{\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}}$





Donc, le vecteur $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, d'où les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

**2°a) Démontrons que :** $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ **puis que** $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

* $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ *équivaut à* $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

* $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$

Après développement de cette dernière égalité, on trouve :

$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC} = AC^2-AB^2 = a^2-a^2 = 0$.

Par conséquent : $\boxed{\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC}=0}$

**b) Déduisons que le triangle BCD est rectangle en B.**

L'égalité $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$ justifie que les vecteurs $\overrightarrow{BD}\perp\overrightarrow{BC}$.

(BD) est perpendiculaire à (BC) d'où, le triangle BCD est rectangle en **B**.

**3) Calculons les distances CD, BD et AD en fonction de** $a$.

$\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$ *équivaut à* $CD = 2AB$. D'où : $\boxed{CD = 2a}$

Le triangle BCD est rectangle en B, en appliquant le théorème de Pythagore on a : $CD^2 = BC^2 + BD^2$ *équivaut à* $BD^2 = CD^2 - BC^2 = 4a^2-a^2$

Nous avons : $\boxed{BD = a\sqrt{3}}$

$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ *équivaut à* $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

$AD^2 = 4AB^2+AC^2+4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ Or, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\cdot AC\times\cos\widehat{BAC}$

D'où : $AD^2 = 4AB^2+AC^2+4(AB\cdot AC\times\cos\frac{\pi}{3})$ car ABC est équilatéral.

$AD^2 = 4a^2+a^2+4(a\times a\times\frac{1}{2}) = 5a^2+2a^2$. Soit : $\boxed{AD = a\sqrt{7}}$

**4°a) Vérifions que le point C appartient à (Γ).**

$f(M)=2MA^2-2MB^2-MC^2$ et $(\Gamma)=\{M\in(P)$ tel que $f(M)=0\}$

$f(C) = 2CA^2-2CB^2-CC^2 = 2a^2-2a^2 = 0$

D'où : le point C appartient à la courbe (Γ)

**b) Exprimons $f(M)$ en fonction de MD et de $a$.**

Le point D étant le barycentre des points pondérés : (A, 2) ; (B, -2) et (C, -1).

Nous avons : $\boxed{f(M) = -MD^2+4a^2}$

**c) Déterminons et construisons l'ensemble (Γ).**

Pour $M\in\mathscr{P}$, $M\in(\Gamma)$ *équivaut à* $f(M) = 0$

*équivaut à* $-MD^2+4a^2 = 0$

*équivaut à* $MD^2 = 2a = CD$

L'ensemble (Γ) est le cercle de centre D passant par C.

**5°a) Déterminons l'ensemble (Δ) des points M tels que $g(M) = a^2$.**

$g(M) = a^2$ *équivaut à* $g(M) = 2\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{DB} + a^2$

*équivaut à* $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{DB} = 0$

*équivaut à* $\overrightarrow{MC}\perp\overrightarrow{DB}$

L'ensemble (Δ) est la droite perpendiculaire à (DB) passant par C.

**b) Montrons que le triangle CDI est équilatéral.**

Le point appartient à la fois à (Γ) et à (Δ), donc CD = CI.

De plus la droite (BD) est la médiatrice de [CI] donc : CI = 2 CD = $2a$

On a : CD = ID = CI = $2a$

D'où : CDI est un triangle équilatéral.





## PROBLEME

Corrigé proposé

**1°a) Donnons l'ensemble de définition D de $f$**

$f$ est la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{2x^3-2x^2+27}{2x^2}$.

$D = \{x\in\mathbb{R}$ tel que $2x^2\neq 0\}$ D'où : $D = \mathbb{R}^* = ]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$

**b) Calculons les limites de $f$ aux bornes de D.**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3-2x^2+27}{2x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^3}{2x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3-2x^2+27}{2x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3}{2x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x\mapsto 0} f(x) = \lim_{x\mapsto 0}\frac{27}{2x^2} = +\infty$$

**2.a) Calculons la dérivée $f'$ de $f$.**

$$f'(x) = \frac{(6x^2-4x)\times(2x^2)-(4x)\times(2x^3-2x^2+27)}{4x^4}$$

Il vient : $\boxed{f'(x) = \dfrac{4x(x^3-27)}{4x^4}}$

**b) Montrons que le signe de $f'(x)$, $x\in D$ est celui de la fonction $U$**

▶ *Signe de la dérivée*

$U(x) = 4x(x^2-27)$ et $f'(x) = \dfrac{4x(x^3-27)}{4x^4} = \dfrac{U(x)}{4x^4}$

Donc, Pour tout $x\in D$, le monôme $4x^4>0$.

Par conséquent la dérivée $f'(x)$ est du signe de $U(x)$.

▸ Sens de variation

$U(x)=0$ *équivaut à* $4x(x^3-27)=0$

*équivaut à* $x=0$ *ou* $x=3$

▸ Tableau de signe $f'$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4x$ | $-$ | $\|$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x^3-27$ | $-$ | $\|$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | $+$ | $\|\|$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

▸ $\forall x\in]-\infty;0[\cup]3;+\infty[$, $f'(x)>0$.

Donc, $f$ est strictement croissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]3;+\infty[$.

▸ $\forall x\in]0;3[$, $f'(x)<0$ donc $f$ est strictement décroissante sur $]0;3[$.

▸ $f(3)=\frac{7}{2}$ et $f'(3)=0$.

**c) Tableau de variation de $f$.**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $\|\|$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $\|\|$ | $+\infty$ | ↘ | $\frac{7}{2}$ | ↗ | $+\infty$ |





**3.a) Déterminons les nombres réel $a$, $b$, $c$ et $d$**

Nous avons : $\frac{2x^3-2x^2+27}{2x^2}=\frac{2x^3}{2x^2}-\frac{2x^2}{2x^2}+\frac{27}{2x^2}$

Donc, Pour tout $x\in D$, $f(x)=x-1+\frac{27}{2x^2}$

$$a=1\ ;\ b=-1\ ;\ c=0\ ;\ d=27$$

**b) Montrons que la courbe admet une asymptote oblique (D)**

$$\lim_{x\mapsto-\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{27}{2x^2}=0$$

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\left[f(x)-(x-1)\right]=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{27}{2x^2}=0$$

En conséquence, la droite (D) d'équation : $y=x-1$ est asymptote oblique à $(\mathscr{C})$ à $+\infty$ et à $-\infty$.

**c) Déterminons la position de (D) par rapport à $(\mathscr{C})$.**

La position est déterminée par le signe de $f(x)-(x-1)=\frac{27}{2x^2}$.

Pour toute valeur de $x$ appartenant à D, $\frac{27}{2x^2}>0$ donc $f(x)-(x-1)>0$

D'où, la courbe $(\mathscr{C})$ est au-dessus de (D) sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

**4.a) Construction de la courbe $(\mathscr{C})$** (voir figure ci-dessous)

**b) Précisons l'existence d'une autre asymptote pour la courbe $(\mathscr{C})$.**

$\lim_{x\to0} f(x)=+\infty$ et $0\notin D$ donc la droite d'équation $x=0$ est asymptote verticale à $(\mathscr{C})$.

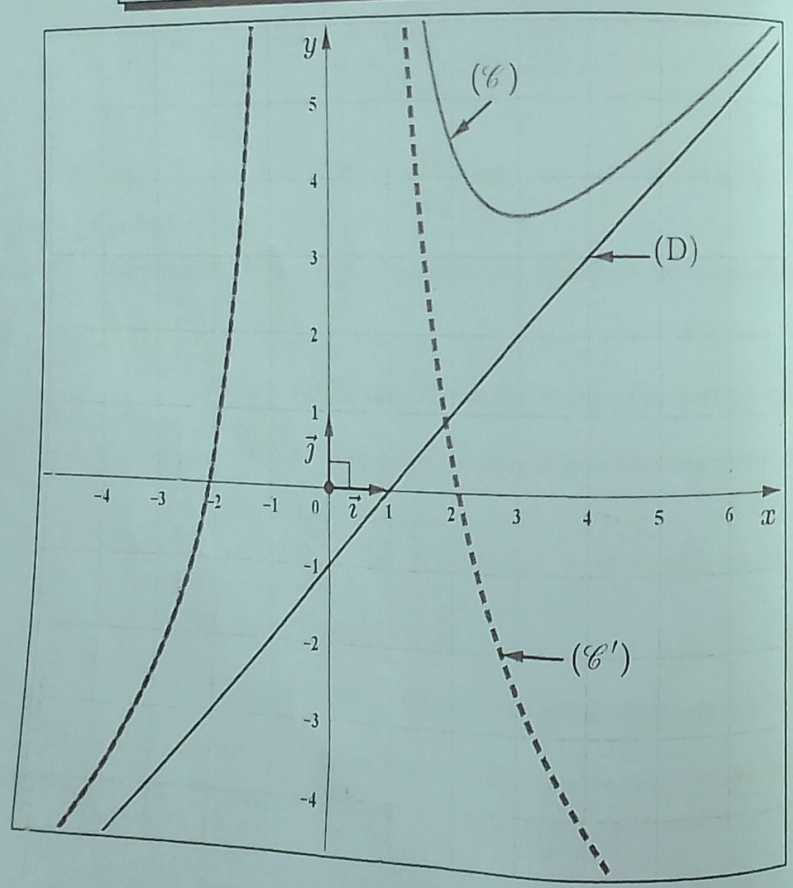
5°a) Etudions la parité de g .

$g(x) = \dfrac{-2|x|^3-2x^2+27}{2x^2}$ et $D_g = \mathbb{R}^*$ donc symétrique par rapport à 0.

D'où : $x \in D_g$ et $-x \in D_g$, $g(-x) = \dfrac{-2|-x|^3-2(-x)^2+27}{2(-x)^2}$.

$g(-x) = g(x)$ car $|-x| = |x|$ et $(-x)^2 = x^2$

Par conséquent g est donc une fonction paire.








**b) Montrons que $f$ et g coïncident sur un ensemble que l'on précisera.**

$\forall x \in ]-\infty;0[$ ; $|x| = -x$ donc $\forall x \in ]-\infty;0[$, $g(x) = f(x)$.

Donc, la fonction $f$ coïncide avec la fonction g sur l'intervalle $]-\infty;0[$ .

**c) Justifions sans étude, la méthode de construction de la courbe $(\mathscr{C}')$**

D'après, ce qui précède $f$ et $g$ coïncident sur $]-\infty;0[$ et puisque $f$ est paire.

Soit : $(\mathscr{C}_1) = (\mathscr{C})$ sur l'intervalle ]- ∞; 0 [.

Soit: $(\mathscr{C}_2)$ = Image de la courbe $(\mathscr{C}_1)$ par la symétrie orthogonale des ordonnées.

La courbe $(\mathscr{C}') = (\mathscr{C}_1) \cup (\mathscr{C}_2)$

**6° Discussion graphique des résultats:**

$2x^3-2(k+1)x^2+27 = 0$ *équivaut à* $2x^3-2kx^2-2x^2+27 = 0$

$2x^3-2x^2+27 = 2kx^2$ *équivaut à* $\dfrac{2x^3-2x^2+27}{2x^2} = k$ avec $x \neq 0$

$f(x) = k$ *équivaut à* $(\mathscr{C}) \cap (\Delta_k) : y = k$

▶ Pour $k \in \left]-\infty;\dfrac{7}{2}\right[$ ; on a une (01) solution.

▶ Pour $k = \dfrac{7}{2}$, on a 2 solutions. ▶ Pour $k \in \left]\dfrac{7}{2};+\infty\right[$, on a 3 solutions.

« Lorsque nous cherchons à être meilleurs que nous le sommes, tout devient meilleur ausi Autour de nous. »
Paulo Coelho, L'alchimiste

# 4 Epreuve de Maths ♦ Bac 1 Série : D ♦ 2011

## EXERCICE 1

On considère les suites $(U_n)$ et $(V_n)$ définies par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_0 = 1$, $U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + n - 1$ et $V_n = 4U_n - 6n + 15$

1°a) Démontrer que $(V_n)$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) Exprimer $V_n$ en fonction de $n$.

c) En déduire que pour tout entier naturel $n$, $U_n = \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^n} + \frac{6n-15}{4}$.

2° Démontrer que la suite $(U_n)$ peut s'écrire sous la forme d'une somme d'une suite géométrique $(T_n)$ et d'une suite arithmétique $(W_n)$.

3°a) Calculer $S_1 = T_0 + T_1 + T_2 + \ldots + T_n$ et $S_2 = W_0 + W_1 + W_2 + \ldots + W_n$.

b) En déduire $S = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n$.

## EXERCICE 2

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct, I le centre circonscrit à ce triangle, D le symétrique de A par rapport à B.

1°a) Démontrer que le triangle ACD est rectangle.

b) Déterminer les mesures des angles $(\overrightarrow{BD}; \overrightarrow{BC})$ et $(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD})$.

Justifier les résultats.

2° On désigne par (H, K, J) l'image de (A, B, C) par la rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et de centre I.

a) Construire le triangle HJK.





b) Quelle est la nature de la figure AHCJBK ?

3°a) Démontrer que : $f(M) = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$ est un vecteur indépendant du point M du plan.

b) Soit E un point du plan tel que $\overrightarrow{CE} = f(M)$ et C' le milieu de [AB].

Montrer que : $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{CC'}$.

4° Soit (F) l'ensemble des points M du plan tel que : $MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 0$.

a) Montrer que $\forall M \in P$ on a : $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 - 2\overrightarrow{MC}^2 = 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{CE}$

b) Déduisez-en et construisez l'ensemble (F).

## PROBLEME

**Partie A :**

Soit g la fonction numérique à variable réelle définie par: $g(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{2x + d}$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère (O, I, J).

Déterminer les réels $a$, $b$, $c$ et $d$ sachant que :

- $(\mathscr{C})$ coupe l'axe (OJ) au point d'ordonnée 1.
- $(\mathscr{C})$ passe par la point A(-1 ; 1) et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 2.
- La droite d'équation $x = \frac{-1}{2}$ est une asymptote verticale à $(\mathscr{C})$.

**Partie B :**

Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ vert $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 1}{2x + 1}$.

1°a) Déterminer l'ensemble de définition D de $f$.

b) Montrer que pour tout $x$ appartenant à D, $f(x)$ peut se mettre sous la forme : $f(x) = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{2x+1}$, $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ sont des réels à déterminer.

c) En déduire que la courbe $(\mathscr{C})$ admet une asymptote oblique (D) dont on précisera une équation.

2° Montrer que le point B intersection des asymptotes est centre de

symétrie pour la courbe $(\mathscr{C})$.

3° Etudier les variations de $f$ et dresser son tableau de variations.

4° Tracer $(\mathscr{C})$ et $(D)$.

5° Utiliser le graphique pour discuter du nombre et du signe des solutions de l'équation : $2x^2-(4-2m)x+1-m=0$ suivant les valeurs du paramètre m.

6° Utiliser encore le graphique pour justifier que la restriction de $f$ su

$\left]\frac{-1}{2};+\infty\right[$ est une bijection.

7° Soit $h$ la fonction définie par $h(x)=\frac{2x^2+4x+1}{|2x+1|}$.

Expliquer comment obtenir la courbe $(\mathscr{C})$ de $h$ à partir de $(\mathscr{C})$ de $f$.

Construire $(\mathscr{C}')$ dans le même repère que $(\mathscr{C})$ de $f$.

Partie C :

On considère la fonction $g_m$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$g_m(x)=(m-1)x^2+(2-3m)x+2m-3$, $m\in\mathbb{R}$, on désigne par $(P_m)$ s représentation graphique dans le plan muni d'un repère $(O, I, J)$.

1° Déterminer le nombre de courbes qui passent par le point A(-1;1).

2° Démontrer que toutes les courbes $(P_m)$ passent par deux points fixes do les coordonnées indépendantes de $m$.

3°a) Pour $m\neq 1$. Calculer les coordonnées du sommet $S_m$ de $(P_m)$.

b) Quel est l'ensemble décrit par $S_m$ lorsque $m$ décrit $\mathbb{R}-\{1\}$.

******





# CORRIGE♦BAC 1-D♦ 2011

## Exercice 1 — Corrigé proposé

**Données :** $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_0=1$, $U_{n+1}=\frac{1}{3}U_n+n-1$ et $V_n=4U_n-6n+15$

**1°a) Démontrons que $(V_n)$ est une suite géométrique.**

$$V_{n+1} = 4U_{n+1}-6(n+1)+15 = 4\left(\frac{1}{3}U_n+n-1\right)-6n-6+15$$

$$V_{n+1} = \frac{4}{3}U_n+4n-4-6n+9 = \frac{4}{3}U_n-2n+5 = \frac{1}{3}(4U_n-6n+15)$$

Or, $V_n = 4U_n-6n+15 \quad\Leftrightarrow\quad V_{n+1} = \frac{1}{3}V_n$

Donc, $V$ est une suite géométrique de raison $q=\frac{1}{3}$ et de 1er terme $V_0=19$

**1°b) Exprimons $V_n$ en fonction de $n$.**

$$V_n = V_0\cdot q^n = 19\times\left(\frac{1}{3}\right)^n \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{V_n=\frac{19}{3^n}}$$

**c) Déduction.**

$V_n = 4U_n-6n+15$ donc $4U_n = V_n+6n-15$

$$\Leftrightarrow\quad U_n = \frac{V_n}{4}+\frac{6n-15}{4}. \text{ Or on a : } V_n = 19\times\frac{1}{3^n}$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{U_n = \frac{19}{4}\times\frac{1}{3^n}+\frac{6n-15}{4}}$$

**1°b) Déterminons les mesures des angles $(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BC})$ et $(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD})$.**

Le triangle ABC est équilatéral,

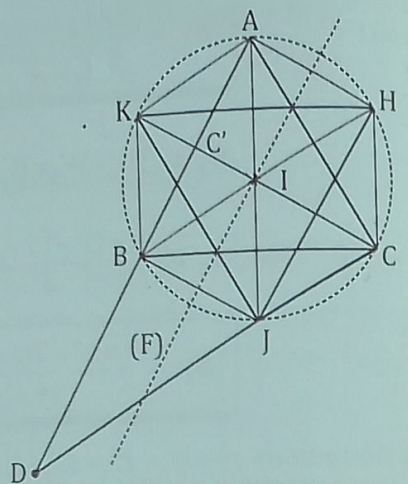
donc $mes\,\widehat{ABC}=60°$

$mes\left(\widehat{\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC}}\right)=mes\,\widehat{DBC}=120°$ ;

car les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DBC}$ sont adjacents et supplémentaires.

$mes\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}\right)=mes\,\widehat{BCD}=30°$

Car le triangle DBC est isocèle de sommet principal B. Donc ses angles à la base $\widehat{BDC}$ et $\widehat{BCD}$ ont la même mesure.




Donc, $\boxed{mes\left(\widehat{\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC}}\right)=\frac{2\pi}{3}}$ et, $\boxed{mes\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}}\right)=\frac{\pi}{6}}$

**2°a) Construction le triangle HJK.** $R\left(I;-\frac{\pi}{3}\right)$

**b) Nature de la figure AHCJBK.**

Les triangles **IAH**, **ICJ** et **IBK** sont équilatéraux donc, AH=HC=CJ=JB=BK=KA

Par conjecture à la figure, on a déduit que **AHCJBK** est un hexagone régulier inscriptible dans un cercle de centre **I**.

**3°a) Démonstrons que f(M) est indépendant de M.**

$f(M)=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$. En introduisant le point **C** dans $f(M)$ on a :

$f(M)=(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CA})+(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB})-2\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}-2\overrightarrow{MC}$

Donc, $f(M)=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$ justifie que $f(M)$ est indépendant de **M**.

**NB:** En introduisant le point **A**, on obtient : $f(M)=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$.

De $f(M)=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$, on remarque que la somme des coefficients est nulle, (1+1-2 = 0) donc, l'application $f(M)$ est indépendant de **M**.





**3°b) Montrons que :** $\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{CC'}$.

On sait que : $f(M)=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$. Or, $\overrightarrow{CE}=f(M)\Leftrightarrow\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$

Comme **C'** milieu de [AB] alors $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CC'}$

D'où : $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow\boxed{\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{CC'}}$

Autre méthode : $\overrightarrow{CE}=f(M)\Leftrightarrow\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$

$\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{MC'}+\overrightarrow{C'A}+\overrightarrow{MC'}+\overrightarrow{C'B}-2\overrightarrow{MC'}-2\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{C'A}+\overrightarrow{C'B}-2\overrightarrow{CC'}$

or $2\overrightarrow{MC'}-2\overrightarrow{MC'}=\vec{0}$ et $\overrightarrow{C'A}+\overrightarrow{C'B}=\vec{0}$

Finalement : $\boxed{\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{CC'}}$

**4°a) Montrons que** $\forall M\in P$ **on a :** $MA^2+MB^2-2MC^2=2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{CE}$

En introduisant le point **I** dans la relation, on a :

$MA^2+MB^2-2MC^2=(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2+(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2-2(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC})^2$

$=IA^2+IB^2-2IC^2+2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-2\overrightarrow{IC})$

Comme le point **I** est le milieu de ABC alors $IA^2+IB^2-2IC^2=0$

Outre, pour **M = I**, $f(I)=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-2\overrightarrow{IC}$ or indépendamment de **M**,

$f(M)=\overrightarrow{CE}\Leftrightarrow f(I)=\overrightarrow{CE}\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-2\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{CE}$

D'où : $\boxed{MA^2+MB^2-2MC^2=2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{CE}}$

**b) Déduction et construction de l'ensemble (F).**

$MA^2+MB^2-2MC^2=0\Leftrightarrow2\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{CE}=0\Leftrightarrow\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{CE}=0$

D'où, l'ensemble **(F)** des points **M** est la droite perpendiculaire à **(CE)** et qui passe par **I**.

2° Démontrons que la suite $(U_n)$ peut s'écrire $U_n = T_n + W_n$

Posons $T_n = \frac{19}{4}\times\frac{1}{3^n}$ et $W_n = \frac{6n-15}{4}$

▶ Vérifions que $(T_n)$ est une suite géométrique.

$$T_{n+1} = \frac{19}{4}\times\frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\left(\frac{19}{4}\times\frac{1}{3^n}\right) = \frac{1}{3}T_n \quad \Leftrightarrow \quad T_{n+1} = \frac{1}{3}T_n$$

$T$ est une suite géométrique de raison $q=\frac{1}{3}$ et de 1er terme $T_0=\frac{19}{4}$

et $\forall n\in\mathbb{N},\ T_n = \frac{19}{4}\times\frac{1}{3^n}$

▶ Vérifions que $(W_n)$ est une suite arithmétique.

$$W_{n+1} = \frac{6(n+1)-15}{4} = \frac{6n+6-15}{4} = \frac{6n-15}{4} + \frac{6}{4}.$$

Puisque $W_n = \frac{6n-15}{4} \quad \Leftrightarrow \quad W_{n+1} = W_n + \frac{3}{2}$ et $W_0=\frac{-15}{4}$

$(W_n)$ est une suite arithmétique de raison $r=\frac{3}{2}$ et de 1er terme $W_0=\frac{-15}{4}$

$U_n = T_n + W_n$ en définitif, la suite $U$ est la somme d'une suite géométrique $T$ et d'une suite arithmétique $W$.

3.a) Calculons $S_1 = T_0+T_1+T_2+\ldots+T_n$ et $S_2 = W_0+W_1+W_2+\ldots+W_n$

$$S_1 = T_0+T_1+T_2+\ldots+T_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{19}{4}\times\left[\frac{1-\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}}\right]$$





D'où : $S_1 = \frac{57}{8}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)$

$$S_2 = W_0+W_1+W_2+\ldots+W_n = \frac{(n+1)(W_0+W_n)}{2}$$

$$S_2 = \frac{n+1}{2}\left(\frac{-15}{4} + \frac{6n-15}{4}\right) = \frac{3}{4}(n+1)(n-5)$$

D'où : $S_2 = \frac{(n+1)(3n-15)}{4}$

b) Déduisons $S=U_0+U_1+U_2+\ldots+U_n$

$$S = (T_0+W_0) + (T_1+W_1) + (T_2+W_2) +\ldots+ (T_n+W_n)$$

$$S = (T_0+T_1+\ldots+T_n) + (W_0+W_1+\ldots+W_n) = S_1 + S_2$$

D'où : $S = \frac{57}{8}\left(1 - \frac{1}{3^{n+1}}\right) + \frac{(n+1)(3n-15)}{4}$

## Exercice 2

Corrigé proposé

1°a) Démontrons que le triangle ACD est rectangle.

$S_B(A) = D$ donc, AB = BD et le point D est le milieu de [AD].

Comme ABC éq,uilatéral alors on a : AB = AC = BC;

Par conséquent, BA = BD = BC d'où BDC est isocèle en B.

Le point C appartient au cercle de centre B et de diamètre [AD].

D'où, le triangle ACD est rectangle en C.

NB: D'autres méthodes impliquant les outils vectoriels et les mesures angulaires peuvent-etre utilisées pour aboutir au même résultats.

Corrigé proposé

## PROBLEME

### Partie A

$g(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{2x+d}$ Donc, **déterminons les réels** $a$, $b$, $c$ et $d$.

▶ La courbe $(\mathscr{C})$ coupe l'axe $(Oy)$ au point d'ordonnée 1 donc, $g(0)=1$

c'est-à-dire : $\dfrac{c}{d}=1 \Leftrightarrow c=d$ (1)

▶ La courbe $(\mathscr{C})$ passe par le point A(-1 ; 1) donc, $g(-1)=1$

c'est-à-dire : $\dfrac{a-b+c}{-2+d}=1 \Leftrightarrow a-b+c=-2+d$ (2)

* La courbe $(\mathscr{C})$ admet en A(-1; 1) une tangente de coefficient de directeur 2.

$g'(-1)=2$ Or $g'(x)=\dfrac{(2ax+b)(2x+d)-2(ax^2+bx+c)}{(2x+d)^2}$

$g'(-1)=\dfrac{(-2a+b)(-2+d)-2(a-b+c)}{(-2+d)^2}=2$ (3)

▶ La droite d'équation $x=\dfrac{1}{2}$ est une asymptote verticale à $(\mathscr{C})$

D'après, $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} g(x)=\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\frac{d}{2}} g(x)=\infty$

D'où : $\dfrac{-d}{2}=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow d=1$ (1)

D'après, $\dfrac{c}{1}=1$ ; $\Leftrightarrow c=1$ (2)

D'après, $\dfrac{a-b+1}{-2+1}=1 \Leftrightarrow a-b=-2$ (4)

En définitive, $a=2$ ; $b=4$ ; $c=1$ et $d=1$





### Partie B

Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ vert $\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\dfrac{2x^2+4x+1}{2x+1}$

**1.a) Déterminons l'ensemble de définition D de $f$.**

$D=\{x\in D \ / \ 2x+1\neq 0\}$. Posons $2x+1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1}{2}$

Il vient : $D=\left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]\dfrac{-1}{2};+\infty\right[$

**b) Montrons que pour tout $x\in D$ : $f(x)=\alpha x+\beta+\dfrac{\gamma}{2x+1}$.**

Pour $x\in D$, $\alpha x+\beta+\dfrac{\gamma}{2x+1}=\dfrac{(\alpha x+\beta)(2x+1)+\gamma}{2x+1}$

$\dfrac{2\alpha x^2+x(\alpha+2\beta)+\beta+\gamma}{2x+1}=\dfrac{2x^2+4x+1}{2x+1}$

Par identification on a : $\begin{cases} 2\alpha=2 \\ \alpha+2\beta=4 \\ \beta+\gamma=1 \end{cases}$

$\alpha=1$ ; $\beta=\dfrac{3}{2}$ et $\gamma=-\dfrac{1}{2}$ ainsi $f(x)=x+\dfrac{3}{2}+\dfrac{-\frac{1}{2}}{2x+1}$

**c) Déduisons que la courbe $(\mathscr{C})$ admet une asymptote oblique (D)**

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{-1}{2}}{2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{2(2x+1)}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\left(x+\dfrac{3}{2}\right)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\frac{-1}{2}}{2x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{2(2x+1)}=0$

Pour tout $x \in D$, $(2x+1)^2 > 0$, Donc, $1 + \frac{1}{(2x+1)^2} > 0$.

La dérivée $f'(x)$ reste toujours positive. Soit : $f'(x) > 0$

$\forall x \in D$ d'où $f$ est strictement croissante sur $\left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right[ \cup \left]\frac{-1}{2} ; +\infty\right[$

▶ **Tableau de variation :**

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{-1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | | ‖ | + | |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | | ‖ | ↗ $+\infty$ | |

**4° Construction de la courbe $(\mathscr{C})$ et de ses asymptotes.**

**Points particuliers** : $(\mathscr{C}) \cap (Oy) = P_1(0;1)$ car il suffit de calculer $f(0)$

Pour retrouver $(\mathscr{C}) \cap (Ox)$, il faut résoudre l'équation $2x^2+4x+1 = 0$

Ce qui aboutit à deux solutions $x_1 = \frac{-2-\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = \frac{-2+\sqrt{2}}{2}$.

Finalement, on trouve les points $P_2\left(\frac{-2-\sqrt{2}}{2} ; 0\right)$ et $P_3\left(\frac{-2+\sqrt{2}}{2} ; 0\right)$.

**5° Discussion graphique du nombre et du signe des solutions.**

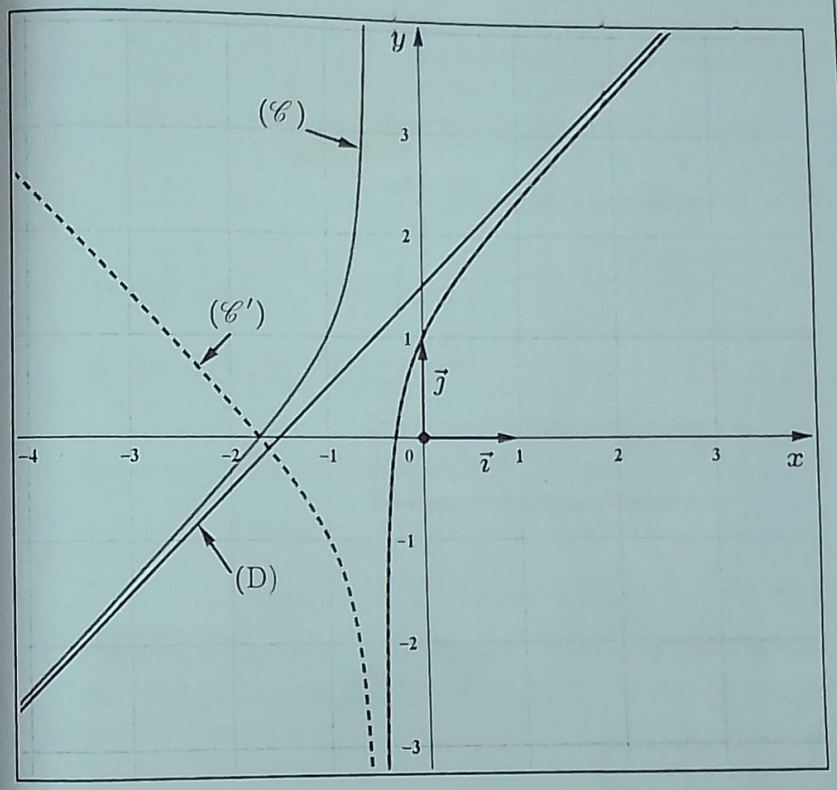
L'équation $2x^2-(4-2m)x+1-m = 0 \Leftrightarrow 2x^2+4x+1 = 2mx+m$

$m(2x+1) = 2x^2+4x+1 \Leftrightarrow m = \frac{2x^2+4x+1}{2x+1} = f(x)$

Pour tout $x \neq -\frac{1}{2}$ ; et $x \in D$ alors $f(x) = m$.








**Discussion** : Ainsi, graphiquement, on obtient :

Pour $m \in ]-\infty ; 1[$, l'équation admet deux (02) solutions de signe négatif.

Pour $m = 1$, l'équation admet deux (02) solutions $x_1 = 0$ et $x_2 < 0$.

Pour $m \in ]1 ; +\infty[$, l'équation admet deux solutions de signes contraires.

**6) Justificatif :** D'après le tableau de variation de $f$ ;

$f$ est strictement croissante sur $\left]\frac{-1}{2} ; +\infty\right[$.

