

Composition de la première période :

Epreuve : Mathématiques

Exercice 1 : 5 points

I) On considère les polynôme p et q définies par

$$p(x) = x^3 - 14x + 8 \text{ et } q(x) = x^4 - 13x^2 + 36.$$

- 1) Calculer $p(-4)$; $q(2)$ et $q(3)$.
- 2) Factoriser p et q ; puis étudier leur signe.
- 3) en déduire le domaine de définition des fonctions

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \sqrt{x^3 - 14x + 8} \quad \text{et} \quad x \mapsto g(x) = \frac{x+1}{x^4 - 13x^2 + 36}.$$

II) On considère les fonctions f et g définies par :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \sqrt{x+2} \quad \text{et} \quad x \mapsto g(x) = \frac{2x+1}{x-3}$$

- 1) Calculer $D_{g \circ f}$ et $g \circ f(x)$.
- 2) Déterminer $f \circ g^{-1}(\{2; 3; 4\})$ et $f([-\infty; 2])$.

Exercice 2 : 5 points

I) Soit f la fonction définie par :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$$

- 1) Montrer que f n'est ni injective, ni surjective.
- 2) Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$, et g l'application :

$$g: A \rightarrow B$$

$$x \mapsto g(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$$

Déterminer A et B pour que g soit bijective.

II) Soit la fonction polynôme h définie par

$$h(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 3x + 3.$$

Après avoir calculé $h(\sqrt{3})$ et $-\sqrt{3}$, écrire $h(x)$ comme produit de quatre fonctions polynômes.

Problème : 10 points

I) On considère l'équation

$$(E): x^2 - (3k+1)x - 8 = 0;$$

où x est l'inconnue et k une constante réelle.

- 1) Justifier que; pour tout $k \in \mathbb{R}$, (E) admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 .
- 2) Déterminer k pour que $x_1^2 + x_2^2 = 20$.
- 3) Calculer $x_1^3 + x_2^3$ pour $k = -4$.

II) On donne

$$A(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 + 3x - 10}$$

-
- 1) Déterminer le domaine de définition de A .
 - 2) Simplifier $A(x)$ sur son domaine de définition.
 - 3) Etudier le signe de A .
 - 4) Déterminer les nombres réels a , b et c tels que pour tout $x \in D_A$,

$$A(x) = ax + b + \frac{c}{x+5}.$$

96