

Exercice 1 : 4.25pts

Un jardinier amateur tond sa pelouse tous les samedis. Il recueille à chaque fois 120 litres de gazon coupé, qu'il stocke dans un bac à compost.

Chaque semaine, le gazon stocké dans le bac perd par décomposition ou prélèvement les $\frac{3}{4}$ de son volume. On note V_1 le volume en litre de gazon dans le bac à compost après la première tonte.

$V_1 = 120$ et V_n le volume en litre de gazon coupé présent dans le bac au bout de n semaines.

1. Calcule les volumes V_2 et V_3 de matière présente dans le bac à compost au bout de 2 et 3 semaines. 0,75pt

2. Justifie par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_{n+1} = \frac{1}{4}V_n + 120$. 0,5pt

3. La suite V est-elle arithmétique ou géométrique ? Justifie ta réponse. 0,5pt

4. On pose pour tout $n \geq 1$, $U_n = 160 - V_n$. Démontre que U est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$. Précise son terme initial U_1 . 1pt

5.1. Exprime U_n et V_n en fonction de n . 1pt

5.2. Calcule le volume total de gazon qui sera décomposé ou aura été utilisé au bout de 10 semaines. 0,5pt

Exercice 2 : 4pts

Soit $M(x, y)$ un point du plan et (E) l'ensemble des points du plan tels que $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 8 = 0$

1. Montre que (E) est un cercle de centre Ω et de rayon r . 0,75pt

2.1. Détermine par calcul l'intersection de (E) et de la droite (D) d'équation $y = 5x - 6$. 1pt

2.2. Représente (E) et (D) et vérifie les résultats. 0,75pt

3. Vérifie que l'inéquation $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 8 > 0$ est équivalente à $\Omega M > r$. 0,5pt

4. Quel est l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan vérifiant $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 8 > 0$. 0,5pt

5. Hachure la région du plan où les coordonnées des points vérifient le système : 0,5pt

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y - 8 > 0 \\ 5x - y - 6 < 0 \end{cases}$$

TSVP

PROBLEME : 11,75pts

Partie A

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax + b + \frac{2}{2x-1}$ où a et b sont des réels.

Détermine les réels a et b sachant que la courbe représentative C_f passe par le point $A(1; 5)$ et la tangente à C_f en A a pour coefficient directeur -3 . 1.5pts

Partie B

On considère la fonction g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{2x^2+3x}{2x-1}$ et C_g sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1.1. Détermine la condition d'existence D_g de g . 0,25pt

1.2. Calcule les limites de g aux bornes de D_g . 1pt

2.1. Calcule la dérivée g' de g et montre qu'elle peut s'écrire sous la forme :
 $\forall x \in D_g, g'(x) = \frac{(2x-3)(2x+1)}{(2x-1)^2}$. 1 pt

2.2. Etudie le sens de variation de g et dresse son tableau de variation. 1,5pt

3.1. Montre que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est une asymptote à la courbe (C_g) . 0,5pt

3.2. Etudie la position relative de (C_g) et (D) . 0,5pt

3.3. Détermine l'autre asymptote à (C_g) . 0,5pt

3.4. Montre que le point d'intersection I de ces asymptotes est un centre de symétrie à (C_g) . 0,5pt

4. Détermine les points d'intersection de la courbe (C_g) avec l'axe $(o, \vec{i})$. 0,5pt

5. Construis (C_g) et ses asymptotes dans le repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité : 1cm). 1pt

6. Utilise la courbe (C_g) pour déterminer le nombre et le signe des solutions de l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, 2x^2 + (3 - 2k)x + k = 0 \text{ où } k \text{ est un paramètre réel. 1pt}$$

Partie C

On considère la fonction h de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $h(x) = \frac{3/x - 2x^2}{2/x - 1}$

1. Etudie la parité de h . 0,5pt

2. Montre que les fonctions g et h coïncident sur l'intervalle $] -\infty; 0]$. 0,5pt

3. Comment obtient-on la courbe représentative (C_h) de h à partir de (C_g) . 0,5pt

4. Construis dans le même repère que (C_g) , la courbe (C_h) . 0,5pt