D'où, la courbe $(\mathscr{C})$ admet une asymptote oblique d'équation $y = x + \frac{3}{2}$

**2°) Montrons que le point B est centre de symétrie pour la courbe $(\mathscr{C})$.**

Les asymptotes de la courbes sont les droites (D') d'équation $x = \frac{-1}{2}$ et (D) d'équation $y = x + \frac{3}{2}$. Or, les droites (D) et (D') se coupent en B.

Les coordonnées de B sont solution du système $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = x + \frac{3}{2} \end{cases}$

ce qui conduit à $x = -\frac{1}{2}$ et $y_B = 1$. Il vient : $\boxed{B\left(\frac{-1}{2};1\right)}$

B est le centre de symétrie de $(\mathscr{C})$ équivaut à $f(-1-x)+f(x) = 2$

$$f(-1-x)+f(x) = -1-x+\frac{3}{2} + \frac{\frac{-1}{2}}{2(-1-x)+1} + x+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2x+1}$$

$$f(-1-x)+f(x) = 2+\frac{\frac{1}{2}}{2x+1}+\frac{\frac{-1}{2}}{2x+1} = 2 \text{ car } \frac{\frac{1}{2}}{2x+1}-\frac{\frac{1}{2}}{2x+1} = 0$$

Pour tout $x \in D$, $-1-x \in D$ et $f(-1-x)+f(x) = 2$

D'où, le point $B\left(\frac{-1}{2};1\right)$ est centre de symétrie de la courbe $(\mathscr{C})$.





**3) Etude des variations de $f$.**

▶ **Calcul des limites de $f$ aux bornes de D.**

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+4x+1}{2x+1} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2x^2}{2x}\right) = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+4x+1}{2x+1} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2}{2x}\right) = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

Le signe de $2x+1$ se retrouve dans le tableau ci-dessous :

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $2x+1$ | $-$ | $\boxed{0}$ | $+$ |

$\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{1}{2} \\ <}} f(x) = +\infty$ car $\begin{cases} 2x^2+4x+1 \longmapsto -\frac{1}{2} \\ 2x+1 \longmapsto 0 \\ 2x+1 < 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{1}{2} \\ >}} f(x) = -\infty$ car $\begin{cases} 2x^2+4x+1 \longmapsto -\frac{1}{2} \\ 2x+1 \longmapsto 0 \\ 2x+1 > 0 \end{cases}$

▶ **Dérivée :** La fonction est dérivable sur D et on a :

$$f'(x) = \frac{(4x+4)(2x+1)-2(2x^2+4x+1)}{(2x+1)^2} = \frac{4x^2+4x+2}{(2x+1)^2}$$

La dérivée peut s'écrire sous la forme $\boxed{f'(x) = 1 + \frac{1}{(2x+1)^2}}$.

Donc, la restriction de $f$ est bijective de $\left]\frac{-1}{2};+\infty\right[$ sur $\mathbb{R}$.

**7° Explication pour obtenir la courbe $(\mathscr{C}')$ de $h$ à partir de $(\mathscr{C})$ de $f$.**

En analysant la fonction $h(x)=\frac{2x^2+4x+1}{|2x+1|}$ ;

Remarquons simplement que : $\begin{cases} h(x)=f(x) & \text{si } x\in\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[ \\ h(x)=-f(x) & \text{si } x\in\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right[ \end{cases}$

Ainsi, $(\mathscr{C}')=(\mathscr{C})_{x>\frac{-1}{2}} \cup S_{(OI)}(\mathscr{C})_{x<\frac{-1}{2}}$

**Partie C**

$g_m(x) = (m-1)x^2+(2-3m)x+2m-3 \quad (m\in\mathbb{R})$

**1) Déterminons le nombre de courbes qui passent par le point A(-1;1).**

Les courbes passent par le point A(-1 ; 1) alors on a : $g_m(-1)=1$

$m-1-2+3m+2m-3 = 1 \quad \Rightarrow \quad 6m = 7$

Ainsi, une seule courbe $(P_{7/6})$ passe par A(-1;1) et $m=\frac{7}{6}$.

**2° Recherche de points fixes**

Posons $g_m(x)=y$ ; on a : $y=(m-1)x^2+(2-3m)x+2m-3$

$\Rightarrow \quad m(x^2-3x+2) = y+x^2-2x+3$

La courbe $(P_m)$ passe par deux (02) points indépendants de $m$,

Donc, $x^2-3x+2=0 \Rightarrow (m\neq 0)$, alors $x=1$ ou $x=2$.

Pour $x=1$ on a : $y=-2$ d'où: le point **H(1 ; -2)**





Pour $x=2$ on a : $y=-3$ d'où : le point **K(2 ; -3)**

**3° Calculons les coordonnées du sommet $S_m$ de $(P_m)$.**

**a)** Pour $m\neq 1$, le sommet a pour coordonnées $S_m\left(\frac{-b}{2a};\frac{-\delta}{4a}\right)$

Pour, $m\neq 1$ alors $g'_m(x) = 2(m-1)x+2-3m = 0$

$x = \frac{3m-2}{2(m-1)}$ et $y=(m-1)\left(\frac{3m-2}{2(m-1)}\right)+(2-3m)\left(\frac{3m-2}{2(m-1)}\right)+2m-3$

$y=\frac{8-8m-m^2}{4(m-1)}$ D'où : le sommet $S_m = \left(\frac{3m-2}{2m-2} ; \frac{8-8m-m^2}{4m-4}\right)$

**b) Recherche de l'ensemble décrit par $S_m$ lorsque $m$ décrit $\mathbb{R}-\{1\}$.**

Posons $x = \frac{3m-2}{2(m-1)}$ et $y = \frac{8-8m-m^2}{4(m-1)}$

On obtient : $2mx-2x = 3m-2 \Rightarrow m = \frac{2x-2}{2x-3}$ avec $x\neq\frac{3}{2}$.

En reportant $m$ dans $y = \frac{-m^2-8m+8}{4(m-1)} = -\frac{1}{4}m-\frac{9}{4}-\frac{1}{4(m-1)}$

$y = -\frac{1}{4}\left(\frac{2x-2}{2x-3}\right)-\frac{9}{4}-\frac{1}{4\left(\frac{2x-2-2x+3}{2x-3}\right)}$ ; $S_m$ : $y=\frac{-x^2-2x+5}{2x-3}$

Lorsque $m$ décrit $\mathbb{R}-\{1\}$ ; $S_m$ décrit la courbe dont l'équation est $y=\frac{-x^2-2x+5}{2x-3}$.

1°a) Etudier la parité de $g$.

b) Préciser l'ensemble sur lequel $f$ et $g$ coïncident.

2° En déduire la représentation graphique $(\mathscr{C}_g)$ de $g$ à partir de $(\mathscr{C}_f)$.

On expliquera la construction et on utilisera une autre couleur pour représenter $(\mathscr{C}_g)$

3.a) Montrer qu'il existe deux réels $e$ et $p$ tels que $h(x)=f(x-p)+e$

b) En déduire que $(\mathscr{C}_h)$ se déduit de $(\mathscr{C}_f)$ par une transformation du plan que l'on précisera.

c) Représenter graphiquement $(\mathscr{C}_h)$ dans le même repère que $(\mathscr{C}_f)$ et $(\mathscr{C}_g)$.

# CORRIGE ♦ BAC 1-D ♦ 2012

## Exercice 1 — Corrigé proposé

**1° Trouvons l'ensemble D des réels pour lesquels $A(x)$ existe.**

$D_A=\{x\in\mathbb{R}\setminus 2\cos^2 x-1\neq 0\}$ ;

Posons $2\cos^2 x-1=0$. Or, $\cos 2x=2\cos^2 x-1=0$

Donc, $2\cos^2 x-1=0 \Leftrightarrow \cos 2x=0$

$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$

Il vient : $\boxed{D_A=\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}}$

**2° Montrons que pour tout réels $x$ de D, on a $A(x)=4\sin 2x$.**

$A(x)=\frac{2\sin 4x}{2\cos^2 x-1}=\frac{2(2\sin 2x\cos 2x)}{\cos 2x}$. Il vient: $\boxed{A(x)=4\sin 2x}$





**3°a) Recherche des valeurs de $m$ pour lesquelles $A(x)=m$**

$\frac{2\sin 4x}{2\cos^2 x-1}=m \Leftrightarrow 4\sin 2x=m \Leftrightarrow \sin 2x=\frac{m}{4}$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$-1<\sin 2x<1 \Leftrightarrow -1<\frac{m}{4}<1 \Leftrightarrow -4<m<4$

Cette équation admet des solutions si $\frac{m}{4}\in]-1;1[$ soit : $m\in]-4;4[$

Ainsi, pour $m\in]-4;4[$, l'équation admet des solutions.

**b) Résolution de l'équation proposée pour $m=2\sqrt{3}$**

$m=2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sin 2x=\frac{2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin 2x=\sin\frac{\pi}{3}$

On a : $\begin{cases} 2x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ \text{ou} \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ 2x=\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{6}+k\pi \\ \text{ou} \quad (k\in\mathbb{Z}) \\ x=\frac{\pi}{3}+k\pi \end{cases}$

- $\frac{\pi}{6}+k\pi=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \Rightarrow k=\frac{1}{6}$
- $\frac{\pi}{3}+k\pi=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \Rightarrow k=-\frac{1}{6}$

Or $k\in\mathbb{Z}$ donc, $\frac{\pi}{6}+k\pi\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{3}+k\pi\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$

$S=\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi;\frac{\pi}{6}+k\pi,\ (k\in\mathbb{Z})\right\}$

* Pour $k=0$, $x=\frac{\pi}{6}$ ou $x=\frac{\pi}{3}$

* Pour $k=-1$, $x=-\frac{5\pi}{6}$ ou $x=-\frac{2\pi}{3}$

Il vient : $\boxed{S_{]-\pi;\pi]}=\left\{\frac{-2\pi}{3};\frac{-5\pi}{6};\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right\}}$

# 5 Epreuve de Maths ♦ Bac 1 Série : D ♦ 2012

## EXERCICE 1

Soit l'expression : $A(x)=\dfrac{2\sin 4x}{2\cos^2 x-1}$ avec $x$ élément de $\mathbb{R}$.

1° Trouver l'ensemble D des réels pour lesquels $A(x)$ existe.

2° Montrer que pour tout réels $x$ de D, on a : $A(x)=4\sin 2x$.

3° Soit l'équation $\dfrac{2\sin 4x}{2\cos^2 x-1}=m$ où $m$ désigne un paramètre réel.

a) Pour quelles valeurs de $m$ cette équation admet-elle des solutions ?

b) Résolvez l'équation proposée pour $m=2\sqrt{3}$ et placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

c) Montrez que, pour $\cos x=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ avec $x\in\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$, on a :

$\sin x=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $m=2$.

d) Résolvez alors l'équation pour $\cos x=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ avec $x\in\left]0;\dfrac{\pi}{4}\right[$.

## EXERCICE 2

ABC est un triangle équilatéral de côté 2 (unité en cm). On appelle $t$ la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et h l'homothétie de centre A et de rapport $\dfrac{3}{2}$.

1° M étant un point quelconque du plan, construisez M' l'image de M par $h\circ t$

2°a) Démontrer que $\overrightarrow{AM'}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AM}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

b) Déduisez-en que $h\circ t$ admet un point invariant Ω tel que $\overrightarrow{A\Omega}=-3\overrightarrow{AB}$ puis placer Ω.





c) Déduisez-en que $\overrightarrow{\Omega M'}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\Omega M}$ puis caractériser $h\circ t$.

3° Soit Γ l'ensemble des points M du plan vérifiant $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$.

a) Vérifier que les points A et H appartiennent à Γ, H étant le pied de la hauteur issue de A.

b) Déterminez puis construisez Γ.

c) Déterminez puis construisez Γ' l'ensemble que décrit M' lorsque M décrit Γ.

## PROBLEME

**Partie A** : Soit la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ de représentation graphique $(\mathscr{C}_f)$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J)

1°a) Déterminer l'ensemble de définition $D_f$ de $f$.

b) Etudier le sens de variation de $f$ puis dresser son tableau de variation.

2°a) Démontrer qu'il existe quatre réels $a$, $b$, $c$ et $d$ tels que pour tout $x\in D_f$, $f(x)=ax+b+\dfrac{cx+d}{x^2-1}$

b) En déduire que $(\mathscr{C}_f)$ admet une asymptote oblique (D) dont on précisera une équation.

c) Donner les équations des autres asymptotes de $(\mathscr{C}_f)$.

B/ Soit $(E_m)$ l'équation : $x\in\mathbb{R}$, $x^3=mx^2-m$.
Discuter graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel $m$, le nombre de solutions de l'équation $(E_m)$.

C/ Soit : $g:\mathbb{R}\longmapsto\mathbb{R}$ et $h:\mathbb{R}\longmapsto\mathbb{R}$

$$x\longmapsto\frac{|x|^3}{x^2-1} \qquad x\longmapsto\frac{x^3-5x^2+7x-1}{(x-1)^2-1}$$

Soient $(\mathscr{C}_g)$ et $(\mathscr{C}_h)$ les représentations graphiques respectives des fonctions g et h

**c) Démonstrations**

Si $\cos x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

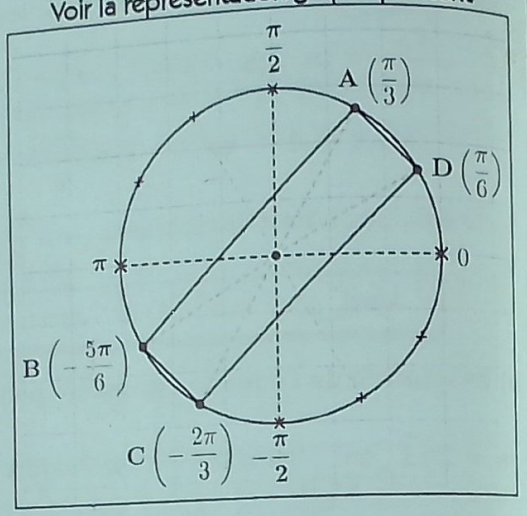
alors $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\Rightarrow \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$\sin^2 x = 1 - \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$

$\sin^2 x = \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2$

Voir la représentation graphiquement




Nous avions : $\sin x = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $\cos x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Pour $x \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$, donc, $\sin 2x = \frac{m}{4}$

$\Rightarrow \quad 2\sin x \cos x = \frac{m}{4} \quad \Rightarrow \quad 8\sin x \cos x = m$

$\Rightarrow \quad 8\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) = m \quad \Rightarrow \quad \frac{32}{16} = m$

Soit : $\boxed{m = 2}$

**d) Résolvons alors l'équation** $\cos x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ **avec** $x \in \left]0 ; \frac{\pi}{4}\right[$.

Comme $\cos x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ implique que $\sin x = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $m = 2$

Donc en remplaçant $\sin 2x = \frac{m}{4}$ on a :





$$\sin 2x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \qquad (k \in \mathbb{Z}) \\ 2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ \text{ou} \qquad (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases}$$

Après encadrement dans $\left]0 ; \frac{\pi}{4}\right[$ ; on trouve $\boxed{S = \left\{\frac{\pi}{12}\right\}}$

## Exercice 2

Corrigé proposé

**1) Construisons M' l'image de M par** $h \circ t$

$t$ la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et **h** l'homothétie de centre **A** et de rapport $\frac{3}{2}$. $t_{\overrightarrow{AB}}(M) = M_1 \Rightarrow \left(\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{AB}\right)$ ensuite $h(M_1) = M' \Rightarrow \overrightarrow{AM'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AM_1}$

**2°a) Démontrons que** $\overrightarrow{AM'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AM} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.

D'après la question **1)** on a : $\overrightarrow{AM'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AM_1}$ ce qui implique

$\overrightarrow{AM'} = \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MM_1}\right) = \frac{3}{2}\overrightarrow{AM} + \frac{3}{2}\overrightarrow{MM_1}$ or $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{AB}$

Donc, $\boxed{\overrightarrow{AM'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AM} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}}$

**2°b) Déduisons que** $h \circ t$ **admet un point invariant** $\Omega$

$\Omega$ est un point invariant par $h \circ t$ si et seulement si $h \circ t(\Omega) = \Omega$

$\Omega' = \Omega \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{A\Omega} = \frac{3}{2}\overrightarrow{A\Omega} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \quad \Rightarrow \cdot \quad \frac{-1}{2}\overrightarrow{A\Omega} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

Il vient : $\boxed{\overrightarrow{A\Omega} = -3\overrightarrow{AB}}$

## PROBLEME

Corrigé proposé

**Partie : A/** Soit la fonction $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ dont la courbe est $(\mathscr{C}_f)$.

**1°a) Déterminons l'ensemble de définition $D_f$ de $f$.**

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2-1\neq 0\}$. Or, en posant $x^2-1=0$, cela conduit à

$x=1$ ou $x=-1$. D'où : $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

Sous forme d'intervalle, on a : $D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$

**b) Sens de variation de f :**

■ **Limites aux bornes de $D_f$**

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$
- Pour calculer la limites en **-1** et **1**, alors nous devrions étudier le signe du trinome $x^2-1$ se trouvant au dénominateur du polynôme.

■ Le tableau de signe suivant donne le résultat.

| $x$ | $-\infty$ | -1 | | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-1$ | + | 0 | − | 0 | + |

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} f(x)=-\infty$ car $\begin{cases} x^3=-1\\ x^2-1\longmapsto 0\\ x^2-1>0\end{cases}$ $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x)=-\infty$ car $\begin{cases} x^3=+1\\ x^2-1\longmapsto 0\\ x^2-1<0\end{cases}$





$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)=+\infty$ car $\begin{cases} x^3=-1\\ x^2-1\longmapsto 0\\ x^2-1<0\end{cases}$ $\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} f(x)=+\infty$ car $\begin{cases} x^3=+1\\ x^2-1\longmapsto 0\\ x^2-1>0\end{cases}$

■ **Dérivée de f.**

$$f'(x)=\frac{3x^2(x^2-1)-2x^4}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

■ **Signe de la dérivée de f.**

$\forall x\in D_f$, le signe de la dérivée est celui de $(x^2-3)$.

car, le monôme $x^2>0$ et $(x^2-1)^2$ est aussi positif.

D'où, $f'(x)=0$ entraîne $x^2(x^2-3)=0$,

Nous avions trois solutions : $x=0$ ou $x=-\sqrt{3}$ ou $x=\sqrt{3}$

Enfin, le tableau de signe de la dérivée est :

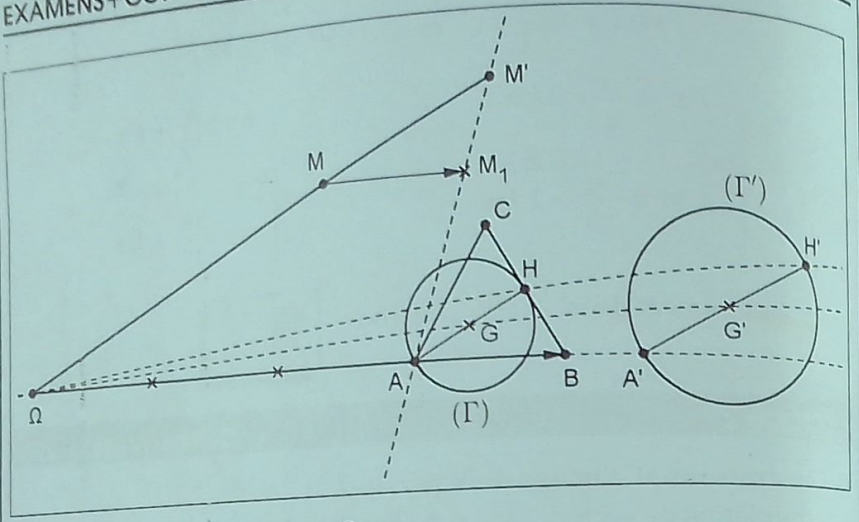
| $x$ | $-\infty$ | $-\sqrt{3}$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $\sqrt{3}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | − | ‖ | − | 0 | + |

■ **Sens de varaiation de f**

Pour $x\in]-\infty;-\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3};+\infty[$, $f'(x)>0$, donc la fonction $f$ est strictement croissante sur $]-\infty;-\sqrt{3}[$ et sur $]\sqrt{3};+\infty[$

Pour $x\in]-\sqrt{3};-1[\cup]-1;0[\cup]0;1[\cup]1;\sqrt{3}[$, $f'(x)<0$, donc la fonction $f$ est strictement décroissante sur $]-\sqrt{3};-1[$, sur $]-1;0[$, sur $]0;1[$ et sur $]1;\sqrt{3}[$.

Pour $x\in\{-\sqrt{3};0;\sqrt{3}\}$ ; $f'(x)=0$




c) Déduisons-en que $\overrightarrow{\Omega M'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{\Omega M}$

$h \circ t(M) = M' \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AM'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AM} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega M'} = \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{A\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}\right) + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} \quad$ Or, $\quad -\frac{1}{2}\overrightarrow{A\Omega} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{\Omega M'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A\Omega} + \frac{3}{2}\overrightarrow{\Omega M} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{\Omega M} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

Il vient : $\boxed{\overrightarrow{\Omega M'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{\Omega M}}$

* $\overrightarrow{\Omega M'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{\Omega M}$ signifie que $h \circ t$ est une homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $k = \frac{3}{2}$.





**3.a) Vérifions que les points A et H appartiennent à Γ,**

*** Vérifions que le point A appartient à (Γ)**

• Pour $M = A$ on a : $\left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|$

$\left\|2\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{AA} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right\|$ Or $\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right\| = \left\|-(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})\right\|$

Enfin, $\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right\|$

Ainsi le point **A** appartient à (Γ)

*** Vérifions que le point H appartient à (Γ)**

• Pour **M = H** on a : $\left\|2\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HC}\right\|$

Comme **B** est le pied de la hauteur issue du sommet **B** alors **B** est le milieu de [BC] donc $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \vec{0}$

D'où, on a : $\left\|2\overrightarrow{HA} + 0\right\| = \left\|2\overrightarrow{HA} - 0\right\| \Rightarrow \left\|2\overrightarrow{HA}\right\| = \left\|2\overrightarrow{HA}\right\|$

D'où, le point **H** appartient à (Γ).

**b) Déterminons puis construisons (Γ).**

$2 + 1 + 1 = 4 \neq 0$ donc il existe G tel que $G = \text{bar}\{(A;2)(B;1)(C;1)\}$

Cela signifie que $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MG}$

Donc, $\left\|4\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|2\overrightarrow{AH}\right\| \Rightarrow 4MG = 2AH \Rightarrow MG = \frac{1}{2}AH$

(Γ) est le cercle de centre **G** et de rayon $\frac{1}{2}AH$.

**c) Déterminons puis construisons Γ' l'ensemble que décrit M' lorsque M décrit Γ.**

(Γ') est l'image de (Γ) par $h \circ t$ donc (Γ') est le cercle de centre $G = h \circ t(G)$ et de rayon ΩG' tel que $\overrightarrow{\Omega G'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{\Omega G}$. $\quad \overrightarrow{AG'} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AG} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

Consulter la figure pour voir le tracé du cercle (Γ').

■ Tableau de variation de f

| $x$ | $-\infty$ | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ ‖ $-$ | $0$ | $-$ ‖ $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $\frac{-3\sqrt{3}}{2}$ | ↘ $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ $-\infty$ | ‖ $+\infty$ ↘ | $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ | ↗ $+\infty$ |

■ Points particuliers :

$f(-\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ et $f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ sont les extremums de la courbe,

**2°a) Déterminons a, b, c, et d**

Par division euclidienne on a : $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1}$

$f(x) = x + \frac{x}{x^2-1}$ donc $a=1$ ; $b=0$ ; $c=1$ et $d=0$

**b) Déduisons que ($\mathscr{C}_f$) admet une asymptote oblique (D)**

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{x}{x^2-1}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ donc, $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x] = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{x}{x^2-1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ donc, $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x] = 0$

D'où, la droite d'équation $y=x$ est asymptote oblique à ($\mathscr{C}_f$)



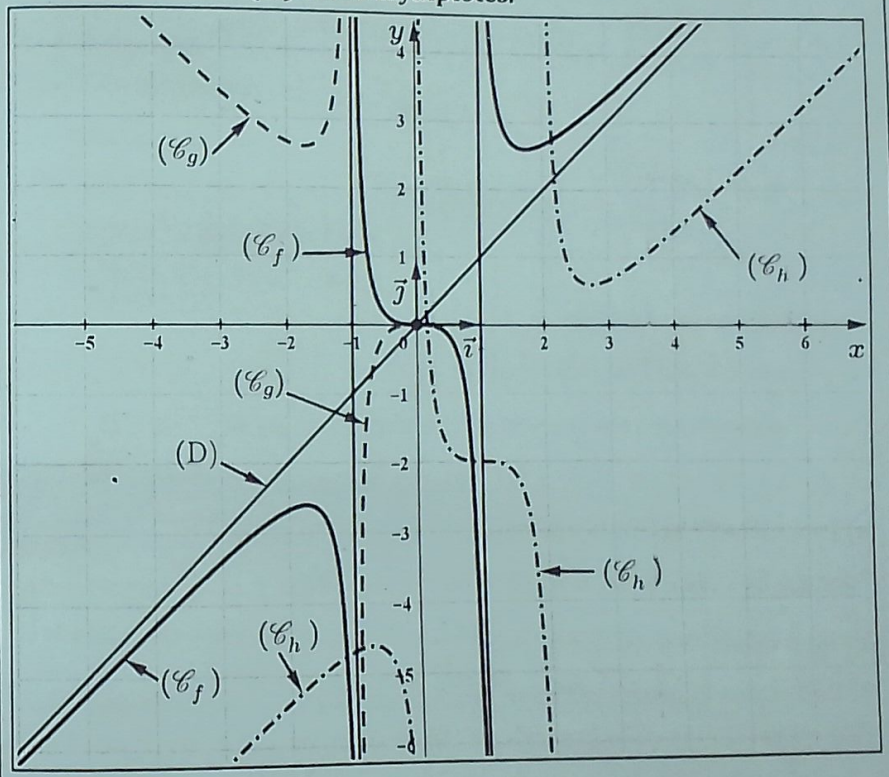


**c) Donnons les équations des autres asymptotes de ($\mathscr{C}_f$).**

$\lim\limits_{x\to-1} f(x) = \infty$ et que $-1 \notin D_f$ ; $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \infty$ et que $1 \notin D_f$.

Alors, les droites d'équation $x=1$ et $x=-1$ sont asymptotes verticales à la courbe ($\mathscr{C}_f$).

**3° Construction de ($\mathscr{C}_f$) et ses asymptotes.**




**Partie B**

**Discutons graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel $m$ .**

$(E_m): x\in\mathbb{R}$, $x^3 = mx^2 - m \quad \Rightarrow \quad m = \frac{x^3}{x^2-1} = f(x)$

# 6 Epreuve de Maths ♦ Bac 1 Série : D ♦ 2013

## EXERCICE 1

1° Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos 3x = 0$.

Placer sur le cercle trigonométrique les images des solutions.

2° Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = 0$.

3°Quelles sont les solutions communes aux deux équations précédentes dans $[0;2\pi[$ ?

4° Déterminer dans $[0;2\pi[$ les solutions de l'équation : $\tan 3x = \tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

## EXERCICE 2

On considère la suite $U$ définie par $U_0=0$ et $\forall \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \frac{16U_n-12}{3U_n+4}$

1° Calculer $U_1$ ; $U_2$ et $U_3$.

2° On pose $V_n = \frac{2U_n+1}{U_n-2}$.

a) Calculez $V_0$ ; $V_1$ et $V_2$.

b) Montrer que $(V_n)$ est une suite arithmétique dont vous préciserez la raison.

c) Etudiez le sens de variation de la suite $(V_n)$.

3°a) Exprimez $V_n$ en fonction de $n$.

b) Déduisez-en l'expression de $U_n$ en fonction de $n$.

c) On pose $S_n=V_0+V_1+\ldots+V_n$. Exprimez $S_n$ en fonction de $n$.

## PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). (Unité graphique 1cm)

**PARTIE A**

Soit $g$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par $g(x)=\frac{x^2-m|x-2|}{x+1}$





où $m$ est un réel.

Déterminer $m$ pur que le point d'intersection de la courbe représentative de la fonction $g$ et de l'axe des ordonnées ait pour ordonnée 2.

**PARTIE B**

Soit $f$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par: $f(x)=\frac{x^2+|x-2|}{x+1}$.

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $f$.

1° Ecrire $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue.

2° Calculer les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition.

3° Etudier la continuité et la dérivabilité de $f$ en 2.

4°a) Calculer la dérivée $f'$ de $f$ puis étudier le sens de variation de $f$

b) Dresser le tableau de variation de $f$.

5°a) Déterminer des réels $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$ et $c'$ tels que:

$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$ pour $x<2$, $x\neq -1$ et $f(x)=a'x+b'+\frac{c'}{x+1}$ pour $x>2$

b) En déduire que $(\mathscr{C})$ admet deux asymptotes $(D_1)$ en $-\infty$ et $(D_2)$ en $+\infty$

c) Etudier les positions relatives de $(\mathscr{C})$ et $(D_1)$ d'une part et de $(\mathscr{C})$ et $(D_2)$ d'autre part.

d) Précier l'autre asymptote de $(\mathscr{C})$.

6° Tracer la courbe $(\mathscr{C})$, ses asymptotes et les démi-tangentes à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 2.

**PARTIE C**

Soit $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par $h(x) = \frac{x^2+|x+2|}{1-x}$.

On note $(\mathscr{C}')$ la représentation graphique de $h$.

Après avoir expliqué comment obtenir $(\mathscr{C}')$ à partir de $(\mathscr{C})$, construire$(\mathscr{C}')$ dans le même repère que $(\mathscr{C})$.

D/ On considère l'équation : (E) : $x\in]-\infty;-1[\cup]-1;2]$,

$x^2-(k+1)x-k+2=0$ où $k$ décrit $\mathbb{R}$.

Déterminer graphiquement le nombre et le signe des solutions de (E).

**Discussion :**

Pour $m\in\left]-\infty;\frac{-3\sqrt{3}}{2}\right[\cup\left]\frac{3\sqrt{3}}{2};+\infty\right[$, (E) possède trois (03) solutions.

Pour $m\in\left\{\frac{-3\sqrt{3}}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2}\right\}$, (E) possède deux (02) solutions.

Pour $m\in\left]\frac{-3\sqrt{3}}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2}\right[$, (E) possède une unique solution.

**Partie C**

Soit : $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ et $h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$x\mapsto\frac{|x|^3}{x^2-1}$. $\quad x\mapsto\frac{x^3-5x^2+7x-1}{(x-1)^2-1}$

**1°a) Etudions la parité de g .**

$D_g=]-\infty;-1[\cup]-1;0[\cup]0;1[\cup]1;+\infty[$.

Donc, Dg symétrique par rapport à 0. De plus, pour $x\in D_g$, $-x\in D_g$

et $g(-x)=g(x)$ car $|-x|=|x|$, donc g est paire.

**b) Précisons l'ensemble sur lequel $f$ et g coïncident.**

Pour $x\in D_g\cap\mathbb{R}_+$, $f(x)=g(x)$ d'où : les fonctions $f$ et g coïncident sur les intervalles $[0;1[$ et sur $]1;+\infty[$.

**2° Déduisons la représentation graphique $(\mathscr{C}_g)$ de g à partir de $(\mathscr{C}_f)$.**

$(\mathscr{C}_g)$ est la réunion de la branche de $(\mathscr{C}_f)$ d'abscisse $x\in[0;1[\cup]1;+\infty[$ et de l'image de cette partie par la symétrie orthogonale d'axe des ordonnées.

**3°a) Montrons qu'il existe deux réels $e$ et $p$ tels que $h(x)=f(x-p)+e$**

On a : $h(x)=\frac{x^3-5x^2+7x-1}{(x-1)^2-1}$ et $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$





$$f(x-p)+e=\frac{(x-p)^3}{(x-p)^2-1}+e$$

$$f(x-p)+e=\frac{x^3+(e-3p)x^2+(3p^2-2ep)x+ep^2-p^3-e}{(x-p)^2-1}$$

Avec $h(x)$, par identification on a : $e-3=-5\Rightarrow e=-2$ et $p=1$

**b) En déduire que $(\mathscr{C}_h)$ se déduit de $(\mathscr{C}_f)$ par une transformation du plan que l'on précisera.**

Nous venons de montrer que $h(x)=f(x-1)-2$.

