

Tous les exercices sont obligatoires, la précision et la clarté sont de rigueur.

Exercice 1 : 05 pts

Un polynôme P est défini par : $P(x) = 6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6$.

1. Précise le degré de P . Calcule $P(0)$ puis conclus.
2. Démontre que si α est une racine non nulle de P , alors il en est de même pour $\frac{1}{\alpha}$.
3. Démontre que : $\forall x \neq 0 ; P(x) = x^2 \left[6 \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 35 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 50 \right]$
4. On se propose de déterminer les racines du polynôme P .
 - a. Résous dans $\mathbb{R}$ l'équation : $6u^2 - 35u + 50 = 0$
 - b. Déduis-en le plus rapidement possible toutes les racines du polynôme P .

Exercice 2 : 03 pts

On considère les applications définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = |3 - x| + |2 - x| + 2x \text{ et } h(x) = 2x + 1.$$

1. Ecris $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
2. Prouve que l'application h est une restriction de f sur un intervalle I que l'on précisera.
3. Soit l'application g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = |x - 1| + 2|3 - x|$.
Détermine l'application affine k qui a même restriction que f sur un intervalle $[1; 3]$.

Exercice 3 : 04 pts

On donne l'application $g :]-\infty; 2] \rightarrow J$

$$x \mapsto \sqrt{4 - 2x}$$

1. Montre que l'application g est injective.
2. Trouve le sous-ensemble J de $\mathbb{R}$ pour que g soit surjective.
3. Montre que l'application g est bijective de l'intervalle $]-\infty; 2]$ vers l'intervalle $[0; +\infty[$.
4. Détermine l'application réciproque g^{-1} .

Problème : 08 pts

Soit la fonction polynôme f_m définie par : $f_m(x) = (m + 1)x^2 + (2m - 1)x + m - 1$,
où m est un paramètre réel.

1. Pour quelle valeur de m $f_m(x)$ est-il un polynôme du premier degré ?
Calcule sa racine.
2. Détermine m pour que 1 soit racine de f_m . Déterminer l'autre racine.
3. On pose dans cette partie $m = 1$
 - a. Détermine par f_1 l'image réciproque de chacun des ensembles suivants :
 $E = \{0\}$ $F =]-\infty; 3[$
 - b. Mets $f_1(x)$ sous forme canonique et déduis-en l'image directe de l'intervalle $[-\frac{1}{4}, +\infty[$ par f_1 .
4. Détermine l'ensemble des valeurs de m pour que le polynôme f_m possède :
 - a. une double racine;

« Les batailles de la vie ne sont pas gagnés par les plus forts, ni par les plus rapides, mais par ceux qui n'abandonnent jamais ». Bonne Chance !!!

b : deux racines de signes contraires.

5. On pose dans cette partie $m = 0$.

a. Résoudre l'équation $f_0(x) = 0$

b. On pose $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

On considère un rectangle de côté 1 et x ($x > 1$).

on appelle rectangle d'or, un rectangle dont les dimensions vérifient la relation

$$\frac{\text{longueur}}{\text{largeur}} = \frac{\text{Demi-périmètre}}{\text{longueur}}.$$

Etablis une équation du second degré dont x est solution ;

c. Déduis-en que $x = \alpha$

d. Démontre que : $\beta = 1 - \alpha$ et $\beta = -\frac{1}{\alpha}$; $\alpha^2 = 1 + \alpha$; $\alpha^3 = 1 + 2\alpha$;

$$\alpha^4 = 2 + 3\alpha \text{ et } \frac{1}{\alpha} = \alpha - 1$$