

Composition de : Mathématiques	Classe : 11^{ème} S	Durée : 3H
---------------------------------------	------------------------------------	-------------------

Exercice 1 : On considère le polynôme P défini par : $P(x) = x^3 + \frac{x^2\sqrt{2}}{2} - \frac{x}{4} - \frac{\sqrt{2}}{8}$

1. Calcule $P(\frac{1}{2})$: que dire alors de $(\frac{1}{2})$ pour P ?
2. A l'aide du tableau d'Höner, détermine les réels a, b et c tels que $P(x) = (x - \frac{1}{2})(ax^2 + bx + c)$.
3. Résous l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ en donnant la valeur exacte de chaque solution sachant que a, b et c viennent d'être déterminés en a .
 On rappelle que : $(\frac{\sqrt{2}-1}{2})^2 = \frac{2-2\sqrt{2}+1}{4} = \frac{3-2\sqrt{2}}{4}$
4. Dresse le tableau de signe de $P(x)$.

Exercice 2 :

Partie A

1. Vrai ou Faux. Justifie la réponse.
 Les fonctions considérées sont définies sur $\mathbb{R}$
 - a) $A(x) = x^3 - 2x^2 + x^4 - 1$ est un polynôme de degré 3.
 - b) $B(x) = (2x^3 - x)^2 - 4x^5$ est un polynôme de degré 6.
 - c) $C(x) = \frac{x^4-1}{x^2+1}$ n'est pas une fonction polynôme.
 - d) $D(x) = \frac{x}{x^2+1}$ n'est pas une fonction polynôme.
 - e) $E(x) = (3x - 7)^3 - 27x^3$ est un polynôme de degré 3.
2. Vrai ou Faux. Justifier la réponse.
 - a) 2 est une racine du polynôme $x^2 - 3x + 2$.
 - b) Le polynôme $x^2 + 1$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$.
 - c) Le polynôme $x^3 + 1$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$.
 - d) 1 est racine du polynôme $-4x^3 + 8x^2 - 5x + 1$.
 - e) Si la somme des coefficients d'un polynôme P est nulle, alors 1 est racine de P .

Partie B

Soit $f: [3; +\infty[\rightarrow [0; +\infty[$

$$x \mapsto x^2 - 4x + 3$$

1. Détermine l'ensemble de définition de f
2. Détermine deux réels α et β tels que $f(x) = (x - \alpha)^2 - \beta$
3. Utilise ce résultat de la deuxième question pour montrer que si $x \in [3; +\infty[$ alors $f(x) \in [0; +\infty[$.
 Que peut-on alors dire de f
4. Soit $y \in [0; +\infty[$

- a) Quel est le nombre de solution dans $[3; +\infty[$ de $f(x) = y$
- b) f est-elle : injective ? bijective ?

Problème : Soit la fonction polynôme définie par : $f_m(x) = (m + 1)x^2 + (2m - 1)x + m - 1$;
 $m \in \mathbb{R}$.

1. Pour quelle valeur de m $f_m(x)$ est-il un polynôme du 1^{er} degré ? Calcule sa racine.
2. Détermine m pour que 1 soit racine de f_m . Détermine l'autre racine.
3. On pose dans cette partie $m = 1$
 - a) Détermine par f_1 l'image réciproque de chacun des ensembles suivants : $E = \{0\}$; $F =]-\infty; 3[$.
 - b) Mettre $f_1(x)$ sous forme canonique et en déduire l'image directe de l'intervalle $[-\frac{1}{4}; +\infty[$ par f_1
4. Détermine l'ensemble des valeurs de m pour que le polynôme f_m possède :
 - a) Une double racine ;
 - b) Deux racines de signes contraires.
5. Résous l'équation $f_0(x) = 0$