D'où, $(\mathscr{C}_h)$ est l'image de $(\mathscr{C}_f)$ par la translation de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.

*Ta réussite cette année, dépend bien de ta préparation mais aussi de ta foi en Dieu*

# CORRIGE ♦ BAC 1-D ♦ 2013

## Exercice 1

Corrigé proposé

**1° Résolution dans $\mathbb{R}$, l'équation $\cos 3x = 0$.**

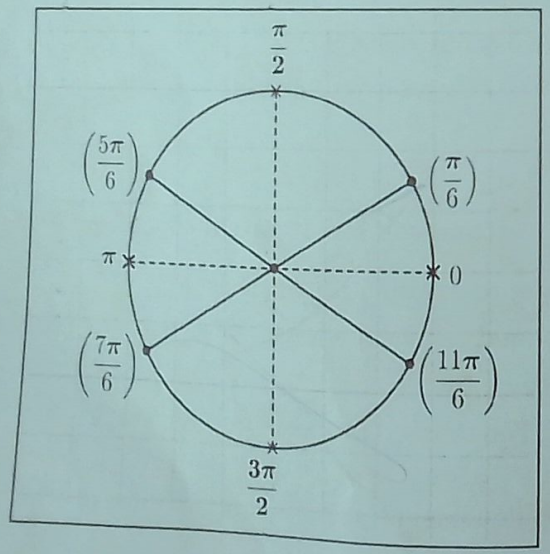
$\cos 3x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$

Il vient : $S_1 = \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

$-\pi < \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \leq \pi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-7}{2} < k \leq \frac{5}{2} \ ; \quad k \in \{-3;-2;-1;0;1;2\}$

Il vient : $S_{[-\pi;\pi]} = \left\{\frac{-5\pi}{6}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right\}$

Points-images des solutions sur le cercle trigonométrique








**2° Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$.**

$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$

Il vient : $S_2 = \left\{\frac{5\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

**3° Recherche des solutions communes aux deux équations.**

Dans $[0; 2\pi[$, on a :

$S_1 = \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}\right\}$ et $S_2 = \left\{\frac{5\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right\}$

Donc, $S_3 = S_1 \cap S_2$ Il vient : $S_3 = \left\{\frac{5\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right\}$

**4° Déterminons dans $[0; 2\pi[$ les solutions de l'équation :**

$\tan x = \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

$D_V = \{x \in [0; 2\pi[ \setminus S_1\}$ d'où : $D_V = [0; 2\pi[ \setminus \left\{\frac{5\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right\}$

Pour $x \in D_V$, $\tan 3x = \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \quad \Leftrightarrow \quad 3x = \left(x - \frac{\pi}{3}\right) + k\pi$

$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} < 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3} \leq k < \frac{13}{3}$

$\Leftrightarrow \quad k \in \{1;2;3;4\}$ donc, $x \in \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}; \frac{4\pi}{3}; \frac{11\pi}{6}\right\}$

Comme $D_V = [0; 2\pi[ \setminus \left\{\frac{5\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right\}$ alors, Il vient : $S_4 = \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right\}$

c) Exprimons $S_n$ en fonction de $n$.

$S_n = V_0 + V_1 + \ldots + V_n$ donc $S_n = \dfrac{(V_0+V_n)(n+1)}{2} = \left(\dfrac{3n-2}{2}\right)\left(\dfrac{n+1}{2}\right)$

D'où : $\boxed{S_n = \dfrac{(3n-2)(n+1)}{4}}$

## PROBLEME — Corrigé proposé

Partie A/ Déterminons la valeur de $m$.

$\forall x \in \mathbb{R}-\{1\}\ ;\ g(x) = \dfrac{x^2 - m|x-2|}{x+1}$, $m \in \mathbb{R}$

La courbe coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 2.

Soit $(\mathscr{C}g) \cap (Oy) = M(0\,;2)$ justifie que $g(0) = 2$

Signifie alors $\dfrac{-m|-2|}{1} = 2$ d'où : $\boxed{m = -1}$

Partie B/

**1°Ecrivons $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue.**

Posons $x-2=0$ alors $x=2$. Or $\forall x \in \mathbb{R}-\{-1\}\ ;\ f(x) = \dfrac{x^2+|x-2|}{x+1}$

| $x$ | $-\infty$ | -1 | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $x-2$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $\lvert x-2\rvert$ | $-x+2$ | $-x+2$ | | $x-2$ |

Pour $x \in ]-\infty;-1[\cup]-1;2[$ ; $|x-2| = 2-x$ donc, $f(x) = \dfrac{x^2-x+2}{x+1}$

Pour $x \in ]2;+\infty[$ ; $|x-2| = x-2$ donc, $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x+1}$





En résumé :

$$\begin{cases} \forall x \in ]-\infty;2[-\{-1\}\ ;\ f(x) = \dfrac{x^2-x+2}{x+1} \\ \forall x \in [2;+\infty[\ ;\quad f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x+1} \end{cases}$$

**2° Calculons de limites de $f$ aux bornes de l'ensemble de définition.**

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-x+2}{x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ Donc, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+x-2}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} \dfrac{x^2-x+2}{x+1} = -\infty$ car $\begin{cases} x^2-x+2 = 4 \\ x+1 \longmapsto 0 \\ x+1 < 0 \end{cases}$
- $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} \dfrac{x^2-x+2}{x+1} = +\infty$ car $\begin{cases} x^2-x+2 = 4 \\ x+1 \longmapsto 0 \\ x+1 > 0 \end{cases}$

**3° Etude de la continuité de $f$ au point 2.**

$\lim\limits_{\substack{x\to2\\<}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to2\\<}} \left(\dfrac{x^2-x+2}{x+1}\right) = \dfrac{4}{3}$ ; $\lim\limits_{\substack{x\to2\\>}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to2\\>}} \left(\dfrac{x^2+x-2}{x+1}\right) = \dfrac{4}{3}$

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to2\\<}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to2\\>}} f(x) = \dfrac{4}{3} = f(2)$ alors $f$ est continue en 2.

■ **Etude de la dérivabilité de $f$ au point 2.**

$\lim\limits_{\substack{x\to2\\<}} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to2\\<}} \left(\dfrac{\dfrac{x^2-x+2}{x+1} - \dfrac{4}{3}}{x-2}\right) = \lim\limits_{\substack{x\to2\\<}} \dfrac{3(x-2)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)}{3(x-2)(x+1)}$

## Exercice 2

Corrigé proposé

$U_0=0$ ; $\forall n\in\mathbb{N}$ ; $U_{n+1}=\dfrac{16U_n-12}{3U_n+4}$ ; $V_n=\dfrac{2U_n+1}{U_n-2}$.

1° Calculons les valeurs de $U_1$ ; $U_2$ et $U_3$.

$U_1=\dfrac{16U_0-12}{3U_0+4}$ D'où : $\boxed{U_1=-3}$

$U_2=\dfrac{16U_1-12}{3U_1+4}$ D'où : $\boxed{U_2=12}$

$U_3=\dfrac{16U_2-12}{3U_2+4}$ D'où : $\boxed{U_3=\dfrac{9}{2}}$

2°a) Calculons les valeurs de $V_0$ ; $V_1$ et $V_2$

$V_0=\dfrac{2U_0+1}{U_0-2}$ D'où : $\boxed{V_0=\dfrac{-1}{2}}$

$V_1=\dfrac{2U_1+1}{U_1-2}$ D'où : $\boxed{V_1=1}$

$V_2=\dfrac{2U_2+1}{U_2-2}$ D'où : $\boxed{V_2=\dfrac{5}{2}}$

b) Montrons que $(V_n)$ est une suite arithmétique.

On a : $V_n=\dfrac{2U_n+1}{U_n-2}$ ; $U_{n+1}=\dfrac{16U_n-12}{3U_n+4}$ et $V_{n+1}=\dfrac{2U_{n+1}+1}{U_{n+1}-2}$ ;

D'abord, écrivons l'expression de $V_{n+1}$ en fonction de $U_n$.

$$V_{n+1}=\frac{2U_{n+1}+1}{U_{n+1}-2}=\frac{2\times\left(\dfrac{16U_n-12}{3U_n+4}\right)+1}{\left(\dfrac{16U_n-12}{3U_n+4}\right)-2}=\frac{32U_n-24+3U_n+4}{16U_n-12-6U_n-8}$$

$$V_{n+1}=\frac{35U_n-20}{10U_n-20}=\frac{5(7U_n-4)}{5(2U_n-4)}\quad\text{donc,}\quad \boxed{V_{n+1}=\frac{7U_n-4}{2U_n-4}}$$





Maintenant, établissons la diférence $V_{n+1}-V_n$.

$$V_{n+1}-V_n=\frac{7U_n-4}{2U_n-4}-\frac{2U_n+1}{U_n-2}=\frac{7U_n-4-4U_n-2}{2U_n-4}$$

$$V_{n+1}-V_n=\frac{3U_n-6}{2U_n-4}=\frac{3(U_n-2)}{2(U_n-2)}\quad\text{D'où : }V_{n+1}-V_n=\frac{3}{2}$$

Donc $(V_n)$ est une suite arithmétique dè raison $r=\dfrac{3}{2}$

et de premier terme $V_0=-\dfrac{1}{2}$

2°c) Etudions le sens de variation de la suite $(V_n)$.

$V_{n+1}-V_n=\dfrac{3}{2}>0$ donc $(V_n)$ est croissante car sa raison est positive.

3.a) Exprimons $V_n$ en fonction de $n$.

Nous avons : $V_n=V_0+nr\Rightarrow V_n=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}n\Rightarrow\boxed{V_n=\dfrac{3n-1}{2}}$

b) Déduisons l'expression de $U_n$ en fonction de $n$.

Nous avons : $V_n=\dfrac{2U_n+1}{U_n-2}\Rightarrow V_n(U_n-2)=2U_n+1$

$V_nU_n-2V_n=2U_n+1\Rightarrow U_n(V_n-2)=2V_n+1$

$$U_n=\frac{2V_n+1}{V_n-2}=\frac{2\left(\dfrac{3n-1}{2}\right)+1}{\left(\dfrac{3n-1}{2}\right)-2}\Rightarrow\boxed{U_n=\frac{6n}{3n-5}}$$

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \dfrac{3x-1}{3(x+1)} = \dfrac{5}{9}$ Donc, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \dfrac{5}{9}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \left(\dfrac{\dfrac{x^2+x-2}{x+1}-\dfrac{4}{3}}{x-2}\right) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \dfrac{3(x-2)\left(x+\dfrac{5}{3}\right)}{3(x+1)(x-2)}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \dfrac{x+\dfrac{5}{3}}{(x+1)} = \dfrac{11}{9}$ Donc, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \dfrac{11}{9}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} \neq \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$ d'où $f$ n'est pas dérivable en 2.

**4.a)** ■ **Calculons la dérivée $f'$ de $f$.**

■ Pour $x\in]-\infty;-1[\cup]-1;2]$ ; donc, $f(x) = \dfrac{x^2-x+2}{x+1}$

$f'(x) = \dfrac{(2x-1)(x+1)-(x^2-x+2)}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$

Donc, $f'(x)$ est du signe de $x^2+2x-3$.

Posons $x^2+2x-3=0$ donc $\Delta=16 \Rightarrow x_1=1$ et $x_2=-3$

D'où, le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | -3 | | -1 | | 1 | | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+2x-3$ | − | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |
| $(x+1)^2$ | + | | + | 0 | + | | + | |
| $f'(x)$ | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | |





■ Pour $x\in[2;+\infty[$ ; donc, $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x+1}$

$f'(x) = \dfrac{(2x+1)(x+1)-(x^2+x-2)}{(x+1)^2}$ ; $\Rightarrow f'(x) = \dfrac{x^2+2x+3}{(x+1)^2}$

Posons $x^2+2x+3=0$ donc $\Delta=-8$ ; on déduit que le polynôme $x^2+2x+3>0$ et par suite pour $x\in[2;+\infty[$ alors $f'(x)>0$ est strictement **positif.**

En récapitulant du tableau de signe de $f'(x)$.

| $x$ | $-\infty$ | -3 | | -1 | | 1 | | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | | + |

■ **Étudions le sens de variation de $f$**

Pour $x\in]-\infty;-3[\cup]1;2[\cup]2;+\infty[$ ; $f'(x)>0$ ;

D'où : la fonction $f$ est strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty;-3[$ ; sur $]1;2[$ et sur $]2;+\infty[$.

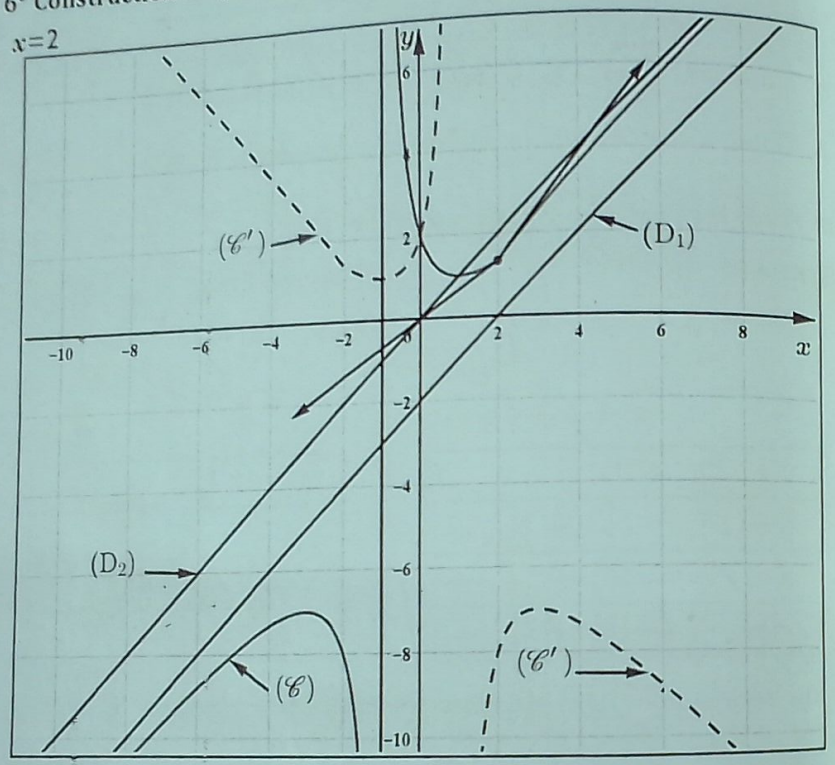
Pour $x\in]-3;-1[\cup]-1;1[$, $f'(x)<0$ ;

D'où : la fonction $f$ est décroissante sur $]-3;-1[$ et sur $]-1;1[$.

**b) Tableau de variation**

| $x$ | $-\infty$ | -3 | | -1 | | 1 | | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | ‖ | − | 0 | + | | + |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | -7 | ↘ | ‖ +∞ | ↘ | 1 | ↗ | 4/3 ↗ | +∞ |

6° Construction de $(\mathscr{C})$, ses asymptotes et les demi-tangentes au point




**Partie C** **Obtention de la courbe $(\mathscr{C}')$ àpartir de la courbe $(\mathscr{C})$.**

Soit $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{1\}$ par $h(x) = \dfrac{x^2+|x+2|}{1-x}$.

$$f(-x) = \frac{(-x^2)+|-x-2|}{-x+1} = \frac{x^2+|x+2|}{1-x} = h(x)$$

car $|-x-2| = |x+2|$ donc, $h(x)=f(-x)$ soit : $(\mathscr{C}') = S_{(OJ)}(\mathscr{C})$.

On en déduit que la courbe $(\mathscr{C}')$ est l'image de $(\mathscr{C})$ par la symétrie orthogonale d'axe $(OJ)$.





**Partie D:**

**Détermination graphique du nombre et du signe des solutions de l'équation (E).**

Soit l'équation (E) : $x\in]-\infty,-1[\cup]-1;2[$, $x^2-(k+1)x-k+2=0$

$\Rightarrow k = \dfrac{x^2-x+2}{x+1}$ ; soit : $f(x)=k$ pour $x\in]-\infty,-1[\cup]-1;2[$.

**Discussion :**

Pour $k\in]-\infty;-7[$ ; (E) admet 2 solutions de signe négatif.

Pour $k=-7$ ; (E) admet une unique solution de signe négatif.

Pour $k\in]-7;1[$ ; (E) n'admet aucune solution.

Pour $k=1$, (E) admet une unique solution de signe positif.

Pour $k\in\left]1,\dfrac{4}{3}\right]$, (E) admet 2 solutions de signe positif.

Pour $k\in\left[\dfrac{4}{3};2\right[$, (E) admet une unique solution de signe positif.

Pour $k=2$, (E) admet une solution unique nulle.

Pour $k\in]2;+\infty[$, (E) admet une solution de signe négatif.

« la foi a un pouvoir créateur redoutable.
Elle contient de la magie et du pouvoir »
Yvan Castanou

5°a) Déterminons des réels $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$ et $c'$

■ Pour $x<2$ et $x\neq -1$, on a $f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x+1}$. Par division euclidienne on a :

$f(x) = x-2+\dfrac{4}{x+1}$ donc $\boxed{a=1}$ ; $\boxed{b=-2}$ et $\boxed{c=4}$

■ Pour $x>2$ ; $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x+1} = x-\dfrac{2}{x+1}$ par division euclidienne.

Donc $\boxed{a'=1}$ ; $\boxed{b'=0}$ et $\boxed{c'=-2}$

**b) Déduisons que ($\mathscr{C}$) admet 2 asymptotes ($D_1$) en $-\infty$ et ($D_2$) en $+\infty$**

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x-2)\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x+1} = 0$. On peut conclure que

la droite ($D_1$) d'équation $y = x-2$ est asymptote oblique à ($\mathscr{C}$) à $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2}{x+1} = 0$. On peut déduire des calculs que

la droite ($D_2$) d'équation $y=x$ est asymptote oblique à ($\mathscr{C}$) à $+\infty$

**c) Etude des positions relatives de ($\mathscr{C}$) et ($D_1$).**

Pour $x\in]-\infty;-1[\cup]-1;2]$ ;

$d(x) = f(x)-(x-2) = \dfrac{4}{x+1}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $4$ | $+$ | | ‖ | | $+$ |
| $x+1$ | $-$ | | $\boxed{0}$ | | $+$ |
| $d(x)$ | $-$ | | ‖ | | $+$ |

* Pour $x\in[2;+\infty[$ ; Posons alors

$d(x) = f(x)-(x-2) = \dfrac{2x}{x+1}$

| $x$ | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $2x$ | $+$ | | |
| $x+1$ | $+$ | | |
| $d(x)$ | $+$ | | |

Nous récapitulons dans le tableau, les résultats du signe de $d(x)$.





| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $d(x)$ | $-$ | | ‖ | $+$ | $\boxed{0}$ | $+$ | |

Sur l'intervalle $]-\infty;-1[$, la courbe ($\mathscr{C}$) est en dessous de ($D_1$)

Sur l'intervalle $]-1;+\infty[$, la courbe ($\mathscr{C}$) est au-dessus de ($D_1$)

■ **Etude les positions relatives de ($\mathscr{C}$) et ($D_2$).**

Pour $x\in]-\infty;-1[\cup]-1;2]$ ;

Posons $r(x) = f(x)-(x)$

$r(x) = x-2+\dfrac{4}{x+1}-x = \dfrac{-2x+2}{x+1}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-2x+2$ | $+$ | | ‖ | $+$ | $\boxed{0}$ | $-$ | |
| $x+1$ | $-$ | $\boxed{0}$ | $+$ | | | $+$ | |
| $r(x)$ | $-$ | | ‖ | $+$ | $\boxed{0}$ | $-$ | |

* Pour $x\in[2;+\infty[$ ;

Posons $r(x) = f(x)-(x)$

$r(x) = f(x)-x = \dfrac{-2}{x+1}$

| $x$ | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $-2$ | $-$ | | |
| $x+1$ | $+$ | | |
| $r(x)$ | $-$ | | |

Nous récapitulons dans le tableau, les résultats du signe de $r(x)$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r(x)$ | $-$ | | ‖ | $+$ | $\boxed{0}$ | $-$ | | $-$ | |

Sur l'intervalle $]-\infty;-1[$, et $]1;+\infty[$ la courbe ($\mathscr{C}$) est en dessous de ($D_2$)

Sur l'intervalle $]-1;+1[$, la courbe ($\mathscr{C}$) est au-dessus de ($D_2$)

**d) Précisons l'équation de l'autre asymptote de ($\mathscr{C}$).**

$\lim\limits_{x\to-1} f(x)=\infty$ et $-1\notin D_f$ donc la droite d'équation $x=-1$ est asymptote vertical à ($\mathscr{C}$)

# 7 Epreuve de Maths ♦ Bac 1 Série : D ♦ 2014

## EXERCICE 1

Soient les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ définies sur $\mathbb{N}$ par : $a_0=1$ et $b_0=8$

et $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1}=\dfrac{2a_n+b_n}{3}$ ; $b_{n+1}=\dfrac{a_n+3b_n}{4}$.

1° Calculer $a_1$ et $b_1$.

2° Soit la suite $(d_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $d_n=b_n-a_n$.

a) Démontrer que $(d_n)$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme $d_0$ et la raison $q$.

b) Exprimer $d_n$ en fonction de $n$.

c) En déduire que $\forall n\in\mathbb{N}$, $d_n>0$.

d) Montrer que $(d_n)$ converge vers 0.

e) On pose $T_n=d_0+d_1+d_2+\ldots+d_{n-1}$. Calculer $T_n$ en fonction de $n$.

3°a) Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1}-a_n=\dfrac{d_n}{3}$ et $b_{n+1}-b_n=\dfrac{-d_n}{4}$.

b) En déduire les variations des suites $(a_n)$ et $(b_n)$.

## EXERCICE 2

On considère la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par : $P(x)=4x^3-2x^2-3x+1$.

1° Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $P(x)=0$.

2° On donne l'équation (E) : $\cos 3\theta=\cos 2\theta$.

a) Résoudre dans $]-\pi;\pi]$ l'équation (E).

b) Exprimer $\cos 2\theta$ en fonction de $\cos\theta$,





puis montrer que $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$

c) On pose $x=\cos\theta$. Exprimer alors $\cos 3\theta$ et $\cos 2\theta$ en fonction de $x$.

d) En déduire que l'équation (E) est équivalente à : $-1\leq x\leq 1$ et $P(x)=0$.

3°Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$, puis celle de $\cos\dfrac{\pi}{5}$.

## PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

Partie A On considère la fonction $f(x)=x(3-x)$ et on désigne par (P) la représentation graphique de $f$ dans le repère (O, I, J).

1° Etudier les variations de $f$ et dresser son tableau de variation.

2° Construire les tangentes à (P) aux points d'abscisses 0 et 3 et la courbe (P) dans le repère (O, I, J).

Partie B Soit la fonction g définie de $\mathbb{R}\longmapsto\mathbb{R}$ par $g(x)=\dfrac{x^2-3x}{x-1}$.

$(\mathscr{C})$ sa représentation graphique dans le repère (O, I, J).

1°a) Déterminer l'ensemble de définition D de g.

b) Déterminer trois réels $a$, $b$ et $c$ tels que :

$\forall x\in D$, $g(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$.

c) En déduire que $(\mathscr{C})$ admet une asymptote oblique et donner son équation.

2°a) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

b) En déduire que $(\mathscr{C})$ admet une asymptote verticale et donner son équation.

c) Montrer que le point A intersection des deux asymptotes est un centre de symétrie pour la courbe $(\mathscr{C})$.

3° Donner une équation des tangentes à $(\mathscr{C})$ aux points d'abscisses 0 et 3.

3°a) Démontrons que $\forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+1}-a_n=\frac{d_n}{3}$ et $b_{n+1}-b_n=-\frac{d_n}{4}$

$$\forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+1}-a_n=\frac{2a_n+b_n}{3}-a_n=\frac{2a_n+b_n-3a_n}{3}=\frac{b_n-a_n}{3}=\frac{d_n}{3}$$

$$\forall n\in\mathbb{N},\ b_{n+1}-b_n=\frac{a_n+3b_n}{4}-b_n=\frac{a_n+3b_n-4b_n}{4}=\frac{a_n-b_n}{4}$$

$\forall n\in\mathbb{N},\ \boxed{b_{n+1}-b_n=-\frac{d_n}{4}}$ et $\boxed{a_{n+1}-a_n=\frac{d_n}{3}}$

**b) Déduisons-en les variations des suites $(a_n)$ et $(b_n)$**

D'après 2.c) et 3.d), $\forall n\in\mathbb{N},\ d_n>0$.

D'où : $\forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+1}-a_n>0$ soit : $a_{n+1}>a_n$ et $b_{n+1}-b_n<0$.

La suite $(a_n)$ est donc strictement croissante.

La suite $(b_n)$ est donc strictement décroissante.

## Exercice 2 — Corrigé proposé

**1° Résolvons dans $\mathbb{R}$, l'équation $P(x)=0$.**

$P(x)=4x^3-2x^2-3x+1$ donc $P(1)=0$.

D'où : le nombre 1 est une racine évidente de $P(x)$.

Ainsi, le polynôme $P(x)$ est divisible par $x-1$.

On a : $P(x)=(x-1)(4x^2+2x+1)$

Résoudre $P(x)=0 \Leftrightarrow x-1=0$ ou $4x^2+2x+1=0$

Pour $4x^2+2x+1=0$ le discriminant est : $\Delta=4+16=20=(2\sqrt{5})^2$

Nous avons deux solutions distincts : $x=\frac{-2-2\sqrt{5}}{8}$ ou $x=\frac{-2+2\sqrt{5}}{8}$





Il vient : $x=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ ou $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

Soit : $P(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ ou $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

Il vient : $\boxed{S=\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\ ;\ 1\ ;\ \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right\}}$

**2°a) Résolvons dans $]-\pi;\pi]$ l'équation (E) : $\cos 3\theta=\cos 2\theta$.**

$$\cos 3\theta=\cos 2\theta \Leftrightarrow \begin{cases}3\theta=2\theta+2k\pi\\ \text{ou (avec } k\in\mathbb{Z})\\ 3\theta=-2\theta+2k\pi\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\theta=2k\pi\\ \text{ou } (k\in\mathbb{Z})\\ 5\theta=2k\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\theta=2k\pi\\ \text{ou } (k\in\mathbb{Z})\\ \theta=\frac{2k\pi}{5}\end{cases}$$

Les solutions dans $]-\pi;\pi]$, $\boxed{S=\left\{\frac{-4\pi}{5};\frac{-2\pi}{5}\ ;\ 0\ ;\ \frac{2\pi}{5};\frac{4\pi}{5}\right\}}$

**2°b) Exprimons $\cos 2\theta$ en fonction de $\cos\theta$.**

On a : $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$

**Montrons ensuite que $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$**

On a :
$$\cos 3\theta=\cos(2\theta+\theta)=\cos\theta\times\cos 2\theta-\sin\theta\times\sin 2\theta$$
$$=\cos\theta(2\cos^2\theta-1)-2\sin^2\theta\cdot\cos\theta$$
$$=\cos\theta[2\cos^2\theta-1-2(1-\cos^2\theta)]$$
$$\cos 3\theta=\cos\theta(4\cos^2\theta-3)$$

Il vient : $\boxed{\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta}$

4° Tracer les tangentes à (𝒞) aux points d'abscisses 0 et 3, les asymptotes puis (𝒞) dans le même repère que (P).

Partie C

Soit la fonction $h$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$h(x)=\frac{x}{2(x-1)}(x^2-5x+6-|x^2-3x|)$

1° Déterminer l'ensemble de définition $D_h$ de h puis résoudre dans $\mathbb{R}$ :

- L'équation : $x^2-4x+3=0$.
- L'inéquation : $x^2-3x\geq 0$.

2° Exprimer alors $h(x)$ sans le symbole de valeur absolue.

3° Sans autres calculs, en tenant compte des résultats qui précédemment et en utilisant une couleur différente de celle utilisée pour construire (P) en (𝒞), représenter graphiquement $h$ dans le repère (O, I, J).

# CORRIGE ♦ BAC 1-D ♦ 2014

## Exercice 1 — Corrigé proposé

**1° Calculons $a_1$ et $b_1$.**

$a_0=1$ et $b_0=8$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1}=\frac{2a_n+b_n}{3}$ ; $b_{n+1}=\frac{a_n+3b_n}{4}$.

$a_1=\frac{2a_0+b_0}{3}=\frac{10}{3}$ ; $b_1=\frac{a_0+3b_0}{4}=\frac{25}{4}$ On a : $\boxed{a_1=\frac{10}{3}}$ et $\boxed{b_1=\frac{25}{4}}$

**2°a) Démontrons que $(d_n)$ est une suite géométrique**

La suite $(d_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $d_n=b_n-a_n$.





$d_{n+1}=b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{a_n+3b_n}{4}-\frac{2a_n+b_n}{3}=\frac{3a_n+9b_n-8a_n-4b_n}{12}$

$d_{n+1}=\frac{-5a_n+5b_n}{12}=\frac{5}{12}(b_n-a_n)$ ; Il vient : $\boxed{d_{n+1}=\frac{5}{12}d_n}$

$d_0=b_0-a_0 \quad \Rightarrow \quad d_0=8-1=7$

$(d_n)$ est donc une suite géométrique de raison $q=\frac{5}{12}$ et de 1er terme 7.

**b) Exprimons $d_n$ en fonction de $n$.**

$\forall n\in\mathbb{N}$, $d_n=d_0q^n$ donc : $\boxed{d_n=7\left(\frac{5}{12}\right)^n}$

**c) Déduisons que $\forall n\in\mathbb{N}$, $d_n>0$.**

Puisque $7>0$ on conclut que $\forall n\in\mathbb{N}$, $d_n>0$.

**d) Montrons que $(d_n)$ converge vers 0**

Puisque $\left|\frac{5}{12}\right|<1$, d'où : $(d_n)$ converge vers 0.

**e) Calculons $T_n$ en fonction de $n$.**

$T_n=d_n+d_1+\ldots+d_{n+1}$ donc, $T_n=d_0\times\frac{1-q^n}{1-q}=7\times\frac{1-\left(\frac{5}{12}\right)^n}{1-\frac{5}{12}}$

Il vient : $\boxed{T_n=12\left[1-\left(\frac{5}{12}\right)^n\right]}$

**2°c) Exprimons alors $\cos 3\theta$ et $\cos 2\theta$ en fonction de $x$ .**

Nous avons : $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ et $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

On pose $x = \cos\theta$ donc $\boxed{\cos 3\theta = 4x^3 - 3x}$ et $\boxed{\cos 2\theta = 2x^2 - 1}$

**2°d) Déduisons**

On a : $\cos 3\theta = \cos 2\theta$ donne $\cos 3\theta - \cos 2\theta = 0$

On a : $4x^3 - 3x - (2x^2 - 1) = 0$ avec $x \in [-1\,;1]$

On a : $4x^3 - 3x - 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0$

D'où : (E) $\Leftrightarrow$ $-1 \le x \le 1$ et $P(x) = 0$

**3° Déduisons les valeurs de $\cos\frac{2\pi}{5}$, puis celle de $\cos\frac{\pi}{5}$.**

Nous savons que $\cos\frac{2\pi}{5} \in \left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\ ;\ 1\ ;\ \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right\}$

et comme $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ donc $\boxed{\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}}$

On a aussi : $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ donc $\cos^2\theta = \frac{\cos 2\theta + 1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos^2\frac{\pi}{5} = \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)+1}{2} = \frac{3+\sqrt{5}}{8}$

$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$ ou $\cos\frac{\pi}{5} = -\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$

et comme $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ donc $\cos\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$

Il en résulte : $\Rightarrow$ $\boxed{\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}}$





## Problème — Corrigé proposé

**Partie A**

**1) Etudions les variations de $f$ et dressons son tableau de variation**

▶ Le domaine de définition est $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$

▶ Calculons les limites aux bornes de $D_f$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(-x^2) = -\infty$ ; D'où : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2) = -\infty$ ; D'où : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$

■ **Calculons la dérivée de f.**

$f(x) = -x^2 + 3x$ ; alors $\forall x \in \mathbb{R}$ , $\boxed{f'(x) = -2x+3}$

***Signe de la dérivée $f'(x)$**

Posons $-2x+3 = 0$

On obtient : $x = \frac{3}{2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | |

$\forall x \in \left]-\infty\,;\frac{3}{2}\right[$ , $f'(x) > 0$ ; $f$ est donc strictement croissante sur $\left]-\infty\,;\frac{3}{2}\right[$

$\forall x \in \left]\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$ , $f'(x) < 0$ ; $f$ est donc strictement décroissante sur $\left]\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$ donc $f$ admet à $\frac{3}{2}$ un maximum égal $\frac{9}{4}$.

■ Tableau de variation

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $f(3/2)$ | ↘ | $-\infty$ |

2) Equations des tangentes en $x=0$ et $x=3$

$(T_0): y = f'(0)(x-0)+f(0)$ donne l'équation $\boxed{(T_0): y = 3x}$

$(T_3): y = f'(3)(x-3)+f(3)$, soit, on a : $y = -3(x-3)+0$

Il vient : $\boxed{(T_3): y = -3x+9}$

Partie B

Soit la fonction g définie de $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{x^2-3x}{x-1}$.

1°a) Ensemble de définition D de g.

Posons $x+1=0$ donc $D=\mathbb{R}-\{1\}$ ou $\boxed{D=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[}$

b) Déterminons $a$, $b$ et $c$ tels que $g(x) = ax+b+\dfrac{c}{x-1}$

D'après la division euclidienne de $(x^2-3x)\div(x-1)$, on a :

$a=1$ ; $b=-2$ et $c=-2$

| $x^2-3x$ | $x-1$ |
|---|---|
| $-(x^2-x)$ | $x-2$ |
| $-2x$ | |
| $-(-2x+2)$ | |
| $-2$ | |

$\boxed{g(x) = x-2+\dfrac{-2}{x-1}}$





c) En déduire que $(\mathscr{C})$ admet une asymptote oblique.

On a : $\forall x\neq 1$, $g(x) = x-2-\dfrac{2}{x-1}$

$$\lim_{x\to+\infty}[g(x)-(x-2)] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2}{x-1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}[g(x)-(x-2)] = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-2}{x-1}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-2}{x}\right) = 0$$

On conclut que la courbe $(\mathscr{C})$ admet une asymptote oblique d'équation $y=x-2$ en $-\infty$ et en $+\infty$

2.a) Etude des variations de g et tableau de variation

▶ Calculons les limites

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x$ ; Il vient : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2}{x}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} x$ ; Il vient : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty}$

Le numérateur de g est $x^2-3x$ et le dénominateur de g est $x-1$

Etablissons le signe de $(x-1)$

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

Posons $N(x) = x^2-3x$ ;

$D(x) = x-1$

Calculons $\begin{cases} N(1)=-2 \\ D(1)=0 \end{cases}$

$\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} g(x)=+\infty}$ car $\begin{cases} x^2-3x=-2 \\ x-1\mapsto 0 \\ x-1<0 \end{cases}$ $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to1\\>}} g(x) = -\infty}$ car $\begin{cases} x^2-3x=-2 \\ x-1\mapsto 0 \\ x-1>0 \end{cases}$

▶ Calculons la dérivée

$\forall x\in D,\ g'(x) = \dfrac{(2x-3)(x-1)-(x^2-3x)}{(x-1)^2}$ ;

Nous obtenons : $\boxed{g'(x) = \dfrac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}}$ ou $\boxed{g'(x) = 1+\dfrac{2}{(x-1)^2}}$

▶ Signe de $g'(x)$ et sens de variation de $g$

$\forall x\in D,\ (x-1)^2>0$, donc $g'(x)$ est du signe de $x^2-2x+3$.

Posons $x^2-2x+3 = 0$ ; On a : $\Delta = 4-12 = -8<0$

Donc $x^2-2x+3>0$. On en déduit que $\forall x\in D,\ g'(x)>0$.

Donc $g$ est strictement croissante sur $]-\infty;1[$ et sur $]1;+\infty[$

▶ Tableau de variation

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | | ‖ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ ↗ | | ‖ | ↗ $+\infty$ | |

**b) Déduisons que (𝒞) admet une asymptote verticale**

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} g(x) = -\infty$

Donc, la courbe (𝒞) admet la droite d'équation $x = 1$ comme asymptote verticale.

**c) Montrons que le point A est centre de symétrie de (𝒞)**

On a : $\begin{cases} x = 1 \\ y = x-2 \end{cases}$ alors, on a : $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$ donc **A(1 ; -1)**





On a : $\forall x\in D,\ x\neq 1 \Rightarrow -x\neq -1 \Rightarrow 2-x\neq 1 \Rightarrow 2-x\in D$

On a : $g(x) = x-2-\dfrac{2}{x-1}$ donc $g(2-x) = 2-x-2-\dfrac{2}{2-x-1}$ ;

$g(2-x)+g(x) = -x-\dfrac{2}{1-x}+x-2-\dfrac{2}{x-1}$

Il vient : $g(2-x)+g(x) = -2$

D'où, le point **A(-1 ; 1)** est le centre de symétrie de la courbe (𝒞)

**3) Equations des tangentes aux points $x=0$ et $x=3$**

$(T_0'): y = g'(0)(x-0)+g(0) \Rightarrow \boxed{(T_0'): y = 3x}$

$(T_3'): y = g'(3)(x-3)+g(3) \Rightarrow \boxed{(T_3'): y = \dfrac{3}{2}x-\dfrac{9}{2}}$

**4) Construction de la courbe (𝒞), ses asymptote et tangentes**

( à consulter à la page suivante )

**Partie C**

$h(x) = \dfrac{x}{2(x-1)}\left(x^2-5x+6-|x^2-3x|\right)$

**1.a) Ensemble de définition $D_h$**

$D_h = \mathbb{R}-\{1\}$ ou $\boxed{D_h = ]-\infty;1[\cup]1;+\infty[}$

**Résolvons dans $\mathbb{R}$**

Posons $x^2-4x+3 = 0$ ; le discriminant est $\Delta = 16-12 = 4$ ;

On obtient deux racines : $x_1 = \dfrac{4-2}{2}$ ou $x_2 = \dfrac{4+2}{2}$

Soit : $x_1 = 1$ ou $x_2 = 3$ D'où : $\boxed{S = \{1;3\}}$

$x^2-3x \geq 0$ équivaut à $x(x-3) \geq 0$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-3x$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

D'où : $S = ]-\infty;0]\cup[3;+\infty[$

**2) Ecrivons $h(x)$ sans les valeurs absolues**

♦ D'après 1, on a : si $x\in]-\infty;0]\cup[3;+\infty[$, alors $|x^2-3x| = x^2-3x$

Donc, $h(x) = \dfrac{2x(3-x)}{2(x-1)} = \dfrac{x(3-x)}{(x-1)} = -g(x)$

♦ si $x\in[0;1[\cup]1;3]$, alors $|x^2-3x| = -(x^2-3x)$. Donc,

$$h(x) = \frac{2x(x^2-4x+3)}{2(x-1)} = \frac{x(x-3)(x-1)}{(x-1)} = x(x-3) = -f(x)$$

**3)** On remarque que : $h(x) = -g(x)$ si $x\in]-\infty;0]\cup[3;+\infty[$

et $h(x) = -f(x)$ si $x\in[0;1[\cup]1;3]$

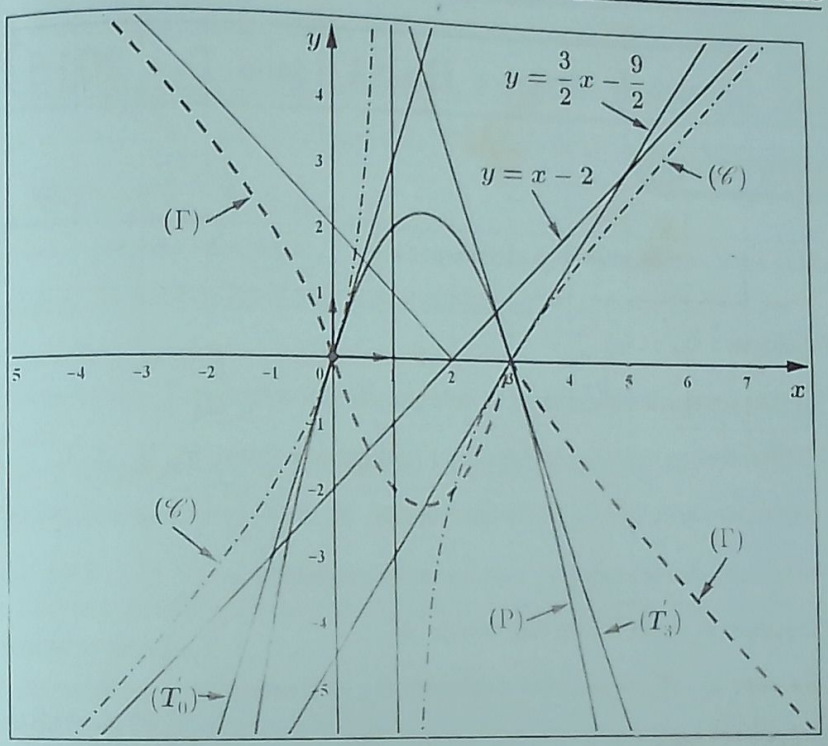
De tout ce qui précède, on déduit quelque soit $x\in]-\infty;0]\cup[3;+\infty[$ la courbe $(\mathscr{C}')$ est identique à la symétrique de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à l'axe des abscisses, et quelque soit $x\in[0;1[\cup]1;3]$ la courbe $(\mathscr{C}')$ est identique à la symétrique de la courbe $(\mathscr{P})$ par rapport à l'axe des abscisses.

$(\mathscr{C}')=S_{(OI)}(\mathscr{C})_{\forall x\in]-\infty,0[\cup[3;+\infty[}\cup S_{(OI)}(P)_{\forall x\in]0;1[\cup[1;3[}$

*« Celui qui vit sa légende connaît ses besoins.*
*Il n'y a qu'une chose qui puisse rendre un rêve*
*Impossible: C'est la peur d'échouer. »*
*Paulo Coelho, L'alchimiste*








**Les Annales KIT du Bac**

*Ayez toujours à portée de main ce manuel qui constitue:*
- *un excellent instrument de formation pour les élèves;*
- *un guide utile pour les professeurs;*
- *un avantage certain pour les parents d'élèves.*

**Collection Flammes du Succès**

## 8 Epreuve de Maths ♦ Bac 1 Série : D ♦ 2015

### EXERCICE 1

Soit la suite numérique $(U_n)$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n+3}{U_n+4} \end{cases}$, $(n\in\mathbb{N})$

1° Calculer : $U_1$ et $U_2$.

2°a) Déterminer les réels $a$ et $b$ tels que $U_{n+1} = a+\dfrac{b}{U_n+4}$

b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n$, $U_n \leq 1$.

On considère la suite $(V_n)$ telle que : $n\in\mathbb{N}$, $V_n = \dfrac{U_n-1}{U_n+3}$.

3° Montrons que la suite $(V_n)$ est une suite géométrique.

4° Calculer $V_n$ puis $U_n$ en fonction de $n$.

5° On pose $S_n = V_0+V_1+\ldots+V_n$. Calculer $S_n$ en fonction de $n$.

### EXERCICE 2

ABC est un triangle rectangle en A tel que : $AB=a$ ; $AC=a\sqrt{3}$ ; $BC=2a$ où $a$ est un réel strictement positif.

1° Construire le barycentre G des points (A ; -1) ; (B ; 1) ; (C ; 1).

2°a) Calculer $GA^2$, $GB^2$ et $GC^2$.

b) Déterminer et construire l'ensemble $(\Gamma)$ des points M du plan tel que : $-MA^2+MB^2+MC^2 = 4a^2$.

3° Soit I le milieu de [BC]. Déterminer et construire l'ensemble $(\Gamma')$ des points M tels que : $\left(2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right) = -a^2\sqrt{3}$

4° Soit $f$ l'application du plan dans le plan qui à tout point M associe M' tel





que : $3\overrightarrow{MM'} = -\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$.

a) Montrer que $f$ est une homothétie. Préciser son centre et son rapport.

b) Déterminer et construire l'ensemble $(\Gamma'')$ image de $(\Gamma)$ par $f$.

### PROBLEME

Le plan muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Partie A/ Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x-2}$.

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $f$.

1° Déterminer l'ensemble de définition de $f$ et calculer les limites en ses bornes.

2° Etudier la variation de $f$ et dresser son tableau de variation.

3°a) Déterminer les réels $a$, $b$ et $c$ tels que : $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x-2}$ pour tout $x\neq 2$.

b) Déduire que $(\mathscr{C})$ admet une asymptote oblique $(\Delta)$ puis préciser l'autre asymptote de $(\mathscr{C})$.

c) Démontrer que le point de concours des asymptotes est le centre de symétrie de $(\mathscr{C})$.

4°a) Déterminer les points de $(\mathscr{C})$ en lesquels les tangentes sont parallèles à la droite d'équation : $y=-4x+2$.

b) donner l'équation des tangentes $(T_1)$ et $(T_2)$ à $(\mathscr{C})$ en $x_0=1$ et en $x_0=3$ respectivement

5° Déterminer les points d'intersection de $(\mathscr{C})$ aux axes du repère.

6° Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ et les tangentes $(T_1)$ et $(T_2)$.

7° Soit $(D_m)$ la droite d'équation : $y=-4x+m$, où $m$ est un paramètre réel. Discuter graphiquement suivant les valeurs de $m$, le nombre de points d'intersection de $(\mathscr{C})$ et de $(D_m)$.

Partie B/

Soit $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ par $h(x) = \dfrac{x^2+2|x|-3}{|x|-2}$.

On note $(\mathscr{C}')$ sa courbe representative.

**a)** Etudier la parité de **h**.

**b)** Déterminer l'ensemble sur le quel **h** et $f$ coïncident.

**c)** Expliquer comment obtenir la courbe $(\mathscr{C}')$ à partir de $(\mathscr{C})$.

**d)** Construire $(\mathscr{C}')$ dans le même repère que $(\mathscr{C})$.

# CORRIGE ♦ BAC 1-D ♦ 2015

## Exercice 1 — Corrigé proposé

Soit la suite numérique $(U_n)$ définie par : $\begin{cases} U_0=0 \\ U_{n+1}=\dfrac{2U_n+3}{U_n+4}, \ (n\in\mathbb{N}) \end{cases}$

**1° Calculons les nombres $U_1$ et $U_2$.**

$U_1=\dfrac{2U_0+3}{U_0+4}$ ; $\Rightarrow$ $\boxed{U_1=\dfrac{3}{4}}$ $\quad U_2=\dfrac{2U_1+3}{U_1+4}$ ; $\Rightarrow$ $\boxed{U_2=\dfrac{18}{19}}$

**2°a) Déterminons les réel $a$ et $b$ tels que $U_{n+1}=a+\dfrac{b}{U_n+4}$**

$a+\dfrac{b}{U_n+4}=\dfrac{aU_n+4a+b}{U_n+4}$. Par identification : $\begin{cases} a=2 \\ 4a+b=3 \end{cases}$

$\begin{cases} a=2 \\ b=-5 \end{cases}$ c'est-à-dire : $\boxed{a=2}$ et $\boxed{b=-5}$

Nous avons : $\boxed{U_{n+1}=2+\dfrac{-5}{U_n+4}}$





**b) Démontrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_n\leq 1$.**

▶ *Vérifions que la proposition est vraie au rang 0*

Pour $n=0$, $U_0=0$ donc, nous avons $U_0\leq 1$.

▶ *Admettons que la proposition est vraie au rang n :* $U_n\leq 1$

▶ *Vérifions que la proposition est vraie au rang n+1 partant de l'hypothèse précédente :* $U_{n+1}=2+\dfrac{-5}{U_n+4}$

Soit : $U_n\leq 1 \Rightarrow U_n+4\leq 5 \Rightarrow \dfrac{1}{U_n+4}\geq\dfrac{1}{5}$

$\Rightarrow \dfrac{-5}{U_n+4}\leq -1 \Rightarrow 2+\dfrac{-5}{U_n+4}\leq 1 \Rightarrow U_{n+1}\leq 1$

*Conclusion :* $\forall n\in\mathbb{N}$ ; $U_n\leq 1$

**3° Montrons que la suite $(V_n)$ est une suite géométrique.**

$V_n=\dfrac{U_n-1}{U_n+3} \Rightarrow \dfrac{V_{n+1}}{V_n}=\dfrac{(U_n-1)}{5(U_n+3)}\times\dfrac{U_n+3}{5(U_n-1)}=\dfrac{1}{5}$

D'où : la suite $(V_n)$ est géométrique de raison $q=\dfrac{1}{5}$ et de 1er terme $V_0$ tel que

$V_0=\dfrac{U_0-1}{U_0+3}$ ; alors, on a : $\boxed{V_0=-\dfrac{1}{3}}$.

**4° Exprimons $V_n$ puis $U_n$ en fonction de $n$.**

▶ $V_n=V_0q^n \Rightarrow V_n=-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{5^n} \Rightarrow \boxed{V_n=-\dfrac{1}{3\times(5^n)}}$

▶ $V_n=\dfrac{U_n-1}{U_n+3} \Rightarrow U_n=\dfrac{1+3V_n}{1-V_n} \Rightarrow \boxed{U_n=\dfrac{3(5^n-1)}{3\times5^n+1}}$

5° Calculons $S_n$ en fonction de $n$.

$$S_n = V_0 + V_1 + \ldots + V_n \Rightarrow S_n = V_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = -\frac{1}{3} \times \frac{1-\frac{1}{5^{n+1}}}{1-\frac{1}{5}}$$

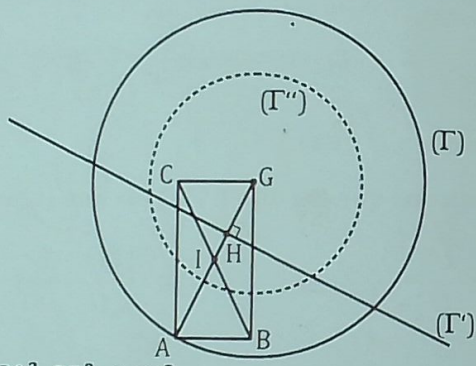
$$S_n = \frac{5}{12} \times \left(\frac{1-5^{n+1}}{5^n}\right) \Rightarrow \boxed{S_n = \frac{1}{12 \times 5^n} - \frac{5}{12}}$$

## Exercice 2 — Corrigé proposé

**Données** : ABC rectangle en A

$AB = a$ ; $AC = a\sqrt{3}$ ;

$BC = 2a$ ; $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$




**1° Construisons du point G**

G = bar{(A ;-1) ;(B ;1) ;(C ;1)}

*équivaut à* :

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ ou $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AI}$

**2.a) Calculons les quantités $GA^2$, $GB^2$ et $GC^2$**

▶ $AG^2 = AB^2 + \overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$. Or le triangle ABC est rectangle en A.

Soit : $2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ D'où : $GA^2 = AB^2 + AC^2 = a^2 + 3a^2 \Rightarrow \boxed{GA^2 = 4a^2}$

▶ $\overrightarrow{BG} = -\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ D'où : $GB^2 = AC^2 \Rightarrow \boxed{GB^2 = 3a^2}$

▶ $\overrightarrow{CG} = -\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$ D'où : $GC^2 = AB^2 \Rightarrow \boxed{GC^2 = a^2}$

**b) Déterminons et construisons (Γ)**

$(\Gamma) = \{M \in P / -MA^2 + MB^2 + MC^2 = 4a^2\}$





$$-MA^2 + MB^2 + MC^2 = -\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right)^2$$

$$= MG^2 - GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG}\cdot\underbrace{\left(-\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC}\right)}_{\vec{0}}$$

$$= MG^2 - GA^2 + GB^2 + GC^2 = MG^2 - 4a^2 + 3a^2 + a^2$$

$-MA^2 + MB^2 + MC^2 = MG^2$

$-MA^2 + MB^2 + MC^2 = 4a^2 \Leftrightarrow MG^2 = 4a^2 \Leftrightarrow MG = 2a = BC$

*Conclusion* : L'ensemble (Γ) est le cercle de centre G et de rayon $2a$.

On peut dire que (Γ) est le cercle de centre G et passant par A.

**3) Déterminons et construisons (Γ')**

Le point I milieu de [BC]. Donc, $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

* $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) - 2\overrightarrow{MI} = 2\overrightarrow{IA}$
* $-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG}$ Car le point G = bar{(A ;-1) ;(B ;1) ;(C ;1)}
* $\left(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right)\cdot\left(-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = -a^2\sqrt{3}$

*équivaut à* $2\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{MG} = -a^2\sqrt{3}$

Soit H le projeté orthogonal de M sur (IA).

On a : $2\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{MG} = -a^2\sqrt{3} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA}\times\overrightarrow{HG} = -a^2\sqrt{3}$

$$\overrightarrow{HG} = \frac{-a^2\sqrt{3}}{2\overrightarrow{IA}} \Leftrightarrow \overrightarrow{GH} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \overrightarrow{GH} = \frac{1}{2}AC$$

*Conclusion* :

(Γ'') est la droite perpendiculaire à (IA) en H telle que $\overrightarrow{GH} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

4° Soit $f$ l'application du plan dans le plan qui à tout point M associe M' tel que : $3\overrightarrow{MM'} = -\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

a) Montrons que $f$ est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

$f(M)=M' \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MM'}=-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{MG}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG}+3\overrightarrow{GM'}=\overrightarrow{MG}$ qui équivaut à : $\overrightarrow{GM'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{GM}$.

*Conclusion* : $f$ est l'homothétie de centre G et de rapport $\frac{2}{3}$.

b) Déterminons et construisons (Γ'') image de (Γ) par $f$.

Comme une homothétie transforme un cercle en un cercle, on conclut que :

▸ G est le centre de l'homothétie donc, $f(G)=G$. Il est le seul point invariant.

▸ (Γ) a pour rayon $r=2a$ donc, (Γ'') a pour rayon $r'=k\times r \Leftrightarrow r'=\frac{4}{3}a$

(Γ'') est le cercle de centre G et le rayon $r'=\frac{4}{3}a$

## Problème — Corrigé proposé

Partie A : Soit $f$ la fonction numérique définie par $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x-2}$.

1° Déterminons $D_f$ et les limites en ses bornes.

▸ *Domaine de définition*

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x-2\neq 0\}$ ; Posons $x-2=0$. On a donc, $x=2$

D'où : $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$ ; $\Rightarrow$ $D_f=]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

▸ *Limites aux bornes du domaine de définition*

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ ;





Il vient : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x)=-\infty$ car $\begin{cases} x^2+2x-3\longmapsto 5 \\ x-2<0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty} x=-\infty$ ;

Il vient : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x)=+\infty$ car $\begin{cases} x^2+2x-3\longmapsto 5 \\ x-2>0 \end{cases}$

2) Etude de la fonction $f$.

▸ *Dérivée de la fonction*

$f$ est dérivable sur $D_f$ comme fonction rationnelle

$f'(x)=\frac{(2x+2)(x-2)-(x^2+2x-3)}{(x-2)^2}$ ; $\forall x\neq 2$, $f'(x)=\frac{x^2-4x-1}{(x-2)^2}$

▸ *Signe de la dérivée $f'(x)$*

$\forall x\in D_f$, $(x-2)^2>0$ donc $f'(x)$ a le signe de $x^2-4x-1$

Posons $x^2-4x-1=0$. On a : $\Delta'=5$ ; $\Rightarrow$ $x_1=2-\sqrt{5}$ et $x_2=2+\sqrt{5}$

| $x$ | $-\infty$ | | $2-\sqrt{5}$ | | $-2$ | | $2+\sqrt{5}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

▸ *Sens de variation*

Pour tout $x\in]-\infty;2-\sqrt{5}[\cup]2+\sqrt{5};+\infty[$, la dérivée $f'(x)>0$.

Donc, $f$ est strictement croissante sur $]-\infty;2-\sqrt{5}[$ et sur $]2+\sqrt{5};+\infty[$

Pour tout $x\in]2-\sqrt{5};2+\sqrt{5}[-\{2\}$, la dérivée $f'(x)<0$

Donc, $f$ est strictement décroissante sur $]2-\sqrt{5};2[$ et sur $]2;2+\sqrt{5}[$.

▸ *Tableau de variation*

| $x$ | $-\infty$ | | $2-\sqrt{5}$ | | $-2$ | | $2+\sqrt{5}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $6-2\sqrt{5}$ | ↘ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↘ | $6+2\sqrt{5}$ | ↗ | $+\infty$ |

Notons que : $f(2-\sqrt{5})=6-2\sqrt{5}$ et $f(2+\sqrt{5})=6+2\sqrt{5}$

**3°a) Déterminons les réels a, b et c tel que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-2}$.**

Pour tout $x\neq 2$ ; et par division euclidienne : $(x^2+2x-3)\div(x-2)$

On a donc, $\forall x\in\mathbb{R}-\{2\}$, $f(x)=x+4+\dfrac{5}{x-2}$

On en déduit que : $a=1$ ; $b=4$ et $c=5$

**b) Déduisons-en que ($\mathscr{C}$) admet une asymptote oblique ($\Delta$)**

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+4)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5}{x-2}=0$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+4)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5}{x-2}=0$

On conclut que le droite ($\Delta$) : $y=x+4$ est asymptote oblique de ($\mathscr{C}$).

Puisque $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ <}} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ >}} f(x)=+\infty$, alors la droite d'équation $x=2$ est l'autre asymptote verticale à la courbe ($\mathscr{C}$).

**c) Démontrons que le point de concours des asymptotes est le centre de symétrie de ($\mathscr{C}$).**

Désignons par K ce point. On a, K (2 ; 6).

Posons $\alpha=2$ et $\beta=6$ On a : $2\alpha-x=4-x$ et $2\beta=12$ ;





$f(4-x)+f(x)=4-x+4+\dfrac{5}{4-x-2}+x+5+\dfrac{5}{x-2}=12-\dfrac{5}{x-2}+\dfrac{5}{x-2}$

$\forall x\neq 2$ ; $4-x\neq 2$ et $f(4-x)+f(x)=12=2\times 6$.

D'où, K( 2 ; 6) est le centre de symétrie de ($\mathscr{C}$)

**4°a) Déterminons les points de ($\mathscr{C}$) où les tangentes sont parallèles à la droite d'équation $y=-4x+2$**

Soit M$(x\,;y)$ un point de ($\mathscr{C}$).

La tangente en M est parallèle à la droite d'équation $y=-4x+2$ si et seulement si $f'(x)=-4$.

$f'(x)=-4 \Rightarrow 5x^2-20x+15=0 \Rightarrow x^2-4x+3=0$

Nous avons deux solutions : $x=1$ ou $x=3$

Pour $x=1$ ; $y=f(1)=0$. Pour $x=3$, $y=f(3)=12$

*Conclusion* : Les points de ($\mathscr{C}$) où les tangentes sont parallèles à la droite d'équation $y=-4x+2$ sont : $M_1(1\,;0)$ et $M_2(3\,;12)$

**b) Equations des tangentes ($T_1$) et ($T_2$) en $x_0=1$ et $x_0=3$**

En $x_0=1$, la tangente ($T_1$) a pour équation: $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ ;

L'équation de la tangente en $x_0=1$ est ($T_1$) : $y=-4x+4$

En $x_0=3$ ; la tangente ($T_3$) a pour équation: $y=f'(3)(x-3)+f(3)$ ;

L'équation de la tangente en $x_0=3$ est ($T_1$) : $y=-4x+24$.

**5) Déterminons les points d'intersection de ($\mathscr{C}$) aux axes du repère.**

* Les points d'intersection de ($\mathscr{C}$) avec l'axe des abscisses:

Posons $f(x)=0$, la résolution de $x^2+2x-3=0$, donne $x=1$ ou $x=-3$

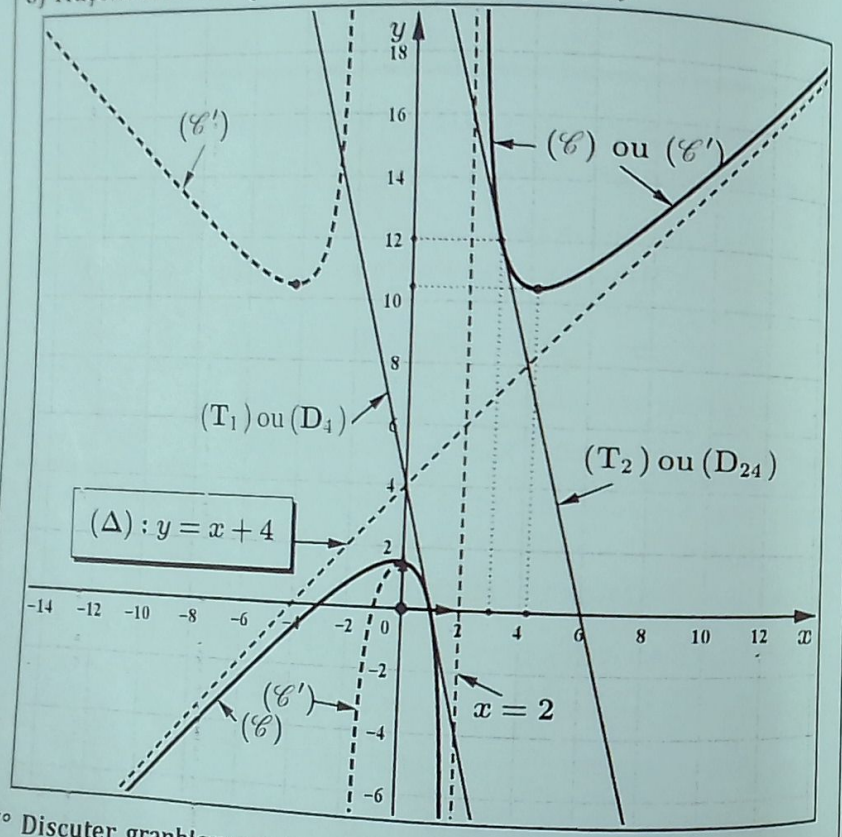
L'ordonnée de ces points est par définition égale à 0.

On a, donc les points $M_3(1\,;0)$ et $M_4(-3\,;0)$.

* Les points d'intersection de ($\mathscr{C}$) avec l'axe des ordonnées :

Calculons $f(0)=\frac{3}{2}$ ; on a le point $M_5\left(0;\frac{3}{2}\right)$

6) Traçons la courbe $(\mathscr{C})$ et les tangentes $(T_1)$ et $(T_2)$.




**7° Discuter graphiquement suivant les valeurs de $m$, le nombre de points d'intersection de $(\mathscr{C})$ et de $(D_m)$.**

On notera que $m$ est l'ordonnée à l'origine $(D_m)$ : $y=-4x+m$, $m\in\mathbb{R}$

* $(D_m)\cap(O\vec{j}) = \{\Omega(0;m)\}$

* $(T_1)=(D_4)$, et $(T_2)=(D_{24})$.





* Pour $m\in]-\infty;4[$, on obtient : 2 points d'intersection

* Pour $m=4$, on a un point d'intersection

* Pour $m\in]4;24[$, on n'a pas de point d'intersection

* Pour m = 24, on a un point d'intersection

* Pour $m\in]24;+\infty[$, on obtient : 2 points d'intersection

B/ Soit $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{-2;2\}$ par $h(x)=\frac{x^2+2|x|-3}{|x|-2}$.

**a) Etudions la parité de la fonction h.**

Pour $x\in\mathbb{R}-\{-2;2\}$, et $-x\in\mathbb{R}-\{-2;2\}$, alors

$$h(-x)=\frac{(-x)^2+2|-x|-3}{|-x|-2}=\frac{x^2+2|x|-3}{|x|-2}=h(x);$$

Puisque $h(-x)=h(x)$ donc, la fonction $h$ est une fonction paire.

**b) Déterminons l'ensemble sur lequel $h$ et $f$ coïncident**

Pour tout $x\in[0;+\infty[-\{2\}$ ; $|x|=x$ et $h(x)=f(x)$

Donc, les fonctions $h$ et $f$ coïncident sur $[0;+\infty[-\{2\}$

**c) Expliquons comment on obtient la courbe $(\mathscr{C}')$ de $(\mathscr{C})$**

$(\mathscr{C}')=(C_1)\cup S_{O\vec{i}}(C_1)$ où $(C_1)$ est la partie de $(\mathscr{C})$ correspondant aux points d'abscisses positives.

**d) Voir la construction de $(\mathscr{C}')$ à la page précédente.**

**Fin du corrigé**

# CORRIGE ♦ BAC 1-D ♦ 2016

## Exercice 1 — Corrigé proposé

**1° Résolvons l'équation :** $t\in\mathbb{R}$, $8t^4-10t^2+3=0$.

Posons $T=t^2$, on a : $8t^4-10t^2+3=0 \Rightarrow 8T^2-10T+3=0$

$\Delta = 100-4\times24 = 100-96$ ; $\Delta=4 \Rightarrow T=\frac{3}{4}$ ou $T=\frac{1}{2}$

♦ $t^2=\frac{3}{4} \Leftrightarrow t=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ ou $t=\frac{\sqrt{3}}{2}$

♦ $t^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow t=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ ou $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$

D'où : $S=\left\{\frac{-\sqrt{3}}{2}\ ;\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

**2° Pour tout nombre réel $x$, montrons que**
$\cos3x = 4\cos^3x-3\cos x$.

On a : $\cos3x=(x+2x)=\cos x\cos2x-\sin x\sin2x$

$\cos3x=\cos x(2\cos^2x-1)-\sin x\sin2x$

$\cos3x=2\cos^3x-\cos x-2\cos x+2\cos^3x$

Il vient : $\cos3x=4\cos^3x-3\cos3x$

**3°a) Montrons que résoudre l'équation (E) revient à résoudre le système :**

On a : (E) : $\cos^2x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1$

$\cos^2x+(2\cos x-1)^2+(4\cos^3x-3\cos x)^2=1$

$16\cos^6x-20\cos^4x+6\cos^2x=0$

Posons $\cos x=u$, on a alors : $16u^6-20u^4+6u^2=0$

Donc, résoudre l'équation (E) revient à résoudre le système :

$$\begin{cases}\cos x=u\\16u^6-20u^4+6u^2=0\end{cases}$$





**3°b) Déduisons les solutions de l'équation (E).**

On a : $\begin{cases}\cos x=u\\16u^6-20u^4+6u^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\cos x=u & ①\\2u^2(8u^4-10u^2+3)=0 & ②\end{cases}$

L'équation ② entraîne :

♦ $2u^2=0 \Leftrightarrow u=0$

♦ $8u^4-10u^2+3=0 \Leftrightarrow u=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ ou $u=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $u=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ ou $u=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Finalement : à partir de ① on peut écrire successivement 5 cas :

♦ $u=0$ alors $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

♦ $u=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ alors $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\\x=\frac{-5\pi}{6}+2k\pi\end{cases}$ (avec $k\in\mathbb{Z}$)

♦ $u=\frac{\sqrt{3}}{2}$ alors $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\\x=\frac{-\pi}{6}+2k\pi\end{cases}$ (avec $k\in\mathbb{Z}$)

♦ $u=\frac{-\sqrt{2}}{2}$ alors $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi\\x=\frac{-3\pi}{4}+2k\pi\end{cases}$ (avec $k\in\mathbb{Z}$)

♦ $u=\frac{\sqrt{2}}{2}$ alors $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{\pi}{4}+2k\pi\\x=\frac{-\pi}{4}+2k\pi\end{cases}$ (avec $k\in\mathbb{Z}$)

Ainsi les solutions de (E) sont :

$$S=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\ ;\ \frac{5\pi}{6}+2k\pi\ ;\ \frac{-5\pi}{6}+2k\pi\ ;\ \frac{3\pi}{4}+2k\pi\ ;\ \frac{-3\pi}{4}+2k\pi\ ;\ \frac{\pi}{4}+2k\pi\ ;\ \frac{-\pi}{4}+2k\pi\ ;\ \frac{\pi}{6}+2k\pi\ ;\ \frac{-\pi}{6}+2k\pi\ /\ (k\in\mathbb{Z})\right\}$$

# 9 Epreuve de Maths ♦ Bac 1 Série : D ♦ 2016

## EXERCICE 1

1° Résoudre l'équation : $t \in \mathbb{R}$, $8t^4 - 10t^2 + 3 = 0$.

2° Pour tout nombre réel x, montrer que $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

3° Soit l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$.

a) Montrer que résoudre cette équation revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} \cos x = u \\ 16u^6 - 20u^4 + 6u^2 = 0 \end{cases}$$

b) En déduire les solutions de l'équation (E).

## EXERCICE 2

Afi a vendu un appareil électroménager pour 400 000F. Elle place son argent à un taux de 5% avec intérêts composés (c'est-à-dire l'intérêt produit au cours d'une année s'ajoute au capital de l'année pour devenir le capital de l'année suivante) et ne retirer chaque année que 40 000 F pour subvenir à ses petits besoins.

Les retraits et les calculs d'intérêts sont effectués chaque 1er janvier.

On appelle $P_n$ le montant du placement d'Afi chaque 1er Janvier en prenant pour $n$ le nombre d'années écoulées. On a : $P_0 = 360000$ F.

1° Calculer $P_1$, $P_2$, $P_3$.

2° Démontrer que $P_{n+1} = 1{,}05P_n - 40000$

3° On pose $U_n = P_n - 800000$. Démontrer que $(u_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le première terme.

4° En déduire une expression de $u_n$ en fonction $d_n$, puis en fonction de $n$

5° Que conseiller à Afi ?





## Problème

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x^3+3x^2+5x+5}{(x+1)^2}$.

1° Déterminer les réels $a$, $b$, $c$ et $d$ tels que :

pour tout $x$ de $\mathbb{R}-\{-1\}$, $f(x) = ax+b+\dfrac{cx+d}{(x+1)^2}$

2° Déterminer les limites de $f$ aux bornes de l'ensemble de définition de $f$.

3° On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $f$ dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit (D) la droite d'équation $y = x+1$

a) Démontrer que la droite (D) est une asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.

b) Etudier la position de $(\mathscr{C})$ et de (D).

4° Calculer la dérivée $f'$ de $f$ et démontrer que

$$f'(x) = \frac{(x-1)(x^2+4x+5)}{(x+1)^3}$$

5° Etudier le sens de variation de $f$, puis dresser le tableau de variation de $f$.

6° Déterminer les coordonnées du point A en lequel la tangente T à la parallèle à la droite d'équation $y - x - 1 = 0$.

Déterminer une équation de cette tangente.

7°a) Construire $(\mathscr{C})$, ses asymptotes ainsi que la tangente (T).

b) Déterminer graphiquement, suivant les valeurs du nombre réel $k$, le nombre du point d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ et de la droite $(D_k)$ d'équation $y = x+k$. Retrouver ces résultats par calcul.

8°a) Démontrer que : pour tout réel $x > 0$ ; $0 < f(x) - (x+1) < \dfrac{2}{x}$.

b) Sans utiliser une calculatrice, donner une valeur approchée de $f(10^6)$. en précisant s'il s'agit d'une valeur approchée par excès ou par défaut et en donnant un majorant de l'erreur commise.

## Exercice 2 — Corrigé proposé

$P_0 = 360\,000$ F

**1° Calculons $P_1$, $P_2$, $P_3$.**

$P_1 = P_0 + \frac{5}{100}P_0 - 40\,000$

$P_1 = 1{,}05P_0 - 40\,000$

$P_1 = 1{,}05\times 360\,000 - 40\,000$

Il vient : $\boxed{P_1 = 338\,000\text{ F}}$

$P_2 = P_1 + \frac{5}{100}P_1 - 40\,000$

$P_2 = 1{,}05P_1 - 40\,000$

$P_2 = 1{,}05\times 338\,000 - 40\,000$

Il vient : $\boxed{P_2 = 314\,900\text{ F}}$

$P_3 = P_2 + \frac{5}{100}P_2 - 40\,000 \Leftrightarrow P_3 = 1{,}05P_2 - 40\,000$

$P_3 = 1{,}05\times 314\,900 - 40\,000$. Il vient : $\boxed{P_3 = 290\,645\text{F}}$

**2) Démontrons que : $P_{n+1} = 1{,}05P_n - 40\,000$**

Nous avons : $P_{n+1} = P_n + \frac{5}{100}P_n - 40\,000 = \left(1+\frac{5}{100}\right)P_n - 40\,000$

D'où le résultat, $\boxed{P_{n+1} = 1{,}05P_n - 40\,000}$

**3) Démontrons que $(u_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le première terme.**

$U_n = P_n - 800\,000 \Leftrightarrow U_{n+1} = P_{n+1} - 800\,000 = 1{,}05P_n - 40000 - 80000$

$U_{n+1} = 1{,}05P_n - 840\,000 = 1{,}05(P_n - 800\,000)$

Il vient alors : $\boxed{U_{n+1} = 1{,}05U_n}$

Puisque $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_{n+1} = 1{,}05U_n$, on conclut que $(U_n)$ est une suite géométrique de raison $q = 1{,}05$ et de 1er terme $U_0 = -440\,000$ F.





**4° Exprimons $U_n$ puis $P_n$ en fonction de $n$.**

$(U_n)$ étant une suite géométrique, on a : $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_n = U_0 q^n$

Soit $U_n = -440\,000\times 1{,}05^n$ et puisque $U_n = P_n - 800\,000$

On a : $U_n = P_n + 800\,000$ donc $\boxed{P_n = 800\,000 - 440\,000\times 1{,}05^n}$

**5) Conseil à Afi**

« Attention Afi à ton placement ; donc il faut réduire tes dépenses »

## Problème — Corrigé proposé

$f$ est définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par : $f(x) = \frac{x^3+3x^2+5x+5}{(x+1)^2}$

**1° Déterminons les réels $a$, $b$, $c$ et $d$.**

$\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}$, pour écrire $f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{(x+1)^2}$,

Division euclidienne de $(x^3+3x^2+5x+5)$ par $(x^2+2x+1)$

Donc $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ alors $f(x) = x+1+\frac{2x+4}{(x+1)^2}$

Par identification, on a : $a=1$ ; $b=1$ ; $c=2$ et $d=4$

**2° Limites aux bornes de $D_f$**

$D_f = \mathbb{R}-\{-1\} = ]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ car $(x+1)^2=0 \Rightarrow x=-1$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ D'où : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ D'où : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | |
| $(x+1)^3$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | |
| $f'(x)$ | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | | |

♦ $\forall x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, $f'(x)>0$

On dit que $f$ est strictement croissante sur $]-\infty;-1[$ et sur $]1;+\infty[$

♦ $\forall x\in]-1;1[$, $f'(x)<0$ ;

On dit que $f$ est strictement décroissante sur $]-1;1[$

♦ $f'(1)=0$ ; et $f(1)=\dfrac{7}{2}$

**Tableau de variation**

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | | $+\infty$ \| $+\infty$ | ↘ | $3,5$ | ↗ | $+\infty$ |

**6) Déterminons les coordonnées de A.**

$y-x-1=0 ; \Rightarrow y=x+1$

D'où : $f'(x)=1-\dfrac{2x+6}{(x+1)^2}$

$f'(x)=1 \Rightarrow 1-\dfrac{2x+6}{(x+1)^2}=1$





$f'(x)=1 \Rightarrow -\dfrac{2x+6}{(x+1)^2}=0 \Rightarrow 2x+6=0 \Rightarrow x=-3$

Pour $x_A=-3$ alors $y_A=f(-3)=-\dfrac{5}{2}$ D'où : $\boxed{A\left(-3;-\dfrac{5}{2}\right)}$

*** Déterminons alors l'équation de cette tangente.**

(T): $y=f'(x_A)(x-x_A)+f(x_A)$ ; $\Rightarrow$ (T): $y=x+3-\dfrac{5}{2}$

Cette tangente a pour équation : $\boxed{(T):\ y=x+\dfrac{1}{2}}$

**7.a) Construction de la courbe ($\mathscr{C}$), asymptote et la tangente (T).**

On a: $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=+\infty$ donc la droite d'équation $x=-1$ est asymptote à la courbe ($\mathscr{C}$).

**b) Nombre de points d'intersection de la courbe ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{D}_k$) : $y=x+k$**

Graphiquement, on a :

♣ $\forall k\in\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right[$, il n'y a pas de point d'intersection.

♣ $\forall k\in\left\{\dfrac{1}{2};1\right\}$, il y a un seul point d'intersection.

♣ $\forall k\in\left]\dfrac{1}{2};1\right[\cup]1;+\infty[$, il y a deux points d'intersection.

Par calcul, l'équation s'écrit comme suit : $f(x)=x+k$ avec $k\in\mathbb{R}$.

$f(x)=x+k \Rightarrow x+1+\dfrac{2x+4}{(x+1)^2}=x+k \Rightarrow 2x+4=(k-1)(x+1)^2$

$\Rightarrow 2x+4=(k-1)(x^2+2x+1) \Rightarrow (k-1)x^2+2(k-2)x+k-5=0$

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $(x+1)^2$ | $+$ | $0$ | $+$ |

$\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ <}} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)=+\infty$ car $\begin{cases} x^3+3x^2+5x+5 \longmapsto 2 \\ (x+1)^2 \longmapsto 0 \\ (x+1)^2 > 0 \end{cases}$

**3°a) Montrons que (D) : $y=x+1$ est asymptote à $(\mathscr{C})$.**

$f(x) = x+1+\dfrac{2x+4}{(x+1)^2}$ donc, $f(x)-(x+1) = \dfrac{2x+4}{(x+1)^2}$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+4}{(x+1)^2} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x}$

On obtient : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right] = 0$

De même : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+1)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x} = 0$

Donc, on en déduit des calculs, la droite $(\mathscr{D})$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.

**b) Position relative de la courbe $(\mathscr{C})$ et de la droite $(\mathscr{D})$.**

Etudions, pour cela, le signe de $f(x)-(x+1) = \dfrac{2x+4}{(x+1)^2}$.

$\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}$, $(x+1)^2>0$ donc $f(x)-(x+1)$ à le même signe que $2x+4$.

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $2x+4$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ |

Discussion :

* $\forall x\in]-\infty;-2[$, $f(x)-(x+1)<0$ donc la courbe $(\mathscr{C})$ est en-dessous de la





droite $(\mathscr{D})$ sur l'intervalle $]-\infty;-2[$.

* $\forall x\in]-2;-1[\cup]-1;+\infty[$, $f(x)-(x+1)>0$ donc la courbe $(\mathscr{C})$ est au-dessous de la droite $(\mathscr{D})$ sur l'intervalle $]-2;-1[$ et sur $]-1;+\infty[$.

* $f(-2)-(-2+1)=0$ donc, $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D})$ sont sécantes en $x=2$.

**4° Calculons la dérivée $f'$ de $f$.**

$\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}$, $f'(x)=\dfrac{(3x^2+6x+5)(x+1)^2-2(x+1)(x^3+3x^2+5x+5)}{\left[(x+1)^2\right]^2}$

$f'(x) = \dfrac{(x+1)\left[(3x^2+6x+5)(x+1)-2(x^3+3x^2+5x+5)\right]}{(x+1)^4}$

$f'(x) = \dfrac{3x^3+3x^2+6x^2+6x+5x+5-2x^3-6x^2-10x-10}{(x+1)^3}$

c'est-à-dire : $f'(x) = \dfrac{x^3+3x^2+x-5}{(x+1)^2}$

Or $(x-1)(x^2+4x+5) = x^3+4x^2+5x-x^2-4x-5 = x^3+3x^2+x-5$

Donc, $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}$, $f'(x) = \dfrac{(x-1)(x^2+4x+5)}{(x+1)^3}$

**5° Sens de variation de $f$.**

$x^2+4x+5 = (x+2)^2+1$, donc $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}$ ; $x^2+4x+5>0$ ;

De ce qui précède, la dérivée $f'(x)$ a le signe de $\dfrac{x-1}{(x+1)^3}$.

On se refère au tableau de signe suivant :

♦ Si $k=1$, alors l'équation devient $-2x-4=0$ soit $x=-2$.

Il y a donc une solution.

♦ Si $k\neq 1$, alors $\Delta' = (k-2)^2-(k-1)(k-5)$

$$\Delta' = k^2-4k+4-k^2+6k-5 = 2k-1$$

*Pour $k\in\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$, $\Delta'<0$, il n'y a pas de solution.

*Pour $k=\frac{1}{2}$, $\Delta'=0$, il y a une solution.

*Pour $k\in\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$, $\Delta'>0$, il y a deux solutions.

**8°a) Démontrons que : pour tout réel $x>0$ ; $0<f(x)-(x+1)<\frac{2}{x}$.**

D'après 3.b) on a : $\forall x\in]0;+\infty[$, $f(x)-(x+1)>0$

On a : $f(x)-(x+1)=\frac{2x+4}{(x+1)^2}$ et $\frac{2x+4}{(x+1)^2}-\frac{2}{x} = \frac{2x^2+4x-2x^3-4x-2}{x(x+1)^2}$

$$\frac{2x+4}{(x+1)^2}-\frac{2}{x} = -\frac{2}{x(x+1)^2} \text{ or } x>0 \text{ donc } x(x+1)^2>0$$

Par suite $\frac{2x+4}{(x+1)^2}-\frac{2}{x}<0$ D'où : $\forall x>0$, $f(x)-(x+1)<\frac{2}{x}$

On conclut que $\forall x>0$, $0<f(x)-(x+1)<\frac{2}{x}$

**b) Valeur approchée de $f(10^6)$**

$10^6>0$ donc $0<f(10^6)-(10^6+1)<\frac{2}{10^6}$

$$10^6+1<f(10^6)<10^6+1+2\times10^{-6}$$

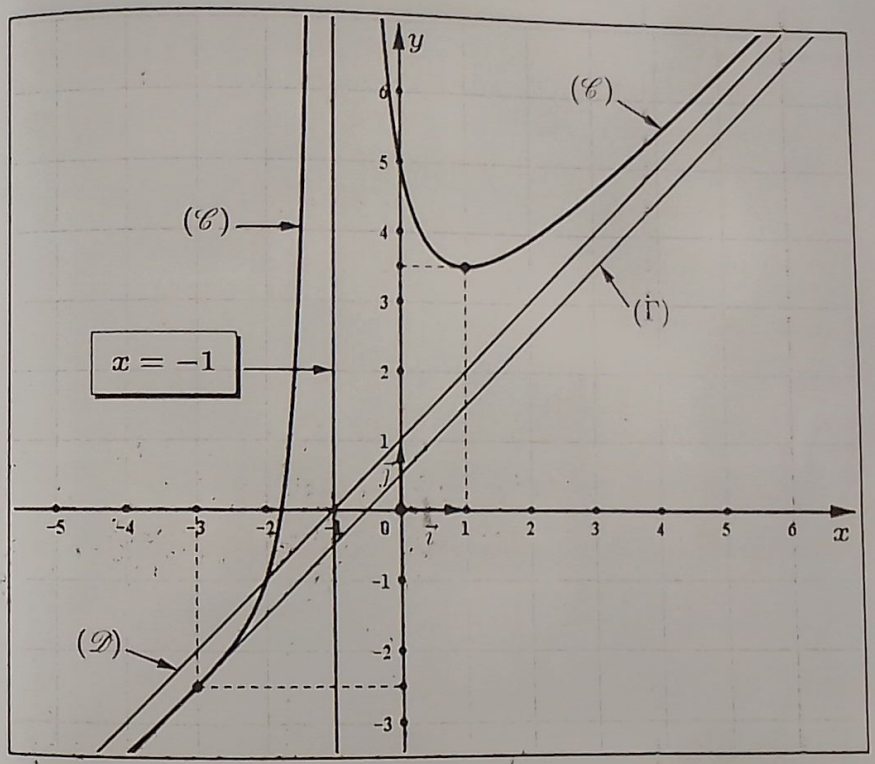




Valeur approchée par défaut = $10^6+1$

Valeur approchée par excès = $10^6+1+2\times10^{-6}$

Erreur commise = $10^{-6}$




« Quand on voyage vers un objectif,
Il est important de prêter attention au chemin.
C'est toujours le chemin qui nous enseigne
la meilleur façon d'y parvenir, et il nous enrichit
à mesure que nous le parcourons. »
Paulo Coelho, L'alchimiste

# CORRIGE ♦ BAC 1-D ♦ 2017

## Exercice 1 — Corrigé proposé

1°a) Montrons que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$

G est l'isobarycentre du triangle ABC signifie que G= bar{(A ;1) ;(B ;1) ;(C ;1)} et I milieu du segment [BC] alors I = bar {(B ; 1) ; (C ; 1)}

Donc, G = bar {(A ; 1) ; (I ; 2)} D'où : $\boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}}$

b) Calculons $AB^2 + AC^2$ en fonction de $AI^2$ et de $BC^2$

D'après le théorème de la médiane dans le triangle ABC.

On a : $\boxed{AB^2+AC^2 = 2AI^2+\frac{BC^2}{2}}$

c) Déduisons en $AG^2 = \frac{1}{9}(2b^2+2c^2-a^2)$

A partir de l'égalité $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ ; on a : $AG^2 = \frac{4}{9}AI^2 = \frac{2}{9}\times 2AI^2$

$$AG^2 = \frac{2}{9}\left(AB^2+AC^2-\frac{BC^2}{2}\right) = \frac{1}{9}(2AB^2+2AC^2-BC^2)$$

Car $2AI^2 = AB^2+AC^2-\frac{BC^2}{2}$ donc $\boxed{AG^2 = \frac{1}{9}(2b^2+2c^2-a^2)}$

d) Ecrivons de même les expressions de $BG^2$ et $CG^2$

Le barycentre G = bar {(A ;1) ; (B ;1) ; (C ;1)}





■ $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ ; entraîne $BG^2 = \frac{1}{9}BA^2 + \frac{1}{9}BC^2 + \frac{2}{9}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$

$$BG^2 = \frac{1}{9}BA^2 + \frac{1}{9}BC^2 + \frac{2}{9}\left(\frac{BA^2+BC^2-AC^2}{2}\right) = \frac{2}{9}BA^2 + \frac{2}{9}BC^2 - \frac{1}{9}AC^2$$

$$BG^2 = \frac{1}{9}(2BA^2 + 2BC^2 - AC^2) \Rightarrow \boxed{BG^2 = \frac{1}{9}(2a^2 + 2c^2 - b^2)}$$

■ $\overrightarrow{CG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ ; entraîne $CG^2 = \frac{1}{9}CA^2 + \frac{1}{9}CB^2 + \frac{2}{9}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$

$$CG^2 = \frac{1}{9}CA^2 + \frac{1}{9}CB^2 + \frac{2}{9}\left(\frac{CA^2+CB^2-AB^2}{2}\right)$$

$$CG^2 = \frac{2}{9}CA^2 + \frac{2}{9}CB^2 - \frac{1}{9}AB^2 = \frac{1}{9}(2CA^2 + 2CB^2 - AB^2)$$

On en déduit : $\boxed{CG^2 = \frac{1}{9}(2a^2 + 2b^2 - c^2)}$

2°a) Montrons que $AG^2+BG^2+CG^2 = a^2+b^2+c^2$

Nous avions : $AG^2 = \frac{1}{9}(2b^2+2c^2-a^2)$ ; $BG^2 = \frac{1}{9}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$

$$CG^2 = \frac{1}{9}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$$

$$AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{9}(2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2)$$

$$AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$$

On en déduit : $\boxed{AG^2 + BG^2 + CG^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)}$

# 10 Epreuve de Maths ♦ Bac 1 Série : D ♦ 2017

## EXERCICE 1

On donne trois points A, B et C distincts non alignés du plan et on note $a$, $b$, $c$ les longueurs des côtés du triangle ABC tels que $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Soit G l'isobarycentre du triangle ABC.

1° On I le milieu du segment [BC].

a) Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.

b) Calculer $AB^2 + AC^2$ en fonction de $AI^2$ et de $BC^2$.

c) En déduire : $AG^2 = \frac{1}{9}(2b^2+2c^2-a^2)$

d) Ecrire de même les expressions de $BG^2$ et $CG^2$.

2°a) Montrer que $AG^2+BG^2+CG^2 = \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$.

b) Déterminer l'ensemble E des points M du plan tels que :
$MA^2+MB^2+MC^2 = a^2+b^2+c^2$.

3° On choisit $a=5$ ; $b=4$ ; $c=3$.

Placer les trois points A, B, C et dessiner E dans ce cas particulier.

## EXERCICE 2

On considère la suite numérique $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par :
$u_0=3$ ; $u_{n+1}=2u_n-1$.

1°Déterminer le réel $a$ pour que la suite $(v_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=u_n+a$ soit une suite géométrique.

2° On donne à $a$ la valeur trouvée.

a) Calculer $v_0$ puis calculer $v_n$ en fonction de $n$.





b) En déduire que, pour tout entier naturel $n$ par : $u_n=2^{n+1}+1$.

3° Soit $(W_n)$ la suite définie pour tout entier naturel $n$ par :
$w_0=1$ ; $w_{n+1}=2w_n+3$.

a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $2u_n-w_n=5$

b) En déduire l'expression de $w_n$ en fonction de $n$.

## PROBLEME

Soit la fonction numérique $f$, de la variable $x$, définie par : $f(x)=|x|-\frac{8}{|x|+2}$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $f$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°a) Déterminer l'ensemble de définition de $f$ ainsi que les limites aux bornes de cet ensemble.

b) Etudier la dérivabilité de $f$ en 0 ; qu'en déduire pour la courbe $(\mathscr{C})$ ?

c) Démontrer que la droite d'équation $x=0$ est axe de symétrie pour la courbe $(\mathscr{C})$.

2°a) Calculer $f'(x)$ pour $x>0$.

b) En déduire les sens de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variation de $f$

3°a) Démontrer que les droites : $(D_1)$, d'équation $y=-x$, et $(D_2)$, d'équation $y=x$, sont asymptotes à la courbe $(\mathscr{C})$.

b) Préciser la position relative de $(\mathscr{C})$ et de $(D_2)$ quand $x$ est positif.

4° Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscises, et donner des équations des tangentes à $(\mathscr{C})$ en ces points.

5° Construire, dans le même repère, la courbe $(\mathscr{C})$, les droites $(D_1)$ et $(D_2)$, ainsi que les tangentes trouvées.

b) Déterminons l'ensemble E

E des points M du plan tels que : $MA^2+MB^2+MC^2 = a^2+b^2+c^2$

$MA^2+MB^2+MC^2 = (\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})^2+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})^2$

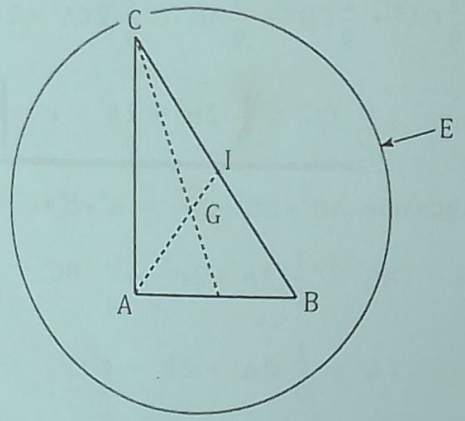
$MA^2+MB^2+MC^2 = 3MG^2+\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$

$M\in E \Leftrightarrow 3MG^2+\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2) = a^2+b^2+c^2$

$MG^2 = \frac{2}{9}(a^2+b^2+c^2) \Leftrightarrow MG = \sqrt{\frac{2}{9}(a^2+b^2+c^2)} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}$

Donc, l'ensemble E est le cercle de centre G et de rayon $\frac{1}{3}\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}$.

3° $a=5$ ; $b=4$ ; $c=3$




## Exercice 2

Corrigé proposé

1° Déterminons a pour que la suite $(v_n)$ soit une suite géométrique

$(v_n)$ est définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=u_n+a$

$v_{n+1} = u_{n+1}+a = 2u_n-1+a \Leftrightarrow v_{n+1} = 2v_n-1-a$

$(v_n)$ est géométrique si et seulement si $-1-a = 0 \Leftrightarrow a = -1$





Pour $a=-1$, alors $(v_n)$ est géométrique de raison $q=2$

2°a) Calculons $v_0$ puis calculons $v_n$ en fonction de $n$.

Calculons $v_0$ en fonction de $n$ alors on a : $a=-1$

$v_n=u_n-1$ donc $v_0 = u_0-1 = 3-1 \Leftrightarrow$ $v_0 = 2$

Calculons $v_n$ en fonction de $n$ on a : $v_n = q^n v_0 = 2^n\times 2 = 2^{n+1}$

D'où : $v_n = 2^{n+1}$

b) Déduisons en que pour tout entier naturel $n$, $u_n=2^{n+1}+1$

On a : $v_n = u_n-1 \Leftrightarrow u_n = v_n+1$ D'où : $u_n = 2^{n+1}+1$

3°a) Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$, $2u_n-w_n = 5$

Soit $(w_n)$ la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$, par $w_0 = 1$, $w_{n+1} = 2w_n+3$

**Etape d'initialisation** : Pour $n=0$, $2u_0-w_0 = 5$.

**Etape de transmission:** Pour $n>0$

Supposons que $2u_0-w_0 = 5$ et démontrons que $2u_{n+1}-w_{n+1} = 5$

$2u_{n+1}-w_{n+1} = 4u_n-2-w_n-3 = 2(2u_n-w_n)-5 = 10-5$ ;

Nous avions : $2u_{n+1}-w_{n+1} = 5$

**Conclusion :** $\forall n\in\mathbb{N}$, $2u_n-w_n = 5$

b) Déduisons-en l'expression de $w_n$ en fonction de $n$.

$2u_n-w_n = 5 \Leftrightarrow w_n = 2u_n-5 = 2(2^{n+1}+1)-5 = 2\times 2^{n+1}+2-5$ ;

Il vient : $w_n = 2^{n+2}-3$

2°a) Calculons la dérivée $f'(x)$ pour $x>0$.

Pour $x>0$, $f(x)=x-\dfrac{8}{x-2}$ donc $\forall x\in]0;+\infty[$ ; $f'(x)=1+\dfrac{8}{(x+2)^2}$

Il vient : $\boxed{f'(x)=\dfrac{x^2+4x+12}{(x+2)^2}}$

**b) Déduisons-en le sens de variation de $f$ sur $\mathbb{R}$.**

$\forall x\in]0;+\infty[$ ; on sait que $(x+2)^2>0$ ;

Donc, le signe de la dérivée $f'(x)$ dépend du signe de $x^2+4x+12$.

Or pour tout réel $x$, le polynôme $x^2+4x+12$ est strictement positif.

$\forall x\in]0;+\infty[$, $f'(x)>0$ donc $f$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

De plus $f$ étant paire donc $f$ est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$.

▶Tableau de variation

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | ‖ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $-4$ | ↗ | $+\infty$ |

**3°a)Démontrons que les droites $(D_1)$ et $(D_2)$ sont asymptotes à la courbe$(\mathscr{C})$**

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8}{x-2}=0$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-8}{x+2}=0$

On conclut que, les droites $(D_1)$ : $y=-x$ et $(D_2)$ : $y=x$ sont asymptotes à $(\mathscr{C})$ respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.





**b) Position relative sur de la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite $(D_2)$ sur $[0;+\infty[$**

Pour cela, étudions le signe de $f(x)-x=-\dfrac{8}{x+2}$ sur $[0;+\infty[$.

| $x$ | $0$ | $-\infty$ |
|---|---|---|
| $f(x)-x$ | — | |

$\forall x\in[0;+\infty[$, $f(x)-x<0$ donc $(\mathscr{C})$ est en-dessous de $(D_2)$ sur $[0;+\infty[$.

**4) Coordonnées des points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.**

Résolvons l'équation $f(x)=0$.

▶Pour $x>0$, $x-\dfrac{8}{x+2}=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+2x-8}{x+2}=0$ équivaut à

$x^2+2x-8=0 \Leftrightarrow (x+4)(x-2)=0$ soit $x=-4$ ou $x=2$ ;

Puisque $x=-4\notin]0;+\infty[$ donc $x=2$ est la solution.

▶Pour $x<0$ ; $-x+\dfrac{8}{x-2}=0 \Leftrightarrow \dfrac{-x^2+2x+8}{x-2}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-(x^2-2x-8)}{x-2}=0 \Leftrightarrow x^2-2x-8=0$

$(x+2)(x-4)=0 \Leftrightarrow x+2=0$ ou $x-4=0$ soit : $x=2$ ou $x=4$

On remarque que $x=4\notin]-\infty;0[$ donc $x=-2$ est la solution.

D'où : La courbe $(\mathscr{C})$ coupe (OI) en deux points A(2;0) et B(-2;0)

■ **L'équation de la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point A.**

$(T_A): y=f'(-2)(x+2)+f(-2)$. Or $f'(2)=-\dfrac{3}{2}$ et $f(-2)=0$

Donc, la tangente de $(\mathscr{C})$ au point A a pour équation $(T_A): y=-\dfrac{3}{2}x-3$.

**Problème** — **Corrigé proposé**

1°a) Déterminons l'ensemble de définition de $f$.

$f(x) = |x| - \dfrac{8}{|x|+2}$ donc, $D_f = \{x \in \mathbb{R} / \ |x|+2 \neq 0\}$ ;

Posons l'équation $|x|+2 = 0 \Leftrightarrow |x| = -2$ impossible

car la valeur absolue d'un nombre est toujours positive.

Il vient : $\boxed{D_f = ]-\infty ; +\infty[}$

■ Calculons les limites

$|x| = x$ si $x \mapsto +\infty$ ; $|x| = -x$ si $x \mapsto -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(|x| - \frac{8}{|x|+2}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(-x - \frac{8}{-x+2}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(|x| - \frac{8}{|x|+2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x - \frac{8}{x+2}\right) = +\infty$$

$\dfrac{x^2+2x-8}{x+2}$

Il vient : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

**b) Etudions la dérivabilité de $f$ en 0.**

▶ Puisque $f(0) = -4$ écrivons $f(x)$ sans la barre de valeur absolue.

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert x\rvert$ | $-x$ | | | $x$ | |
| $f(x)$ | $-x+\dfrac{8}{x-2}$ | | -4 | $x-\dfrac{8}{x+2}$ | |

$\forall x \in ]-\infty ; 0[$ ; $f(x) = -x + \dfrac{8}{x-2}$ ; $\forall x \in ]0 ; +\infty[$ ; $f(x) = x - \dfrac{8}{x-2}$





▶ **Dérivabilité de $f$ à gauche de 0.**

$$\lim_{\substack{x\to0\\<}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to0\\<}} \left(\frac{-x+\dfrac{8}{x-2}+4}{x}\right) = \lim_{\substack{x\to0\\<}} \left(\frac{-x+6}{x-2}\right) = -3$$

Cette limite est finie, donc la fonction est dérivable à gauche de 0.

▶ **Dérivabilité de $f$ à droite de 0.**

$$\lim_{\substack{x\to0\\>}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to0\\>}} \left(\frac{x-\dfrac{8}{x+2}+4}{x}\right) = \lim_{\substack{x\to0\\>}} \left(\frac{x+6}{x+2}\right) = 3$$

Cette limite est finie, donc la fonction est dérivable à droite de 0.

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \neq \lim\limits_{\substack{x\to0\\>}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ donc $f$ n'est pas dérivable en 0.

**Déduction graphiquement**

$(\mathscr{C}_f)$ admet au point 0 deux demi-tangentes de coefficients +3 et -3.

▶ La demi-tangente à gauche de 0 a pour équation $y = -3(x-0)+f(0)$

$y = -3x-4$ car $f(0) = -4$

▶ La demi-tangente à droite de 0 a pour équation $y = 3(x-0)+f(0)$

$y = 3x-4$ car $f(0) = -4$

**c) Démontrons que la droite d'équation $x = 0$ est axe de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.**

$D_f = ]-\infty ; +\infty[$ , $x \in \mathbb{R}$ , $(-x) \in \mathbb{R}$ , $f(-x) = |-x| - \dfrac{8}{|-x|+2} = |x| - \dfrac{8}{|x|+2}$

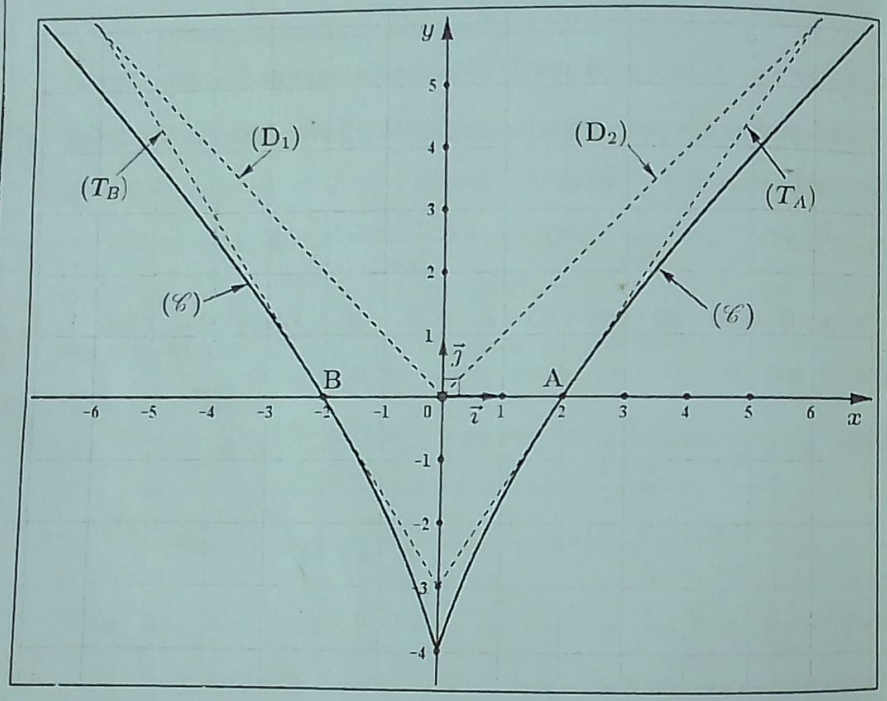
$f(-x) = f(x)$. La fonction $f$ est donc paire et $D_f$ est centré sur 0.

D'où, la droite d'équation $x = 0$ est axe de symétrie de $(\mathscr{C}_f)$.

■ L'équation de la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point B.

$(T_B): y = f'(2)(x-2)+f(2)$. Or $f'(2) = \frac{3}{2}$ et $f(2) = 0$

Donc, la tangente de $(\mathscr{C})$ au point B a pour équation $(T_B): y = \frac{3}{2}x - 3$.




*«L'Enémie n'est pas celui qui te fait face, l'épée à la main. C'est celui qui est à côté de toi, le poignard dans le dos. »*
*Paulo Coelho, Le manuscrit retrouvé*





# 11 Epreuve de Maths ♦ Bac 1 Série : D ♦ 2018

## EXERCICE 1

Soit $a$ un paramètre réel différent de $\frac{1}{3}$ et (U) la suite numérique définie par : $U_0 = a$ et $U_{n+1} = \frac{3U_n+7}{3U_n-1}$.

1° Déterminer les nombres réel $b$ et $c$ tels que :

Pour tout entier naturel $n$, $U_{n+1} = b + \frac{c}{3U_n-1}$

2° Déterminer les valeurs de $a$ pour lesquelles (U) lest une suite constante.

Dans la suite de l'exercice, on prend $U_0 = 3$ et on considère la suite (V) définie par : $V_n = \frac{3U_n-7}{3(U_n+1)}$.

3° Calculer $V_0$, $V_1$ et $V_2$.

4°a) Montrer (V) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b) Calculer $V_n$ en fonction de n puis en déduire $U_n$ en fonction de $n$.

5°a) Montrer que (V) est une suite convergente et calculer sa limite.

b) La suite (U) est-elle convergente ? Si oui, préciser sa limite.

## EXERCICE 2

ABC est un triangle rectangle tel que : $Mes(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = -\frac{\pi}{2}$,

$AB = a\sqrt{3}$ et $BC = a$ ; où $a$ est un réel strictement positif.

1° Déterminer et construire le barycentre G des points (A,-1) ; (B,1) ; (C,-1).

2°a) Calculer $GA^2$, $GB^2$ et $GC^2$.

b) Déterminer et construire l'ensemble ($\gamma$) des points M du plan tels que

$MA^2-MB^2+MC^2 = 4a^2$.

3. On note J, le milieu de $[AC]$. Déterminer et construire l'ensemble $(\gamma')$ des points M du plan tels que : $(-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}) = -a^2$

4. Soit $g_m$ l'application du plan dans le plan qui à tout point M associe le poit M' tel que $m\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ où $m\in\mathbb{R}^*$.

a) Quelle est la nature de $g_m$ pour $m = 1$.

b) $m\in\mathbb{R}^*\setminus\{1\}$, montrer que $g_m$ est une homothétie dont on précisera les éléments caractéristiques.

c) Pour $m=\frac{2}{3}$, déterminer et construire l'ensemble $(\gamma'')$ image de $(\gamma)$ par $g_{\frac{2}{3}}$.

## PROBLEME

On considère la fonction numérique $f$, de la variable réel $x$, définie par :

$$f(x) = \frac{-x^2+2x+3}{x+2}.$$

On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1°a) Déterminer l'ensemble de définition D de $f$.

b) Calculer les limites de $f$ aux bornes de D.

2°a) Déterminer les nombres réels $a$, $b$ et $c$ tels que :

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2},\ \forall x\in D.$$

b) Déduire que $(\mathcal{C})$ admet une asymptote oblique $(\Delta)$ puis préciser l'autre asymptote.

c) Déterminer les coordonnées du point J, intersection des asymptotes.

d) Montrer que le point $\Omega(-2;6)$ est le centre de sysmétrie de $(\mathcal{C})$.

3° Etudier le sens de variation de $f$ puis dresser son tableau de variation.

4°a) Déterminer les points de $(\mathcal{C})$ en lesquels les tangentes sont parallèles à la droite d'équation $y-4x+3=0$.





b) Donner l'équation des tangentes $(T_1)$ et $(T_2)$ à la courbe $(\mathcal{C})$ aux points d'abscisses respectives $x=-1$ et $x=-3$.

5.a) Déterminer les points d'intersections de $(\mathcal{C})$ avec les axes du repère.

b) Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ et les tangentes $(T_1)$ et $(T_2)$.

6. Discuter graphiquement suivant les valeurs du nombre réel m le nombre de points d'intersection de $(\mathcal{C})$ et de la droite $(D_m)$ d'équation $y=4x+m$.

7. Soit $h$ la fonction définie par $h(x)=\frac{x^2+2x-3}{x-2}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition $D_h$ de $h$.

b) Comparer $h(-x)$ et $f(x)$ pour $x$ de $D_h$.

c) Expliquer comment obtenir la courbe $(\mathcal{C}')$ à partir de $(\mathcal{C})$.

d) Construire $(\mathcal{C}')$ dans le repère précédent.

# CORRIGE♦BAC1-D♦ 2018

## Exercice 1 — Corrigé proposé

**1° Déterminons les nombres réels b et c.**

Pour tout entier naturel $n$, $U_{n+1} = b+\frac{c}{3U_n-1}$.

Par division eucludienne on obtient : $U_{n+1} = 1+\frac{8}{3U_n-1}$.

D'où : **b = 1 et c = 8**

**2° Déterminons les valeurs de a pour lesquelles est une suite constante.**

La suite (U) est constante $\Leftrightarrow$ $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n = U_0 = a$.

On a : $\frac{3a+7}{3a-1} = a \Leftrightarrow 3a^2-a-3a-7 = 0$.

Soit : $3a^2-4a-7=0$ avec $a\in\left\{-1;\frac{7}{3}\right\}$.

**3° Calculons les valeurs $v_0$, $v_1$ et $v_2$**

$$V_n=\frac{3U_n-7}{3(U_n+1)} \text{ et } U_0=3$$

$$v_0=\frac{1}{6};\ U_1=2;\ v_1=-\frac{1}{9};\ U_2=\frac{13}{5};\ v_2=\frac{2}{27}$$

**4°a) Montrons que $(V)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison**

$V_n=\frac{3U_n-7}{3(U_n+1)}$ entraîne $V_{n+1}=\frac{3U_{n+1}-7}{3(U_{n+1}+1)}$ ; et on a: $U_{n+1}=\frac{3U_n+7}{3U_n-1}$

Le numérateur, $3U_{n+1}-7=3\left(\frac{3U_n+7}{3U_n-1}\right)=\frac{9U_n+21}{3U_n-1}-7=\frac{-12U_n+28}{3U_n-1}$ ;

Le dénominateur, $U_{n+1}+1=\frac{3U_n+7}{3U_n-1}+1=\frac{6U_n+6}{3U_n-1}$ et nous avons :

$$3(U_{n+1}+1)=3\left(\frac{3U_n+7}{3U_n-1}+1\right)=3\left(\frac{6U_n+6}{3U_n-1}\right)=\frac{18U_n+18}{3U_n-1}$$

$V_{n+1}=\frac{3U_{n+1}-7}{3(U_{n+1}+1)}$ devient alors successivement :

$$\frac{-12U_n+28}{3U_n-1}\div\frac{18U_n+18}{3U_n-1}=\frac{-12U_n+28}{3U_n-1}\times\frac{3U_n-1}{18U_n+18}=\frac{-6U_n+14}{9U_n+9}$$

$$V_{n+1}=-\frac{2}{9}\times\frac{3U_n-7}{U_n+1}=-\frac{2}{3}\left[\frac{3U_n-7}{3(U_n+1)}\right]\Rightarrow V_{n+1}=-\frac{2}{3}V_n$$

**Conclusion :**

$(V)$ est une suite géométrique de raison $q=-\frac{2}{3}$





**b) Calculons de $V_n$ en fonction de $n$**

On sait que : $v_n=v_0\times(q)^n \Leftrightarrow \boxed{v_n=\frac{1}{6}\left(-\frac{2}{3}\right)^n}$

■ **Déduction de $U_n$ en fonction de n.**

On a : $V_n=1-\frac{10}{3(U_n+1)}$ avec $U_n=-1-\frac{10}{3(V_n-1)}$

Donc, $\boxed{U_n=-1-\frac{10}{\left[\frac{1}{6}\left(-\frac{2}{3}\right)^n-1\right]}}$

**5°a) Montrons que $(v)$ est une suite convergence et calculons sa limite.**

Avec $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=0$ alors $\left|-\frac{2}{3}\right|<1$

Donc $(V)$ est une suite convergente.

**b) La suite $(U)$ est convergente.**

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=\lim_{n\to+\infty}\left(-1-\frac{10}{3(V_n-1)}\right)=-1+\frac{10}{3}\Leftrightarrow\boxed{\lim_{n\to+\infty}U_n=\frac{7}{3}}$$

## Exercice 2 — Corrigé proposé

**1° Déterminons et construisons le barycentre G**

G est le barycentre des points (A, -1) ; (B, 1) ; (C, -1).

On a : $\overrightarrow{BG}=\frac{-1}{-1}\overrightarrow{BA}+\frac{-1}{-1}\overrightarrow{BC}$ donc $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$

(Our la construction, voir figure à la page suivante)

**2°a) Calculons $GA^2$ ; $GB^2$ et $GC^2$.**

Le quadrilatère ABCG est rectangle.

$\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{CB}$ entraine que $GA^2 = CB^2 \Leftrightarrow \boxed{GA^2 = a^2}$

Les diagonales [AC] et [BG] ont même longueur $GB^2 = AC^2 = BA^2+BC^2$

Puisque $GB^2 = 3a^2+a^2$, alors $\boxed{GB^2 = 4a^2}$

$\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AB}$ entraîne que $GC^2 = AB^2$ ; $\Leftrightarrow \boxed{GC^2 = 3a^2}$

**b) Déterminons et construisons l'ensemble $(\gamma)$ des points M du plan tels que :** $MA^2-MB^2+MC^2 = 4a^2$.

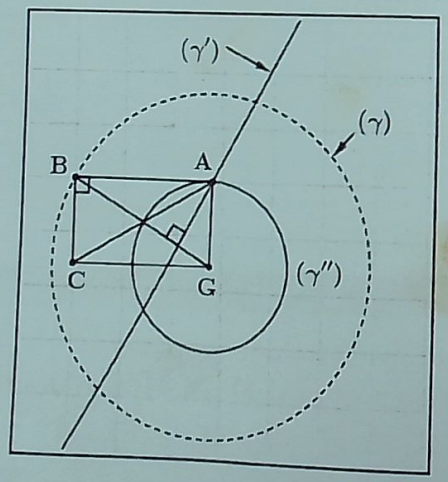
$MA^2-MB^2+MC^2 = 4a^2 \Leftrightarrow -MA^2+MB^2-MC^2 = -4a^2$

$\Leftrightarrow -GA^2+GB^2-GC^2-MG^2 = -4a^2$

$\Leftrightarrow MG^2 = 4a^2$

$\Leftrightarrow MG = 2a = BG$

**Conclusion :** $(\gamma)$ est le cercle de centre G et de rayon $2a$ passant par B




**3°Déterminons et construisons l'ensemble $(\gamma')$ des points M du plan tels que :** $(-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}) = -a^2$





$(-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}).(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}) = -a^2$

$(-\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}).(-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}) = a^2$

On obtient : $2\overrightarrow{JB}.(-\overrightarrow{MG}) = a^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GM} = a^2$

(car J est également milieu de [BG]).

On désigne par H le projeté orthogonal de M sur (GB).

On a : $\overrightarrow{GB}\times\overrightarrow{GH} = a^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{GH} = \dfrac{a^2}{\overrightarrow{GB}} \Leftrightarrow \overline{GH} = \dfrac{a}{2}$.

$(\gamma')$ est la droite perpendiculaire à (GB) passant par H défini par : $\overline{GH} = \dfrac{a}{2}$.

**4°a) Déterminons la nature de $g_1$.**

On a : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MG}$ donc M' = G d'où : $g_1$ est l'application constante.

**b) Montrons que $g_m$ est une homothétie dont on précisera les éléments caractéristiques.**

On a : $m\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MG} \Leftrightarrow m(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GM'}) = \overrightarrow{MG}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GM'} = \dfrac{m-1}{m}\overrightarrow{GM}$

$g_m$ est l'homothétie de cente G et de rapport $\dfrac{m-1}{m}$.

**b) Déterminons et construisons $(\gamma'') = g_{\frac{2}{3}}(\gamma)$.**

Pour $m = \dfrac{2}{3}$ ; on a : $\dfrac{m-1}{m} = -\dfrac{1}{2}$ ;

$g_{\frac{2}{3}}$ est donc l'homothétie de centre O et de rapport $-\dfrac{1}{2}$.

$(\gamma'')$ est le cercle de centre G et de rayon $\left|-\dfrac{1}{2}\right|\times(2a)$.

Donc $(\gamma'')$ est le cecle de centre G et de rayon $a$.

**Problème** — Corrigé proposé

**1°a) Déterminons l'ensemble de définition D de $f$.**

$f(x) = \dfrac{-x^2+2x+3}{x+2}$ Donc $D = \{x \in \mathbb{R} / x+2 \neq 0\}$

$\Leftrightarrow \quad x+2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2$ Donc : $\boxed{D = \mathbb{R}\setminus\{-2\}}$

**b) Calcul des limites de aux bornes de D.**

Posons $N(x) = -x^2-2x^2+3$, donc, on calcule : $N(-2) = -5$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} (-x) \Leftrightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (-x) \Leftrightarrow \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty}$

- $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\<}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-2\\<}} \left(\dfrac{-x^2+2x+3}{x+2}\right) = +\infty$ car $\begin{cases} -x^2+2x+3 \longmapsto -5 \\ x+2 \longmapsto 0 \\ x+2 > 0 \end{cases}$

- $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\>}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to-2\\>}} \left(\dfrac{-x^2+2x+3}{x+2}\right) = -\infty$ car $\begin{cases} -x^2+2x+3 \longmapsto -5 \\ x+2 \longmapsto 0 \\ x+2 < 0 \end{cases}$

$\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to-2\\<}} f(x) = +\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to-2\\>}} f(x) = -\infty}$

**2° a) Déterminons les nombres réels $a$, $b$ et $c$ tels que :**

$\forall x \in D,\ f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x+2}$ et par division eucludienne on a :

$f(x) = -x+4+\dfrac{5}{x+2}$ d'où : $\boxed{a = -1}$ ; $\boxed{b = 4}$ ; $\boxed{c = -5}$





**b) Déduisons que ($\mathscr{C}$) admet une asymptotes obliques ($\Delta$).**

$$\lim_{|x|\to+\infty} [f(x)-(x+4)] = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{-5}{x+2} = 0$$

Donc, la droite ($\Delta$) a pour équation : $y = -x+4$.

L'asymptôte verticale a pour équation : $x = -2$

**c)Déterminons les coordonnées du point J, intersection des asymptôtes.**

Les coordonnées de J sont solution de $\begin{cases} x = -2 \\ y = -x+4 \end{cases}$ D'où : $\boxed{J(-2;6)}$

**d) Montrons que le point $\Omega(-2;6)$ est le centre de symétrie de ($\mathscr{C}$).**

$x \in D \Leftrightarrow x \neq -2 \Leftrightarrow -4-x \neq -2 \Leftrightarrow x \in D$

$\Leftrightarrow \quad f(-4-x)+f(x) = 4+x+4+\dfrac{-5}{-2-x}+\left(-x+4+\dfrac{-5}{x+2}\right)$

$\Leftrightarrow \quad f(-4-x)+f(x) = 12$

$\Leftrightarrow \quad f(-4-x)+f(x) = 2\times6$

**3° Etudions le sens de variation de $f$.**

- $f$ est une fonction rationnelle, et dérivable en chaque point D.

On a : $f'(x) = -1+\dfrac{5}{(x+2)^2} \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{5-(x+2)^2}{(x+2)^2}$

- $f'(x)$ est du signe de $5-(x+2)^2$ ; donc l'équation $5-(x+2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x = -2-\sqrt{5}$ ou $x = -2+\sqrt{5}$.

$f'(x) > 0$ pour $x \in ]-2-\sqrt{5};\ 2+\sqrt{5}[ \cup ]-2;\ 2+\sqrt{5}[$

$f'(x) \leq 0$ pour $x \in ]-\infty;\ -2-\sqrt{5}] \cup [-2+\sqrt{5};\ +\infty[$

- **Sens de variation de $f$**

$f$ est décroissante sur chacun des intervalles $]-\infty;\ -2-\sqrt{5}]$ et $[-2+\sqrt{5};\ +\infty[$.

$f$ est croissante sur des intervalles $]-2-\sqrt{5};\ 2+\sqrt{5}[$ et $]-2;\ 2+\sqrt{5}[$
En calculant : $f(-2-\sqrt{5}) = 6+2\sqrt{5}$ ; $f(-2+\sqrt{5}) = 6-\sqrt{5}$

■ **Tableau de variation**

| $x$ | $-\infty$ | | $-2-\sqrt{5}$ | | $-2$ | | $-2+\sqrt{5}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $6+2\sqrt{5}$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $6-2\sqrt{5}$ | ↗ | | ↘ | $-\infty$ |

**4°a) Déterminons les points de $(\mathscr{C})$ en lesquels les tangentes sont parallèles à la droite d'équation : $y = 4x-3$**

On a : $f'(x) = 4 \Leftrightarrow -1+\dfrac{5}{(x+2)^2} = 4 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 1$

On obtient deux solutions : $x = -1$ ou $x = -3$.

En calculant les images des deux réels, on a : $f(-1) = 0$ et $f(-3) = 12$.

Finalement deux points sont solution : **A(-1 ; 0)** et **B(-3 ; 12)**

**b) Equation des tangentes en ces points**

Pour **A(-1 ; 0)** alors $(T_1): y = f'(-1)(x+1)+f(-1)$

$$(T_1): y = 4(x+1)+0 \Leftrightarrow (T_1): y = 4x+4$$

Pour **B(-3 ; 12)** alors $(T_2): y = f'(-3)(x+3)+f(-3)$

$$(T_2): y = 4(x+3)+12 \Leftrightarrow (T_2): y = 4x+12$$

**5°a) ▶ Intersection de $(\mathscr{C})$ avec l'axe des ordonnées**

En calculant $f(0) = \dfrac{3}{2}$ on retrouve les coordonnées $(0;\dfrac{3}{2})$





La courbe coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0;\dfrac{3}{2})$

**▶ Intersection de $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses.**

Nous serons amené à résoudre l'équation : $f(x) = 0$.

$f(x) = 0$ équivaut à $-x^2+2x+3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0$

On obtient deux solutions distinctes: $x = -1$ ou $x = 3$

La courbe coupe l'axe des abscisses aux points $F(-1;0)$ et $G(3;0)$

**b) Tracé de la courbe $(\mathscr{C})$ et des tangentes $(T_1)$ et $(T_2)$.**

**6° Discutions graphique suivant les valeurs du nombre réel m**

Soit $(D_m)$ la droite d'équation : $y = 4x+m$.

➢ Pour $\{4;24\}$, $(D_m)$ et $(\mathscr{C})$ possède deux points communs.

➢ Pour $]-\infty;4[\cup]24;+\infty[$, $(D_m)$ et $(\mathscr{C})$ possède deux points communs.

➢ Pour $m\in]4;24[$, $(D_m)$ et $(\mathscr{C})$ n'ont aucun point commun.

**7°a) Déterminons l'ensemble de définition $D_h$ de $h$.**

Soit la fonction $h$ définie par : $h(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x-2}$

$D_h = \{x\in\mathbb{R}/x+2 \neq 0\}$ donc le domaine est : $D_h = \mathbb{R}\setminus\{2\}$

**b) Comparons $h(-x)$ et $f(x)$ pour $x$ de $D_h$.**

Pour $x\in D_h$, $h(-x) = \dfrac{(-x)^2+2(-x)-3}{-x-2} = \dfrac{x^2+2x+3}{x+2} = f(x)$

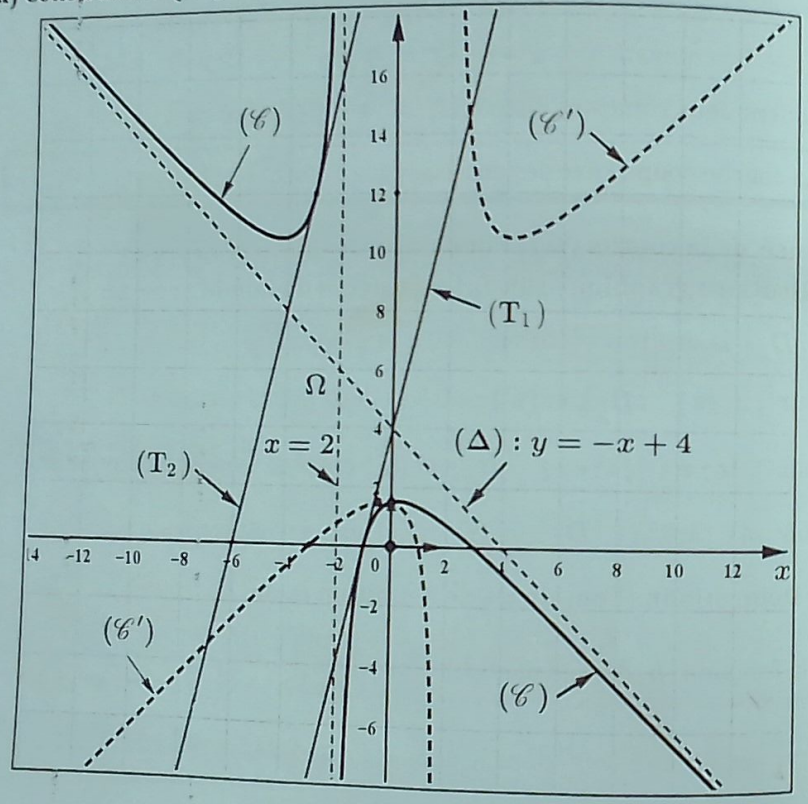
Il vient : $h(-x) = f(x)$

Ainsi, $h(x) = f(-x)$ avec $(\mathscr{C}')$ la courbe de $h$.

**c) Expliquons :**

Pour obtenir la courbe $(\mathscr{C}')$ à partir de $(\mathscr{C})$, il suffit de construire le symétrique de $(\mathscr{C})$ par rapport à l'axe (Oy).

**d) Construction $(\mathscr{C}')$ dans le repère précédent.**




*Fin des Sujets d'Examen*





# 1ère C4-D & Concours

## SUJETS DE SYNTHÈSE

(Sujets des Lycées publics et privés du Togo)

**Choisis pour se mettre à niveau**

**et dans les conditions d'Examen.**

**La réussite se prépare, ne l'oublie pas !!!**
**Donnez vous les moyens de réussir votre Examen**

*Celui qui cherche, trouve toujours.....*

## Exo-Blanc 1

1re D ♦ Épreuve proposée (Lycée de Notsè - HAHO)

### EXERCICE 1

Le plan $(\mathscr{P})$ est orienté, on considère un triangle **ABC** tel que le triplet **(A, B, C)** soit de sens direct.

**1°** Déterminer et tracer l'ensemble $(\Gamma)$ des points **M** de $(\mathscr{P})$ tels que :

$\text{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}}\right) = \frac{\pi}{2}$.

**2°** Soit **G** le barycentre des points pondérés {(**A**, 3) ; (**B**, 1) et (**C**, 1)}.
**Q** désigne le barycentre des points pondérés {(**A**, 3) ; (**C**, 1)} et **R** le barycentre des points pondérés {(**A**, 3) ; (**B**, 1)}.

**a)** Placer sur la figure les points **Q** et **R**.

**b)** Démontrer que les points **Q**, **G** et **B** d'une part et **G**, **R** et **C** d'autre part sont alignés. Placer **G** sur la figure.

**c)** Soit **P** le milieu du segment [**BC**].
Exprimer le vecteur $\overrightarrow{PG}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{PA}$.

**3°** Dans cette question, les points **B** et **C** sont fixes et **A** appartient à $(\Gamma)$.
Faire une nouvelle figure.

### EXERCICE 2

On considère la suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$U_0 = 1 \ ; \ U_1 = 2 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N}, \ U_{n+2} = \frac{2}{3}U_{n+1} + \frac{1}{3}U_n$$

**1°** Calculer $U_2$ ; $U_3$ et $U_4$.

**2°** Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $\forall n\in\mathbb{N}, \ V_n = U_{n+1} - U_n$

**a)** Montrer que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
Préciser sa raison.

**b)** Donner l'expression de $V_n$ en fonction de $n$.

**3°** On pose $S_n = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots\cdots + V_n$.

**a)** Montrer que $S_n = U_{n+1} - U_n$.





**b)** Calculer $S_n$ en fonction de $n$.

**c)** En déduire l'expression de $U_n$ en fonction de $n$.

### PROBLEME

**Partie A** : On considère la fonction numérique $f_t$, définie par :

$f_t : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f_t(x) = x - 2 + \frac{3x-2}{(x-t)^2} \text{ où } t \text{ est un paramètre réel.}$$

Soit $(\mathscr{C}_t)$ la famille de la courbe dans un repère orthonormé **(O, I, J)**.

**1°** Soit **P** le point du plan de coordonnées $\left(3 ; \frac{11}{4}\right)$.

Combien passent-il de courbes $(\mathscr{C}_t)$ passent-elles par le point **P** ?

**2°** Déterminer les équations des tangentes au point $P\left(3 ; \frac{11}{4}\right)$ aux deux courbes passant par ce point.

**Partie B**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
L'unité de longueur sur chaque axe est le centimètre.
Soit la fonction numérique définie par :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x-1)^2}.$$

**1°** Calculer lorsque $f$ est définie, les nombres réels $a$, $b$ et $c$ tels que :

$$f(x) = x + a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}.$$

**2°** Etudier la fonction $f$.

- Ensemble de définition $D_f$, dérivé, signe de la dérivée.
- Sens de variation, limites aux bornes de $D_f$.
- Tableau de variation.

3° Montrer que la courbe $(\mathscr{C})$ représentative de $f$, admet deux asymptotes dont l'une est la droite (D) d'équation $y = x-2$.
Préciser la position de $(\mathscr{C})$ par rapport à $(\mathscr{D})$.

4° Construire la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

5° En utilisant la courbe $(\mathscr{C})$, déterminer, suivant les valeurs du paramètre réel $m$ le nombre et le signe des solutions de l'équation :
$x \in \mathbb{R}$, $x^3-(4+m)x^2+2(4+m)x-(4+m) = 0$.

6° Soit g une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie par : $g(x)=\dfrac{-x^3-4x^2-8x-4}{(x-1)^2}$
et $(\mathscr{C}')$ sa courbe représentative dans le repère (O, I, J).

a) Montrer que $g(x)=f(-x)$.
En déduire une trans formation simple qui permet d'obtenir la courbe $(\mathscr{C}')$ à partir de la courbe $(\mathscr{C})$.

b) Tracer la courbe $(\mathscr{C}')$ dans le même repère que $(\mathscr{C})$.

## Exo-Blanc 2

1re D ♦ Épreuve proposée (Lycée de Kpodzi-Kpalimé)

## EXERCICE 1

On considère la suite $(U_n)$ définie par son premier terme $U_0=2$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n-2U_{n+1} = 2n+3$.

1° Démontrer qu'il existe un nombre entier naturel $b$ indépendant de $n$ tel que : $V_n = U_n + bn-1$ soit le terme général d'une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.
En déduire que $U_n = \dfrac{1}{2^n}-2n+1$.

2° Etudier la variation de la suite $(U_n)$.

3° On pose $S_n=V_0+V_1+V_2+\cdots\cdots+V_n$ et $T_n=U_0+U_1+U_2+\cdots\cdots+U_n$
Calculer $S_n$ et $T_n$ en fonction de $n$.





## EXERCICE 2

1° Résoudre $x \in [0\ ;\ 2\pi]$, $\sin(2x)+\cos(x) \leq 0$

2°a) Transformer sous la forme $a\cos(6x)+b\sin(6x)$ l'expression :
$\cos^2(3x)-2\sqrt{3}\cos(3x)\sin(3x)-\sin^2(3x)$

b) Résoudre $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(3x)-2\sqrt{3}\cos(3x)\sin(3x)-\sin^2(3x) = -2$

3° Représenter les points images des solutions sur le cercle trigonométri-que.

## PROBLEME

On considère les fonctions :

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto f(x) = \dfrac{x^3+3x^2+10x+11}{(x+1)^2}$

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \mapsto g(x) = x^3+3x^2-4x-12$

**Partie A**

1° Etudier les variations de g.

2° Calculer $g(2)$. En déduire une écriture de $g(x)$ sous la forme d'un produit de polynômes du premier degré.

3° Construire la courbe représentative $(\mathscr{C}_g)$ de g dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4° Déterminer l'image réciproque par g des nombres réels $-12$ et $-6$.
En déduire graphiquement l'image réciproque par g de [-12 ; -6].

**Partie B**

1° Déterminer les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition $D_f$.

2° Démontrer que : $\forall x \in D_f$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(x+1)^3}$.

Etudier le signe de $f$. Etablir le tableau de variation.

3°a) Déterminer les réels $a$, $b$ et $c$ tels que $f(x) = ax+b+\dfrac{7x+10}{(x+1)^2}$

b) En déduire que la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de $f$ admet une asymptotes oblique $(\mathscr{D})$ dont on précisera l'équation.

c) Déterminer les positions relations de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{D})$.

4° Représenter la courbe $(\mathscr{C})$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé. On tracera aussi les asymptotes et tangentes horizontales à $(\mathscr{C})$.

5° On considère la fonction $x \mapsto h(x) = f(-|x|)$ et on désignera par $(\mathscr{C}')$ sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de $h$.

b) Etudier la parité de $h$.

c) Exprimer comment peut-on obtenir $(\mathscr{C}')$ à partir de $(\mathscr{C})$.

d) Construire donc $(\mathscr{C}')$.

## Exo-Blanc 3

1re D ♦ Épreuve proposée (Lycée du 2 Février–Agbalépédo

## EXERCICE 1

1° Résoudre l'équation : $x \in [0\ ;\ 2\pi[$, $\cos x - \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2°a) Montrer que pour tout réel x, on a : $\sin(2x) = 1 - [\cos x - \sin x]^2$

b) Résoudre l'équation : $x \in [0\ ;\ 2\pi[$, $\sqrt{2}\sin 2x + \cos x - \sin x = \sqrt{2}$

Placer les points images des solutions sur un cercle trigonométrique.

## EXERCICE 2

$(\mathscr{C})$ est un cercle de centre O et [AB] un diamètre de $(\mathscr{C})$.

On désigne par C' un point du segment [AB], distinct de A et B.

Soit M un point du cercle $(\mathscr{C})$ distinct de A et B.

La droite (OM) coupe le cercle $(\mathscr{C})$ en un deuxième point N.

Les droites (AM) et (NB) se coupent en M'.

1° Montrer que les droites (AM) et (BN) sont parallèles

2° Soit h l'homothétie de centre C' telle que h(A) = B.

Déterminer les images par $h$ :

a) de la droite (AM).





b) du point M.

3° Déterminer et tracer l'ensemble décrit par le point M' lorsque M décrit l'ensemble $(\mathscr{C})\backslash\{A\ ;\ B\}$.

## PROBLEME

**Partie A** : Soit g la fonction définie par : $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto g(x) = ax^2 + bx + c$$

Déterminer les réels $a$, $b$ et $c$ pour que la courbe représentative de g.

* passe par le point de coordonnées (-2 ; - 2)

* passe par le point de coordonnées $\left(1, \dfrac{5}{2}\right)$ et admette en ce point une tangente de coefficient directeur $-\dfrac{3}{2}$.

**Partie B** : Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2+4}{2x} & \text{si } x \in ]-\infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[ \\ f(x) = -x^2 + \dfrac{1}{2}x + 3 & \text{si } x \in [-2 ; 1[ \end{cases}$$

et soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°a) Déterminer l'ensemble de définition de $f$.

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en $x = -2$ et en $x = 1$.

2°a) Etudier les variations de $f$.

b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec les axes.

3° Montrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = \dfrac{x}{2}$ est asymptotes à la courbe $(\mathscr{C})$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ et lorsque $x$ tend vers $-\infty$.

4° Tracer la courbe $(\mathscr{C})$, la droite $(\mathscr{D})$ ainsi que les tangentes où les demi-tangentes aux points d'abscisses $-2$ et $-1$.

5° On donne les équations : $(E_1)$ : $x \in \mathbb{R}$, $(2m-1)x^2 + 4(m-1)x - 4 = 0$

$$(E_2) : x \in \mathbb{R},\ x^2+\left(m-\frac{1}{2}\right)x+2m-5 = 0$$

**a)** Résoudre chacune de ces équations.

**b)** Déterminer les valeurs de $m$ pour lesquelles la solutions de $(E_1)$ dépensant de $m$ appartenant $]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$.

**c)** Déterminer les valeurs de $m$ pour lesquelles la solution de $(E_2)$ dépendant de $m$ appartient à $[-2;1[$.

**6)** Soit $(\mathscr{D}_m)$ la droite passant par le point de coordonnées (-2 ; -2) et de coefficient directeur $m$.

Déterminer graphiquement le nombre de points d'intersection de $(\mathscr{D}_m)$ avec la courbe $(\mathscr{C})$.

## Exo-Blanc 4 — 1re D ♦ Épreuve proposée(Lycée du Mango–Savanes

### EXERCICE 1

**1°** Calculer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$ où $x$ étant une variable réelle.

**2°** En déduire la valeur exacte de $A=-4\cos^3\left(\frac{\pi}{18}\right)+3\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)$

**3°** On considère l'équation trigonométrique suivant :

$x \in [-\pi;\pi[$ ; (E): $4\cos^3(x)-3\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**a)** Résoudre les solutions de l'équation $x\in\mathbb{R}$, (F) : $4x^3-3x+\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$

**b)** Justifier que trois de tes solutions distinctes de cette équation appartiennent toutes à l'intervalle ]-2 ; 1].

### EXERCICE 2

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique qui a pour premier terme $U_0$.

Les termes $U_0$, $U_1$ et $U_2$ vérifient la relation suivante $U_1\times U_2 = U_0^2-\frac{1}{2}$





**1°** Ecrie la relation simple qui lie $U_0$ et $r$.

**2°** Pour quelles valeurs de $U_0$ a-t-on deux valeurs distincts possibles pour $r$ ? Ecrire ces deux valeurs en fonction de $U_0$.

**3°** On donne $U_0 = \frac{\sqrt{5}}{3}$ et $r < \frac{-\sqrt{5}+1}{4}$.

**a)** Caractérise alors la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis justifie qu'elle est décroissante.

**b)** Donne alors le terme général $U_n$ de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

puis calcule $S_{10} = U_2+U_3+\cdots+U_{10}$

### PROBLEME

Soit les fonctions numériques $f_m$ où $m$ est un paramètre réel.

$f_m : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f_m(x) = \frac{x^2-mx+1}{x^2-mx+2}.$$

On désigne par $(\mathscr{C}_m)$ les courbes représentatives de $f_m$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

**Partie A**

**1°** Etudier l'ensemble de définition de $f_m$ suivant les valeurs de $m$.

**2°** Montrer que toutes les courbes $(\mathscr{C}_m)$ passent par un seul point fixe quand $m$ décrit $\mathbb{R}$ et donnera les coordonnées.

**3°** Quelles sont les valeurs de $m$ pour lesquelles les fonctions $f_m$ admettent un minimum et/ou un maximum.

**4°** Etudier, suivant les valeurs de $m$ avec $m\in[-2\sqrt{2}\ ;\ 2\sqrt{2}]$ le sens de variation de $f_m$ et dresser le tableau de variation de $f_m$ correspondant à chaque cas.

**Partie B**

On considère les fonctions $f_m$ précédentes et on pose $m=2$.

**1°** Etudier la fonction $f_2$ et trouve sa courbe représentative $(\mathscr{C}_2)$ dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2° Soit la fonction g définie par $g(x)=f_2(|x|)$ et $(\Gamma)$ sa courbe représentative.

Déduire $(\Gamma)$ de $(\mathscr{C}_2)$ et dire quelle transformation elle est obtenue.

## Ezo-Blanc 5

1re D ♦ Épreuve proposée (Lycée ADELE – Kozah)

### EXERCICE 1

On considère deux points distincts **A** et **B** du plan $(\mathscr{P})$

1° Soit $G_1$ le barycentre des points pondérés (**A**, 1) ; (**B**, 2)
et $G_2$ le barycentre des points pondérés (**A**, 1) ; (**B**, 2).
Trouve l'ensemble des points **M** du plan tels que :
$(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}) = \vec{0}$

2° Soit $k$ un réel.

a) Discuter suivant les valeurs de $k$ l'ensemble $(E_k)$ des solutions de l'équation : $M\in(\mathscr{P})$, $\frac{MA}{MB} = k$

b) Déterminer et construire l'ensemble $(E_2)$.

3°a) Construire sur la même figure les arcs capables d'extrémité A et B d'angle $\frac{\pi}{3}$.

b) Déduis de la question précédente l'ensemble $(\Gamma)$ des points **M** de $(\mathscr{P})$ tels que mes $\text{Mes}(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = -\frac{\pi}{3}$.

### EXERCICE 2

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $U_1=\frac{3}{2}$ ; $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = \frac{2}{3-U_n}$.

1° Calcule $U_2$, $U_3$, et $U_4$.

2°a) Montrez que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $1 < U_n < 2$.

b) Démontre que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.





3° Soit la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $V_n = \frac{U_n-1}{2-U_n}$.

a) Montrer que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est parfaitement définie.

b) Montre que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique qu'on précisera.

c) Exprime $V_n$ en fonction de $n$ déduis $U_n$ en fonction de $n$.

d) Calcule $S_n = V_1+V_2+\cdots\cdots+V_n+V_{n+1}$.

### PROBLEME

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \frac{x^2+x}{|x^2+1|+1}$$

1°a) Détermine l'ensemble de définition de $f$ et montre que $f$ est continue sur son ensemble de définition.

b) Exprime $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.

2° Pour un réel non nul on pose : $t(x) = \frac{f(1+x)-f(1)}{x}$.

a) Détermine $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\x>0}} t(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\x<0}} t(x)$.

b) La fonction $f$ est-elle dérivable en $x_0=1$ ?

On admet qu'elle est dérivable en $x_1=-1$ et que $f'(-1)=-1$.

3° Etudie le sens de variations de la fonction $f$ et dresser le tableau de variation de $f$.

4° Soit $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $f$.

a) Précise l'asymptote éventuelle de $(\mathscr{C})$.

b) Précise le point d'intersection de $(\mathscr{C})$ et de l'asymptote.

c) Construis les tangentes ou les demi-tangentes au points d'abscisses :
( $x_2=-1$ ) et ( $x_3=+1$ ).

d) Construire la courbe $(\mathscr{C})$.

## Exo-Blanc 6

1re D ♦ Épreuve proposée(Collège Saint JOSEPH-Lomé)

### EXERCICE 1

Dans un plan orienté, on considère deux points **A** et **B** tels que **AB** = 6 cm

1° Déterminer et construire l'ensemble (**E**) des points **M** du plan tel que :

$\frac{MA}{MB}=3$

2° Déterminer et construire sur la même figure, l'ensemble (**F**) des points **M** du plan tels que $(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{3}$.

3° On désigne par **C** l'image de **B** par la rotation de centre **A** et dont la mesure de l'angle orienté est $\frac{2\pi}{3}$ et **D** un point tel que : $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

On désigne par $f$ la similitude directe transformant **A** en **B** et **C** en **D**.

**a)** Déterminer le rapport et l'ange de $f$.

**b)** On note **I** le centre de la similitude $f$.

Exprimer **IB** en fonction de **IC** et donner une mesure e l'angle $(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB})$.

En déduire la position de **I** et le placer sur la figure.

**c)** Démontrer que **I** appartient au cercle circonscrit au triangle ACD.

### EXERCICE 2

On désigne par $(U_n)$ et $(V_n)$ les suites numériques définies par :

$U_0 = \frac{1}{2}$ ; $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_{n+1} = \frac{U_n^2+5}{2U_n}$ et $V_n=\frac{U_n-\sqrt{5}}{U_n+\sqrt{5}}$.

1°**a)** A laide de la fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$x\longmapsto f(x) = \frac{x^2+5}{2x}$, de son asymptote oblique d'équation $y=\frac{1}{2}x$ et de la droite d'équation $y=x$ dans un repère





orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ représenté sur l'axe $(O,\vec{i})$ les termes de la suite $(U_n)$ dont l'unité graphique est le centimètre.

**b)** La suite $(U_n)$ a un sens de variation à partir d'un entier naturel $n_0$.

Préciser le sens de variation de $(U_n)$.

Quelle remarque faites vous quant à la convergence de la suite $(U_n)$.

2°**a)** Démontrer que : $V_{n+1} = (V_n)^2$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

**b)** Démontrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$, $V_n = (V_0)^2$.

**c)** Vérifie que $V_0 = -\frac{19}{(1+2\sqrt{5})^2}$ et que $|V_0| < 1$.

**d)** Exprimer $U_n$ en fonction de $V_n$.

Calculer la limite de $(V_n)$ puis déduis celle de $(U_n)$.

3° On suppose que $n$ est un entier naturel non nul.

**a)** Montrer que la suite $(U_n)$ est strictement positive.

**b)** Exprimer en fonction $(U_n)$ les expressions $U_{n+1}-U_n$ et $U_{n+1}-\sqrt{5}$ et établir par récurrence que la suite $(U_n)$ est minorée par $\sqrt{5}$ et qu'elle est strictement décroissante.

**c)**Montrer que $(U_n)$ est convergente vers une limite **l** que l'on déterminera.

### PROBLEME

Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$x\longmapsto f(x) = \frac{x^3+3x^2+10x+5}{(x+1)^2}$

une fonction numérique et soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Unité = 1 cm.

1° Montrer que la fonction dérivé $f'$ est définie par $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$,

$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ où **g** est une fonction polynôme de degré 3.

2° Etudier les variations de f et établir un tableau de variations.

3° Déterminer les réel $a$, $b$ et $c$ tel que $f(x) = x+a+\dfrac{b}{x+1}$

On pose $(\mathscr{D})$ : $y=x+1$.

On désigne par M un point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse $x$ et par **N** un point de $(\mathscr{D})$ de même abscisse.

**a)** Ecrire en fonction de $f$, la mesure algébrique $\overline{NM}$.

Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\overline{NM}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\overline{NM}$.

Qu'en déduisez-vous pour la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite $(\mathscr{D})$ ?

**b)** Etudier, suivant les valeurs de $x$, le signe de $\overline{NM}$ et en déduire la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à $(\mathscr{D})$.

5° Résoudre l'équation : $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ; $f(x)=x$

Donner un encadrement d'amplitude $5\times10^{-1}$ près des solutions.

Etudier la position de la courbe $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite $(\Delta)$ : $y=x$

6° Montrer que l'équation $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ; $f(x)=0$ admet une solution unique $\alpha$ appartenant à ]-1 ; 0[.

Vérifier que $\alpha\in\left]-\dfrac{3}{4};-\dfrac{1}{2}\right[$ ; utiliser les questions **2°)**

7° Résoudre : $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ ; $f(x)=\dfrac{19}{4}$.

En respectant leurs positions relatives, tracer les droites $(\Delta)$, $(\mathscr{D})$ et la courbe $(\mathscr{C})$

8° Soit $\theta$ la mesure d'un angle en degré comprise entre **0°** et **180°**.

On désigne par $(E_m)$, l'équation :

$\cos^3\theta+(3-m)\cos^2\theta+2(5-m)\cos\theta+5-m = 0$

Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre $m$, le nombre et le signe des solutions de l'équation $(E_m)$ en $\theta$.

Préciser pour chaque solution la valeur ou un encadrement de





correspondant. (Cette question est possible pour certaines solutions).

9) Dans le plan $(\mathscr{P})$ muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère l'application **S** définie par S : $(\mathscr{P})\longrightarrow(\mathscr{P})$

$M\longmapsto M'=S(M)$ si est seulement si $\begin{cases}x'=y\\y'=x\end{cases}$

où **M** et **M'** ont pour coordonnées respectives $(x,y)$ et $(x',y')$

**a)** Montrer que **S** est une isométrie.

Déterminer l'ensemble des points invariants par **S**.

Déduire la nature et les éléments caractéristiques de **S**.

**b)** Construire dans le même repère que 7°) la courbe $(\mathscr{C}')$ = S$(\mathscr{C})$ image de $(\mathscr{C})$ par **S**.

## Exo-Blanc 7

1re D ♦ Épreuve proposée (Collège Militaire – Kozah

## EXERCICE 1

Soit ABC un triangle équilatéral direct de centre **O**.

Soit $(\mathscr{C})$ son cercle circonscrit.

Soit **I** le milieu du segment [AB] ; **J** le milieu du segment [**OI**].

Les droites (**OA**) et (**OC**) recoupent le cercle $(\mathscr{C})$ respectivement en **D** et **E**.

1° Faire une figure avec **OA** = 4 cm

2° **G** est l'isobarycentre des points **A**, **B**, **C**, **D** et **E**.

**a)** Exprimer $\overrightarrow{OG}$ en fonction de $\overrightarrow{OB}$.

**b)** Démontre que : $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{OD}+\dfrac{4}{5}\overrightarrow{OJ}$.

**c)** En déduire que les droites (OB) et (DJ) se coupent en **G**.

3° A tout point **M** ; on fait correspondre le point $M'=f(M)$ définie par :

$4\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}$

**a)** Montrer que $f$ est une homothétie. Préciser son centre et son rapport.

**b)** Quelles sont les images par $f$ des points **B** et **D** ?

## EXERCICE 2

Soit un segment [AB] de longueur 8 cm.
On note $A_1$ le milieu du segment [AB] ; on pose $a_1 = AA_1$ et $I_1 = AA_1$
On note $A_2$ le milieu du segment $[A_1B]$. On note $a_2 = A_1A_2$ et $I_2 = AA_2$ ; .....
D'une façon générale, on note $A_{n+1}$ est le milieu du segment $[A_nB]$ ; on pose $a_{n+1} = A_nA_{n+1}$ et $I_{n+1} = AA_{n+1}$.

**1)** Faire une figure et représenter sur le segment [AB] les points $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$. En observant la figure, conjecturer les limites des suites $(a_n)$ et $(I_n)$.

**2)** Calculer $a_1$ , $a_2$, $a_3$, $a_4$ puis $I_1$, $I_2$, $I_3$ et $I_4$ dont on précisera le premier terme et la raison.

**b)** Exprimer $I_n$ en fonction des termes de la suite $(a_n)$.

**c)** En déduire $a_n$ et $I_n$ en fonction de $n$.

**d)** Quelle est la limite de la suite $(a_n)$ ?

En déduire la limite de la suite $(I_n)$.

## PROBLEME

**Partie I** - Soit la fonction polynôme $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto P(x) = ax^2+bx+c$$

où $a$, $b$, $c$ sont trois paramètres réels. On désigne par (CP) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Déterminer les réels $a$ , $b$ et $c$ sachant que (CP) passe par les points A(0 ; -2) et $B\left(-\frac{1}{2};-\frac{9}{4}\right)$ et qu'en B, on a une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

**Partie II** - On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \frac{P(x)}{x^2}$$

1°) Déterminer les réels $u$ , $v$ et $t$ tels que :





$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \; ; \; f(x) = u+\frac{v}{x}+\frac{t}{x^2}.$$

2° Soit $f'(x)$ la fonction dérivée de $f$. Montrer que $f'(x) = -\frac{x-4}{x^3}$.

3° Etudier les variations de $f$.

4° Soit $(\mathcal{C}_f)$ la représentation graphique de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Préciser les asymptotes à $(\mathcal{C}_f)$. Etudier la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à son asymptotes $(\mathcal{D})$ parallèles à l'axe des abscisses.

5° Construire soigneusement $(\mathcal{C}_f)$.

6° Soit $m$ un réel non nul.
Ecrire l'équation de la tangente $(\mathcal{D}_m)$ à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse $m$ et démontrer qu'il existe deux tangentes à $(\mathcal{C}_f)$ passant par l'origine du repère.

7° A l'aide de la courbe $(\mathcal{C}_f)$, discuter graphiquement l'existence, le nombre et le signe des solutions de l'équation $x \in \mathbb{R}$ , $(k-1)x^2-x+2=0$
où $k$ est un paramètre réel.

**Partie III**

Soit g la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \left|\frac{x^2+x-2}{x^2}\right|$

**1)** Tracer dans le repère que $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative $(\mathcal{C}_g)$. Justifier

**2)** Soit $h$ la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{x^2+|x|-2}{x^2}$

**a)** Montrer que $h$ est paire et coïncide avec $f$ sur un intervalle que l'on précisera.

**b)** Construire la courbe $(\mathcal{C}_h)$ représentative de $h$ dans le même repère que celles de $f$ et g .

## Zéro-Blanc 3

1re D ♦ Épreuve proposée (Lycée de Tsévié 1 – ZIO

## EXERCICE 1

Soit ABC un triangle rectangle en B.

1,a) Construire le point K barycentre de (B, 3) et (C, 2) puis G barycentre de (A, 5) ; (B, 3) et (C, 2).

b) Exprimer le plus simplement possible les vecteurs :

$5\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}$ et $6\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}$.

3) Déterminer puis construire sur la même figure les ensembles de points M du plan (P) dans chaque cas :

a) $(E_1) = \left\{M\in(P)/\left\|5\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|6\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right\|\right\}$

b) $(E_2) = \left\{M\in(P)/\left(5\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right) \perp \left(6\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}\right)\right\}$

c) $(E_3) = \left\{M\in(P)/\left(5\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right) = 6\overrightarrow{BC}\right\}$

d) $(E_4) = \left\{M\in(P)/\left(5\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right) = \lambda\overrightarrow{BC} \text{ avec } \lambda\in\mathbb{R}\right\}$

e) $(E_5) = \left\{M\in(P)/\left\|5\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\| = 6BC\right\}$

## EXERCICE 2

On considère la suite numérique $(U_n)$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ \forall n\in\mathbb{N}; U_{n+1} = U_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{cases}$$

1° Calculer $U_1$, $U_2$ et $U_3$.

La suite numérique $(V_n)$ définie par : $\forall n\mathbb{N}$ ; $V_n = U_{n+1} - U_n$

2° Montrer que $(V_n)$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

3° On pose : $S_n = V_0+V_1+V_2+\cdots\cdots+V_n$

a) Calculer $S_n$ en fonction de $n$.

b) Montrer que $S_n = U_{n+1} - U_0$

En déduire en fonction de $n$, l'expression de $U_{n+1}$ puis $U_n$.

## PROBLEME

Soit $m$ un paramètre réel, élément de $\mathbb{R}\setminus\{-1;0;1\}$.

On considère la fonction $f_m : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$





$$x \mapsto f_m(x) = \frac{x+m}{mx+1}$$

On note $(\mathscr{C}_m)$, le courbe représentative de $f_m$ dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1° Montrer que toutes les courbes $(\mathscr{C}_m)$ passant par deux points fixes dont on déterminera les coordonnées.

On notera A le point d'abscisse négative et l'autre B.

2° Etudier suivant les valeurs de $m$ les variations de $f_m$.

3° Tracer dans le même repère les courbes $(\mathscr{C}_{-2})$ et $(\mathscr{C}_{-1/2})$.

4° Déterminer une équation de la tangente en A à la courbe $(\mathscr{C}_m)$.

On note $(\Delta_m)$ cette tangente.

5° Une droite $(\Delta_m)$ peut-elle passer par B ?

La droite orthogonale en A à $(\Delta_m)$ peut-elle passer par B ?

6° Vérifier que $(\Delta_m)$ et $(\Delta_{-1/m})$ sont orthogonales.

7°Pour quelles valeurs de $m$ la droite d'équation $y = 2x+1$ est-elle tangente à $(\mathscr{C}_m)$ ?

8°Pour quelles valeurs de $a$ la droite d'équation $y = ax+m$ est-elle tangente à $(\mathscr{C}_m)$ ?

9°a) Vérifier que la droite d'équation $y = ax+b$ ne peut être tangente à $(\mathscr{C}_m)$ que si, $a$ est du signe de $(1-m^2)$.

b) Démontrer qu'il existe alors deux droites de coefficient directeur à tangentes à $(\mathscr{C}_m)$.

c) Déterminer les abscisses des points de contact.

## Ezo-Blanc 9

1re D ♦ Épreuve proposée(Collège Père Augustin Planque

## EXERCICE 1

On considère un triangle ABC rectangle en A et tel que $AB = 2a$ et $AC = a$ où $a$ est un réel positif.

1° Soit G les point du plan défini par : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$.

Déterminer les réels $\alpha$ ; $\beta$ et $\gamma$ tels que G soit le barycentre du système de

points pondérés $\{(A, \alpha) ; (B, \beta) ; (C, \gamma)\}$.

2° Soit un nombre réel $k$ et on note $(\Gamma_k)$ l'ensemble des points M tels que $-2MA^2 + MB^2 + 4MC^2 = k$.

**a)** Pour quelle valeur de $k$ l'ensemble $(\Gamma_k)$ contient-il le point A ?

**b)** On donne $k = 8a^2$. Préciser et construire alors $(\Gamma_k)$.

(Pour la construction, prendre a = 2 cm)

**3°a)** Donner la nature du triangle ABG en justifiant.

Soit K le symétrique de H des points A, B et G.

Déterminer les nombres réels $b$ et $c$ tels que le point K soit le barycentre du système pondéré $\{(G, 1) ; (A, b) ; (B, c)\}$.

4° Déterminer et tracer l'ensemble ( $\mathcal{E}$ ) des points M du plan tels que :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|\overrightarrow{MG}-2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MG}\right\|.$$

## EXERCICE 2

Soit la suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 9 \\ \forall n\in\mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{1}{3}(2U_n+4) \end{cases}$

1° Calculer $U_1$ et $U_2$.

2° Montrer par récurrence que la suite numérique $(U_n)$ est décroissante et minorée par 4.

3° Soit la suite numérique $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n\in\mathbb{N}$, $V_n = U_n + a$ où $a$ est une constante réelle.

**a)** Montrer qu'il existe une valeur de $a$ pour laquelle la suite numérique $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

**b)** Préciser alors sa raison et son premier terme.

4° Dans la suite de l'exercice, on donne à $a$ cette valeur trouvée.

**b)** Exprimer $V_n$ en fonction de $n$, puis en déduire $U_n$ en fonction de $n$.

La suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?





**c)** On pose $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$ et $S'_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$.

Calculer $S_n$ puis $S'_n$ en fonction de $n$.

## PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1cm.

Soit $f_m : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f_m(x) = \frac{x^2+2mx+m^2-m}{x+m}$$

où $m$ est un paramètre réel et $(\mathcal{C}_m)$ est la courbe représentative de $f_m$.

**Partie A**

**1°a)** Déterminer l'ensemble de définition $D_{f_m}$ de $f_m$.

**b)** Déterminer trois nombres réels $a$, $b$ et $c$ tels que :

$$\forall x\in D_{f_m} ; f_m(x) = ax+b+\frac{c}{x+m}$$

2° Calculer la fonction dérivée $f'_m$ de $f_m$.

3° Etudier suivant les valeurs de $m$, les variations de $f_m$.

(On distinguera trois cas : $m<0$, $m=0$ et $m>0$)

**4°a)** Montrer que toutes les courbes $(\mathcal{C}_m)$, sauf un cas qu'on précisera, admettent la droite $(\mathcal{D}_m)$ d'équation $y=x+m$ comme asymptote oblique. Préciser l'autre asymptote.

**b)** Etudier la position relative des courbes $(\mathcal{C}_m)$ par rapport à la droite $(\mathcal{D}_m)$.

**c)** Montrer que le point d'intersection des asymptote est un centre de symétrie aux courbes $(\mathcal{C}_m)$.

**d)** Déterminer l'ensemble décrit par les différentes centres de symétrie lorsque $m$ décrit $\mathbb{R}$.

5° On donne $m\in\{-4;0;1\}$. Représenter dans le plan chacune des trois courbes.

**Partie B/** Soit la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto g(x) = f_1(-|x|)$$

1° Etudier la parité de $g$.
2° Déterminer le plus grand intervalle de $\mathbb{R}$, sur lequel $f_1$ et $g$ coïncident.
3° Tracer dans le même repère que précédemment, la courbe $(\mathscr{C}_g)$ de $g$ après expliquer comment l'obtenir.

## Exo-Blanc 10

1re D ♦ Épreuve proposée(Collège Protestant – Lomé

### EXERCICE 1

**ABCD** est un carré de côté $a$.

**1°a)** Construisez **G** le barycentre du système {(A, 2) ; (B,-1) ; (C, 1)}

**b)** Représentez l'ensemble ($E_1$) des points **M** du plan tels que:

$\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\| = a$

**2°** Déterminez et représentez l'ensemble ($E_2$) des points **M** tels que :

$AB^2 + MD^2 - 2MC^2 = 2a^2$

**3°a)** Déterminer les réels $\alpha$ ; $\beta$ et $\gamma$ pour que le point **A** soit le barycentre du système {(A, $\alpha$) ; (B, $\beta$) ; (C, $\gamma$)}.

**b)** Déterminez et représentez l'ensemble ($E_3$) des points **M** tels que:

$AB^2 - MC^2 + MD^2 = a^2$.

### EXERCICE 2

Soient les nombres strictement positifs $a$, $b$ et $c$ tels que $a+b+c = \pi$,

$\cos(a) = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ et $\sin(b)\cdot\sin(c)=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

**1°** Démontrez que $\cos\left(\frac{b+c}{2}\right) = \sin\left(\frac{a}{2}\right)$ puis $\tan\left(\frac{b+c}{2}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{a}{2}\right)}$

**2°** Calculez les valeurs exactes de : $\sin(b+c)$ ; $\cos(b+c)$ et $\tan(b+c)$.

**3°** Déduire de la question 2) la valeur exacte de : $\cos(b)\cdot\cos(c)$ et $\tan(b)\cdot\tan(c)$.

**4°** Déterminez $\tan(b)$ et $\tan(c)$ sachant que $C\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.





(Indication pour la question 4° $\tan(b+c)=\frac{\tan(c)+\tan(b)}{1-\tan(c)\cdot\tan(b)}$)

### PROBLEME

Soit la fonction $g$ de la variable réelle $x$, définie par : $g(x)=|x|-\frac{8}{|x|-2}$.

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $g$ dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité = 1 cm).

**1°** Déterminer l'ensemble de définition de $g$.

**2°** Déterminez les limites de $g$ aux bornes de cet ensemble.

**3°** Etudiez la dérivabilité de $g$ pour $x_0=0$.

Que déduisez vous pour la courbe $(\mathscr{C})$ ?

**4°** Démontrez que la courbe $(\mathscr{C})$ possède un axe de symétrie dont vous préciserez l'équation.

**5°** Etudiez les variations de $g$.

(*Dérivée, signe de la dérivée et tableau de variation*).

**6°a)** Démontrez que les droites $(\mathscr{D}_1)$ d'équation $y=x$ et $(\mathscr{D}_2)$ d'équation $y=-x$ sont des asymptotes à la courbe.

**b)** Précisez la position relative de $(\mathscr{C})$ par rapport à ses asymptote.

**c)** Déterminez les autres asymptotes à $(\mathscr{C})$.

**7°** Chercher les coordonnées des points d'intersection de $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses et donnez les équations des tangentes à $(\mathscr{C})$ en ces points.

**8°** Construise, dans le même repère, la courbe $(\mathscr{C})$, les droites $(\mathscr{D}_1)$ et $(\mathscr{D}_2)$ ainsi que les tangentes trouvées.

**9°** Soit la droite $(\Delta)$ d'équation $y=mx$ où $m$ est un paramètre réel.
Discutez graphiquement, suivant les valeurs de $m$, le nombre et le signe des solutions de l'équation $g(x)=mx$.

## Exo Blanc 11

1re D ♦ Épreuve proposée (Lycée BASSAR)

### EXERCICE 1

**1°a)** Résolvez dans $\mathbb{R}$, l'équation d'inconnue $x$, $2\cos(3x)-1=0$.

**b)** Déterminez les mesures principales des solutions.

**c)** Représentez les images des solutions sur un cercle trigonométrique.

**2°** Démontrez que pour tout $x$ réel, $\cos(3x)=4\cos^3(x)-3\cos(x)$

Déduisez-en l'expression de $2\cos(3x)-1$ en fonction de $\cos(x)$

**3°** Soit **P** le polynôme défini par : $P(x)=8x^3-6x-1$.

Démontrez que les zéros du polynôme **P** sont :

$$\cos\left(\frac{\pi}{9}\right);\ \cos\left(\frac{5\pi}{9}\right);\ \cos\left(\frac{7\pi}{9}\right).$$

Vous ne chercherez pas à calculer les zéros de **P**.

**4°a)** Factorisez $P(x)$.

**b)** Déduisez-en une nouvelle expression développée de $P(x)$.

**c)** Déduisez-en la valeur exacte de : $A=\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right)$

$$B=\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\times\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\times\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)\times\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right)$$

$$C=\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)\times\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right)\times\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right)$$

### EXERCICE 2

On donne dans le plan $(\mathcal{P})$ trois points **A**, **B** et **C** tels que **AB = AC = 5** et **BC = 6**.

Puis, on désigne par **G** le barycentre de **(A, 2)** ; **(B, 3)** et **(C, 3)**.

**1°** Construisez le point **G** et calculez la distance **GA**.

**2°** Calculez le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

**3°** On considère la fonction $f$ de $(\mathcal{P})$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout point **M** de $(\mathcal{P})$ associe





le réel : $f(M)=2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$.

Démontrez que l'on a pour tout point **M** de $(\mathcal{P})$, $f(M)=f(G)+4MG^2$.

**4°** Déterminez et construisez l'ensemble **(E)** des points **M** tels que : $f(M)=f(A)$

### PROBLEME

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

**1°** Soit la fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$$x\longmapsto f(x)=x(3-x)$$ et soit $(\mathcal{P})$ la représentation graphiquement de $f$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

**a)** Etudiez le sens de variation de $f$ puis dressez son tableau de variation.

**b)** Donnez une équation de la tangente à $(\mathcal{P})$ au point d' abscisse **0** et une équation de la tangente à $(\mathcal{P})$ au point d'abscisse 3.

**c)** Construisez $(\mathcal{P})$ et les tangentes précédentes.

**2°** Soit la fonction $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$$x\longmapsto g(x)=\frac{x^2-3x}{x-1}.$$

et soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de **g** dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

**a)** Montrez que $(\mathcal{C})$ admet deux asymptotes dont l'une a pour équation $y=x-2$

**b)** Etudiez le sens de variation de **g** puis dressez son tableau de variation.

**c)** Montrez que le point d'intersection **K** des deux asymptotes est centre de symétrie pour $(\mathcal{C})$.

**d)** Donnez une équation de la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse **0**, puis une équation de la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 3.

**e)** Construisez $(\mathcal{C})$ et les tangentes précédentes.

**3°** Soit la fonction $h:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$

$$x\longmapsto h(x)=\frac{x}{2(1-x)}\left[x^2-5x+6-|x^2-3x|\right]$$

**a)** Donnez l'ensemble de définition de $h$.

**b)** Résoudre l'équation $x\in\mathbb{R}$, $x^2-4x+3=0$,

et l'inéquation $x\in\mathbb{R}$, $x^2-3x\geq 0$

**c)** Exprimez $h(x)$ suivant les valeurs de $x$ sans utiliser le symbole de valeur absolue.

**d)** Sans autre calculs, en tenant compte des résultats qui précèdent et en utilisant une couleur différente de celles utilisées pour construire $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{C})$, représentez graphiquement $h$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

On note $(\mathscr{C}_h)$ la représentation graphique de $h$.

**2°** Resoudre graphiquement l'équation : $x\in\mathbb{R}$, $h(x)=m$ où $m$ est un paramètre réel.

## Ezo-Blanc 12

1re D ♦ Épreuve proposée(Collège NDA – Lomé

## EXERCICE 1

**Partie A** Soit $x$ et $y$ appartenant à l'intervalle $[0;\pi]$ tel que :

$$\sin x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \text{ et } \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**1°a)** Vérifier que $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

**b)** Calculer $\cos x$.

**c)** Calculer $\sin y$ puis donner la valeur de $y$.

**2°a)** Calculer $\cos(x+y)$, $\sin(x+y)$.

**b)** Calculer $\cos(x-y)$, $\sin(x-y)$. En déduire la valeur de $x$.

**Partie B**

Soit le système d'équation : $(x;y)\in]-\pi;\pi]^2$, $(\Sigma)$ : $\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{6} \\ \sin x\times\sin y = -\frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}$





**1°** Montrer que :

**a)** $\cos(x+y)-\cos(x-y) = -2\sin x\times\sin y$.

**b)** Le système $(\Sigma)$ est équivalent au système suivant :

$$(x;y)\in]-\pi;\pi]^2, \begin{cases} x+y = \frac{\pi}{6} \\ \cos(x-y) = 0 \end{cases}$$

**2°** Résoudre alors le système $(\Sigma)$.

## EXERCICE 2

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n+2}{U_n} \end{cases}$

**1°** Etudier et représenter la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{x+2}{x}$.

A l'aide de la droite $(\Delta)$ : $y=x$, représenter, sur l'axe $(Ox)$, les quatre premier termes de cette suite.

**2°** Pour quelles valeurs $U_0$ la suite U est-elle constante ?

**3°** On pose ; $V_n = \frac{U_n-2}{U_n+1}$

**a)** Montrer que la suite $V$ est géométrique.

Donner sa raison et son premier terme.

**b)** Exprimer $V_n$ en fonction de $n$.

En déduire la convergence des suites V et U.

**c)** On pose $S_n=V_0+V_1+V_2+\ldots+V_n$.

Exprimer $S_n$ en fonction de $n$ puis étudier la convergence de la suite $(S_n)$

## PROBLEME

On considère la fonction numérique $f$ de la variable réelle $x$ définie par : $f(x) = \frac{x^2-3x+6}{2x-2}$. On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $f$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J).

**Partie A**

**1°a)** Déterminer l'ensemble de définition $D_f$ de $f$.

**b)** Déterminer les réels $a$, $b$ et $c$ pour que : $\forall x \in D_f,\ f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$

**2°a)** Etudier les variations de $f$ (*dérivée, limites aux bornes de $D_f$, sens de variation et tableau de variation*).

**b)** Montrer que la courbe $(\mathscr{C})$ admet deux asymptotes dont une a pour équation : $y = \dfrac{1}{2}x - 1$.

**c)** Montrer que le point $I\left(1 ; -\dfrac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie pour $(\mathscr{C}')$.

**Partie B**

Soit la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ : $g(x) = \dfrac{3}{8}x^2 - \dfrac{3}{2}x - 3$.

On désigne par $(\mathscr{C}')$ la courbe représentative de $g$ dans le plan muni du repère $(O, I, J)$.

**1°** Montrer que $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ admettent une tangente commune au point d'abscisse $x=0$ et précisez son équation cartésienne.

**2°** Quelle est la nature de $(\mathscr{C}')$ ?

Dresser le tableau de variation de la fonction $g$.

**3°** Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ puis tracer $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ dans le même repère.

**Partie C** **1)** Soit $(D_m)$ la droite d'équation : $y = mx - 1$.

**a)** Montrer que toutes les droites $(D_m)$ passent par un point fixe K dont on précisera les coordonnées.

**b)** Discuter graphiquement suivant les valeurs de $m$, le nombre de points d'intersection de $(D_m)$ et $(\mathscr{C})$.

**2°** On pose $h(x) = \dfrac{x^2+3x+6}{2x+2}$. Vérifier que $h(x) = \dfrac{1}{2}x - 1 - \dfrac{2}{x+1}$ et





trouver une relation entre $h(x)$ et $f(x)$.

En déduire la construction de la courbe $(\mathscr{C}'')$ de h à partir de $(\mathscr{C})$ sur le même plan (NB : 3 couleurs différentes).

## Zéro-Blanc 13

1re D ♦ Épreuve proposée (Lycée de VOGAN – Préf. VO)

### EXERCICE 1

Soit $f$ la fonction définie par $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{1}{8}\cos(6x) + \frac{3}{8}\cos(4x) + \frac{3}{8}\cos(2x) + \frac{1}{8}$$

**1°a)** Exprimer $1 + \cos(6x)$ en fonction de $\cos(3x)$.

**b)** Transformer $\cos(4x) + \cos(2x)$ en un produit.

**c)** Exprimer $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$.

**d)** Déduire des questions précédentes que pour tout réel $x$ on a :

$f(x) = \cos(3x) \times \cos^3(x)$

**2°** Résoudre dans $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, l'équation (E): $f(x) = 0$.

En déduire, sans résoudre l'équation (E') : $x \in \left[\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = 0$ que le nombre de solutions de (E') est le double de celui de (E).

Préciser alors ces solutions.

### EXERCICE 2

On considère la suite U définie par : $\begin{cases} U_0 = 7 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n + 6}{5} \end{cases}$

**1°** Calculer $U_1$, $U_2$, $U_3$.

**2°** On considère de la suite $V$ définie pour tout entier naturel $n$ par $V_n = U_n - \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

**a)** Déterminer le réel $\alpha$ pour que $V$ soit une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer $V_n$ en fonction de $n$.

c) Quelle est la limite de la suite $(U_n)$ ? Conclure.

3° Calculer les sommes suivantes :

$S_n = V_0+V_1+V_2+\ldots+V_{n+1}$ et $S'_n = U_0+U_1+U_2+\ldots+U_{n+1}$

4° Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, I, J) (unité = 2 cm)

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{2x+6}{5}$.

a) Tracer la représentation graphique (D) de $f$, ainsi que la droite (Δ) d'équation $y=x$.

b) Déterminer graphiquement $U_1$, $U_2$ et $U_3$ en utilisant les droites (Δ) et (D).

c) A quoi correspond sur ce graphique, l'abscisse du point d'intersection des droites (Δ) et (D).

## PROBLEME

**Partie A** : On considère la fonction $f_a$ définie par $f_a(x) = \dfrac{2x^3+a^3}{2x^2}$, $a \in \mathbb{R}^*$

On désigne par $(\mathscr{C}_a)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé(O, I, J).

1° Etudier suivant les valeurs de $a$ les variations de $f_a$.

2°a) Montrer pour tout $a \neq 0$, $(\mathscr{C}_a)$ possède une asymptote oblique (Δ) dont on donnera une équation.

b) Etudier suivant les valeurs de $a$, la position relative de $(\mathscr{C}_a)$ et de (Δ)

3° Montrer que pour $a \neq 0$, on a : $f_{-a}(x)+f_a(-x) = 0$.

4° En déduire la transformation qui permet d'obtenir $(\mathscr{C}_{-a})$ à partir de $(\mathscr{C}_a)$

5° Construire $(\mathscr{C}_{-1})$ et $(\mathscr{C}_1)$.

6° Montrer qu'il existe une homothétie $h$ de centre O et de rapport $k$ transformant $(\mathscr{C}_1)$ en $(\mathscr{C}_a)$. Déterminer $k$ en fonction de $a$ :

7° Construire $(\mathscr{C}_2)$ à partir de $(\mathscr{C}_1)$ dans le même repère que précédemment.

8° Déterminer l'ensemble des points des courbes $(\mathscr{C}_a)$ où $(\mathscr{C}_a)$ admet une





tangente de vecteur directeur $\vec{i}$ quand $a$ décrit $\mathbb{R}^*$

**Partie B** : On considère la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{x^3-2x^2+4}{x^2}$.

1° Trouver une relation entre $f_a(x)$ et $h(x)$.

2° Comment passe-t-on de $(\mathscr{C}_a)$ à la courbe (Γ) de $h$ ? Construire (Γ).

3° Soit l'équation (E) : $x \in \mathbb{R}$, $x^3-(2+m)x^2+4 = 0$.

Déterminer graphiquement le nombre et le signe des solutions de (E) suivant les valeurs de $m$.

**Partie C** : Soit $g$ la fonction telle que : $g(x) = \dfrac{2x^2-|x|+1}{2x^2}$.

Comment passe-t-on de $(\mathscr{C}_1)$ à $(\mathscr{C}_g)$.

(La courbe $(\mathscr{C}_g)$ étant la représentation graphique de la fonction g ).

## Exo-Blanc 14

1re D ♦ Épreuve proposée (Lycée de TOKOIN 1– Lomé)

## EXERCICE 1

Dans un plan P, on donne un triangle équilatéral ABC tel que : AB = BC = CA = 1.

Soit A' le milieu du segment [BC].

1° Montrer que le milieu G du segment [AA'] est le barycentre des points A, B, C affectés respectivement des coefficients 2 ; 1 ; 1.

2° Soit $f$ l'application de P dans P qui à tout point M, on associe le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$.

a) Comparer $\overrightarrow{GM}$ et $\overrightarrow{GM'}$.

b) En déduire la nature de $f$ et préciser ses éléments caractéristiques.

3° Calculer $2GA^2 + GB^2 + GC^2$.

4° Trouver l'ensemble de points N de P tel que : $2NA^2 + NB^2 + NC^2 = 2$.

## EXERCICE 2

1° Soit $(U_n)$ la suite définie dans $\mathbb{N}$ par :

$U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{1-U_n}$ pour $n \geq 0$.

a) Démontrer que pour tout entier naturel $n$ non nul : $U_n < 0$.

b) Soit $(V_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \dfrac{1+U_n}{U_n}$.

Démontrer que V est une suite arithmétique dont on précisera la raison.

c) Déterminer $V_n$ et $U_n$ en fonction de $n$.

2° Soit W la suite définie par $W_0 = 2$ et $W_{n+1} = 1 - \frac{1}{2}W_n$ pour $n \geq 0$.

a) Déterminer un réel $\alpha$ tel que la suite $(T_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par : $T_n = W_n + \alpha$ soit une suite géométrique dont on précisera la raison.

b) Calculer $W_n$ en fonction de $n$.

c) Calculer, en fonction de $n$, S et P définis par :

$$S = T_0 + T_1 + \ldots + T_n \; ; \; P = T_0 \times T_1 \times T_2 \times \ldots T_n .$$

## PROBLEME

**Partie A** : On considère la fonction $f$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+x-6}$ ; $D_f$ est son domaine de définition et $(\mathscr{C})$ est sa courbe représentative dans un repère (O, I, J) ; unité : 3 cm.

1° Etudier les variations de $f$.

2° Déterminer les points d'intersection de la courbe avec les axes du repère.

3° Donner une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses.

4° Etudier la position relative de la courbe et de (T).

5° Tracer $(\mathscr{C})$ et (T).

6° Soit $(D_m)$ la droite d'équation $y = mx - m$ où $m$ est un paramètre réel.

a) Démontrer que les droites $(D_m)$ passent par un point fixe dont on précisera les coordonnées.

b) Discutez suivant les valeurs du paramètre $m$ le nombre de points d'intersection de $(\mathscr{C})$ et $(D_m)$.

**Partie B** : g est la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = \dfrac{|x-1|}{x^2+x-6}$,





$(D_g)$ est son ensemble de définition et $(\mathscr{C}_g)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J), unité : 3 cm.

1° Déterminer $D_g$.

2° Etudier la continuité de g au point 1.

3° Etudier la dérivabilité de g au point d'abscisse 1, puis en déduire la conséquence graphique.

4° Montrer que g coïncident avec $f$ sur un ensemble que l'on précisera

5° Comment peut-on construire $(\mathscr{C}_g)$ sans étudier g ?

6° Construire la courbe $(\mathscr{C}_g)$ dans un autre repère

**Partie C**: On considère la fonction $h$ définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \dfrac{|x|-1}{x^2+|x|-6}$. On nomme $D_h$ son domaine de définition et $(\mathscr{C}_h)$ sa courbe représentative dans un repère (O, I, J), unité : 3 cm.

1° Déterminer $D_h$.

2° Montrer que $h$ est paire et en déduire la conséquence graphique.

3° Montrer que $h$ coïncide avec $f$ sur un ensemble que l'on précisera.

4° Tracer la courbe $(\mathscr{C}_h)$ dans un autre repère que celui de $(\mathscr{C})$ et celui de $(\mathscr{C}_g)$.

## Exo-Blanc 15

1re D ♦ Épreuve proposée (Lycée de TABLIGBO– Yoto)

## EXERCICE 1

Soit ABC un triangle tel que AB = AC = 5 et BC = 6. On désigne par A' est le milieu du segment [BC] et G est le point défini par : $8\overrightarrow{AG} = 6\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$

1°a) Démontrer que G est le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients que l'on précisera.

b) En déduire que G appartient à la médiatrice du segment [BC].

c) Démontrer que : $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AA'}$.

2° On considère la fonction $f$ du plan P vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(M) = \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}.$$

a) Démontrer que pour tout point M du plan P, $f(M) = 4MG^2+f(G)$.

b) Calculer numériquement : $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ et $f(G)$.

3° Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan P tel que : $f(M) = 32$.

## EXERCICE 2

On donne $x\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ et $\sin x = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

1°a) En déduire que $x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right[$ et que $\cos^2 x = \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2$.

b) Vérifier que $\sin(2x) = -\frac{1}{2}$.

c) Résoudre dans $x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right[$, $\sin(2x) = -\frac{1}{2}$.

d) Calculer $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$.

e) Déterminer la valeur exacte de $x$.

2° Soit $x$ et $y$ deux nombres réels quelconques.

a) Factoriser : $\cos(x+y)+\cos(x-y)$.

b) Résoudre le système d'équation (S) suivant dans $[0;2\pi[$ : $\begin{cases} x+y = \frac{2\pi}{3} \\ \sin x\cdot\sin y = \frac{1}{4} \end{cases}$

## PROBLEME

**Partie A** : Soit $g$ la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{x^2+a|x|+b}{x-1}$, $a$ et $b$ étant des réels, $(\mathscr{C}')$ est la représentation





graphique de g dans un plan rapporté au repère orthonormé (O, I, J).
Déterminer les réels $a$ et $b$ sachant que la courbe $(\mathscr{C}')$ coupe l'axe des abscisses au point 2 et qu'en ce point la tangente à la courbe $(\mathscr{C}')$ est parallèle à la droite d' équation : $y-2x=0$.

**Partie B** : Soit $f$ la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x^2-2|x|}{x-1}$ et soit $(\mathscr{C})$ sa représentation graphique dans le repère (O, I, J).

1° Déterminer l'ensemble de définition D de $f$ puis exprimer $f(x)$ sans le symbole de valeur absolue. Déterminer les limites de f aux bornes de D.

2° Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f au point $x=0$.

3° Etudier les variations de $f$.

4° Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $(\mathscr{C})$ avec l'axe des abscisses.
Donner une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 2.

5° Montrer la droite d'équation $y=x-1$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

6°a) Trouver les réels $a$, $b$ et $c$ tels que pour tout $x<0$, l'on ait $f(x) = ax+b+\frac{c}{x-1}$.

b) En déduire que la courbe $(\mathscr{C})$ admet une asymptote oblique (D) lorsque $x$ tend vers $-\infty$.

7° Etudier la position relative de la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite (D).

8° Tracer la courbe $(\mathscr{C})$, ses asymptotes obliques, la droite (T) et les demi-tangentes à la courbe $(\mathscr{C})$ au point $x=0$ dans le repère (O, I, J), unité : 2 cm.

9° Soit $(D_m)$ la droite d'équation $y=x+m$, $m$ étant un réel.

a) Montrer les abscisses des points d'intersection de la droite $(\mathscr{C})$ et de la droite $(D_m)$ sont les solutions de l'équation (E) : $x\in\mathbb{R}-\{1\}$, $2|x|+(m-1)x-m=0$.

**b)** Déterminer graphiquement le nombre et le signe des solutions de l'équation (E), lorsque $m$ décrit $\mathbb{R}$.

## Exo-Blanc 16

1re D ♦ Épreuve proposée (Lycée de Zomayi – KLOTO)

## EXERCICE 1

On considère dans un plan, un triangle ABC rectangle en A tel que AB = 6 et AC = 3. On désigne par I le milieu de [BC].

1° Construire le barycentre G des points pondérés (A ; 1) ; (B ; 1) ; (C ; -1)

2° Déterminer et construire l'ensemble ($E_1$) des points M du plan tels que :

$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right\|$.

3° Déterminer et construire l'ensemble ($E_2$) des points M du plan tels que :

$\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right)\cdot\left(2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right) = 0$.

4° On désigne par H le point du plan tel que : $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

Démontrer que H est le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients que l'on précisera.

5° On considère l'ensemble des points M du plan tels que :

$-3MA^2 + MB^2 + 4MC^2 = k$.

**a)** Pour quelle valeur du nombre réel $k$, cet ensemble contient-il le point A ?

**b)** Pour cette valeur de $k$, préciser l'ensemble obtenu, noté ($E_3$) et le construire.

## EXERCICE 2

**Partie A**

1° Calculer $\cos 3x$ en fonction de $\cos x$, $x$ étant un réel.

2° En déduire la valeur exacte de $A = -4\cos^3\left(\frac{\pi}{18}\right) + 3\cos\left(\frac{\pi}{18}\right)$.

3° On considère l'équation trigonométrique suivante :

$$(E) : x\in]-\pi;\pi],\ 4\cos^3 x - 3\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$





**a)** Résoudre (E) et placer les points images sur le cercle trigonométrique.

**b)** En déduire les solutions de l'équation : (E') : $x\in\mathbb{R}$, $4x^3-3x+\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

**Partie B**

1° Soient $a$ et $b$ deux nombres réels tels que

$a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $b\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ ; $(a+b)\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $(a-b)\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$.

* Etablir les relations suivantes :

**a)** $\tan(a+b) = \frac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$ **b)** $\tan(a-b) = \frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$

2°**a)** Exprimer $\tan\frac{\pi}{4}$ en fonction de $\tan\frac{\pi}{8}$ et déduire que $\tan\frac{\pi}{8}$ est la solution positive de l'équation : $x^2+2x-1 = 0$.

**b)** En déduire la valeur exacte de $\tan\frac{\pi}{8}$.

## PROBLEME

On considère la fonction $f$ et g définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3+3x^2+10x+11}{(x+1)^2} \text{ et } g(x) = x^3+3x^2-4x-12$$

**Partie A**

1° Etudier les variations de g.

2° Calculer $g(2)$. En déduire une écriture de $g(x)$ sous la forme d'un produit de polynômes de premier degré.

3° Construire la courbe représentative ($\mathcal{C}_g$) de g dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

4° Déterminer l'image réciproque par g de $\{-12\}$ et $\{-6\}$.

En déduire graphiquement l'image réciproque de $[-12;-6]$ par g.

**Partie B**

1° Déterminer $D_f$ l'ensemble de définition de $f$.

2° Déterminer les réels $a$, $b$, $c$ et $d$ tels que pour tout $x$ élément de $D_f$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}$.

3° Soit (D) la droite d'équation $y = x + 1$ et (𝒞) la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé (O, I, J).

On désigne par **M** un point de (𝒞) d'abscisse $x$ et par **N** un point de (D) de même abscisse.

**a)** Ecrire en fonction de $x$ la mesure algébrique $\overline{NM}$.

Déterminer $\lim \overline{NM}$ quand $x$ tend vers $+\infty$ et $\lim \overline{NM}$ quand $x$ tend vers $-\infty$. Qu'en déduire pour la courbe (𝒞) et la droite (D) ?

**b)** Etudier suivant les valeurs de $x$, le signe de $\overline{NM}$ et en déduire la position relative de la droite (𝒞) par rapport à (D).

4° Montrer que la fonction dérivée $f'$ est définie par : $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}$ pour $x \in D_f$.

5° Tracer la courbe (𝒞) dans le repère précédent.

6° On considère la fonction $h(x) = f(-|x|)$ et on désigne par (C') sa courbe représentative dans le repère orthonormal (O, I, J).

**a)** Déterminer l'ensemble de définition de $h$.

**b)** Etudier la parité de $h$.

**c)** Expliquer comment passer de la courbe (𝒞) à la courbe (C').

**d)** Construire la courbe (C') dans le même repère.

7° Résoudre graphiquement suivant les valeurs de $m$, le nombre de solutions de l'équation : $h(x) = m$.





## Ɛzo-Blanc 17

1re D ♦ Épreuve proposée (Lycée d'Agbélouvé- ZIO)

## EXERCICE 1

1° $x$ et $y$ étant deux nombres réels quelconques, factoriser : $\cos(x+y)$ et $\cos(x-y)$.

2° Résoudre le système suivant : (S) : $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{4} \\ \cos x \times \cos y = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 < y < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

3° Résoudre le système suivant : (S') $\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{q} = -3 \\ (3a-1)(3q-1) = \frac{5}{14} \end{cases}$

$(a\,;q) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$

4° On considère les suites numériques $(U_n)$ et $(V_n)$ telles que :

$(U_n)$ soit arithmétique de premier terme $U_0 = \frac{3\pi}{8}$ et de raison $r = -\frac{1}{7}$

$(V_n)$ soit géométrique de premier terme $V_1 = \frac{\pi}{8}$ et de raison $q = \frac{1}{4}$.

**a)** Exprimer $U_n$ et $V_n$ en fonction de $n$.

**b)** On pose : $S_n = (U_0+V_1)+(U_1+V_2)+(U_2+V_3)+\ldots+(U_{n-1}+V_n)$ pour tout entier naturel $n$ ? Exprimer $S_n$ en fonction de $n$.

## EXERCICE 2

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et $\Omega$ un point donné ; $h(\Omega\,;-2)$ est l'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $-2$ ; On appelle T la translation de vecteur $\vec{u}$.

1° Construire l'image $\Omega'$ de $\Omega$ par l'application $f = T \circ h$.

2° Montrer que $f$ est une homothétie dont on précisera le centre I et le rapport $k$.

3) Dans le plan rapporté au repère orthonormé (O, I, J) on considère le point $\Omega(-1;0)$ ; et le vecteur $\vec{u}(2;1)$.

a) Déterminer les coordonnées de $\Omega'$ et de I.

b) Donner l'expression analytique de l'application $f$.

c) Soit D la droite d'équation $x+2y-5=0$.

Donner l'équation de l'image (D') de (D) par $f$.

4) Soit $M(x;y)$ et $M'(x';y')$ tels que $f(M)=M'$.

Quel est l'ensemble décrit par M' si M décrit le cercle trigonométrique?

Préciser son équation canonique et son équation cartésienne.

## PROBLEME

**Partie A** : Soit g la fonction définie IR vers IR par : $g_a(x)=\dfrac{x^2-ax}{x+1}$

$a$ étant un paramètre réel et $(\mathscr{C}_a)$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O, I, J).

1° Montrer que toutes les courbes $(\mathscr{C}_a)$ passent par un point commun A dont on déterminera les coordonnées.

2° Déterminer l'équation de la tangente $(T_a)$ au point A à la courbe $(\mathscr{C}_a)$.

3° Soient P et Q deux points du plan ayant même abscisse $x$ appartenant respectivement à $(\mathscr{C}_a)$ et $(\mathscr{C}_{2a})$.

a) Calculer $\overline{PQ}$ en fonction de $x$.

b) Etudier le signe de $\overline{PQ}$ suivant les valeurs de $x$.

c) En déduire la position relative de $(\mathscr{C}_a)$ par rapport à $(\mathscr{C}_{2a})$.

4° Déterminer $a$ pour que $(\mathscr{C}_a)$ admette au point d'abscisse $x_0=1$ une tangente parallèle à la droite d'équation $-x+4y+3=0$.

**Partie B** On prend $a=2$.

1° Etudier les variations de $g_2$.

2°a) Montrer que $(\mathscr{C}_2)$ admet deux asymptotes de symétrie dont on donnera les coordonnées.

b) Montrer que $(\mathscr{C}_2)$ admet deux asymptotes dont on précisera les équations.





c) Montrer que $(\mathscr{C}_2)$ possède un centre de symétrie dont on donnera les coordonnées.

d) Construire la courbe $(\mathscr{C}_2)$ et ses asymptotes.

3° Discuter graphiquement suivant les valeurs de m, le nombre et le signe des solutions de l'équation : $x^2-(m+2)x-m=0$

4° Soit la fonction définie de IR vers IR par : $f(x)=-x-3+\dfrac{3}{1-x}$

a) Par quelle transformation géométrique peut-on obtenir la courbe (Γ) représentative de $f$ à partir de $(\mathscr{C}_2)$ ?

b) Construire la courbe (Γ).

*Fin des épreuves*

*Nous vous supplions, Seigneur Jésus Christ, le maître des temps et des circonstances, à présent, viens prendre contrôle de tout !!! « Envoie à ces candidat(e)s ta lumière et ta fidélité. » Ps: 43 v 3*

*Que cette annale vous apporte le Succès que vous espérez tant.*



*Jamais le B.A.C-1 ne s'est bien préparé.*

(Si tu arrives ici, alors tu es capable d'aller encore plus loin, saches-le ....)

---

« Faites tout pour la gloire de Dieu » 1Co.10:31

*Fin du Livre*

Écoute ton Cœur !!

# KIT du BAC-1

## Toutes les vitamines du succès au BAC-1 !!

**Annales MATHS au BAC-1 série : D**

**Annales PHYSIQUE CHIMIE au BAC-1 D**

**Annales MATHS au BAC-1 Série : C4-E**

**Annales SVT au BAC-1 série : D**

**Annales FRANCAIS au BAC-1 A,C,D,E,G**

**Annales PHILO au BAC-2 A,C,D,E,G**

*Les* **Édition Bénies du Togo E.B.T**

*Une édition scolaire de qualité qui vous accompagne du primaire à la Terminale...*

*"L'éducation est la clé du développement d'une nation. C'est notre manière de contribuer au développement du pays"*

*Les Flammes du Succès*

**Pour réussir son BEPC, et Bac1&2 plus de panique cette année !!**

*Faites le plein de* Vitamines *avec les*

KIT DU BEPC & BAC

Annales de MATHEMATIQUES, de la PHYSIQUE & CHIMIE, de l'HISTOIRE & GEO, de la SVT, du FRANCAIS, de l'ANGLAIS, TOUT pour avoir du TONUS et une SANTE DE FER

Contactez-nous aux numéros 90289916 / 90575048 / 98489922

Imprimé à Lomé sur les presses de l'Imprimerie EDITOGO (Lomé)
Copyright © 2018, Les Éditions Bénies du TOGO®
**Annales KIT du BAC-1–MATHEMATIQUES–Premières : D**
ISBN : 979-10-91770-29-3 N° édition : 1109-2018-30
Dépot légal : 3e Trimestre 2018
*Collection Flammes du Succès* - Collection : 30
01 BP: 12105 Lomé (Togo)