

Composition de la 1 ^{ère} période 2024-2025		
Série: 11 ^{ème} Sciences.		
Épreuve de: Mathématiques.	Durée: 3h.	Coeff: 4.

Questions de cours : -----(4points)

- 1) Qu'appelle-t-on application ? (0,75pt)
- 2) Quant dit-on qu'une application f est une bijection ? (0,75pt)
- 3) 3) soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F . Qu'appelle-t-on restriction de f à $E' \subset E$? (0,75pt)
- 4) Soit f une application de E dans F . Qu'appelle-t-on image directe d'un sous-ensemble A de E par f ? (0,75pt)
- 5) Soit f un trinôme du second degré tel que $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Factorise f . (1pt)

Exercice : -----(5points)

I) 1) Montre que pour tout $x \in \mathbb{R} : \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$. (0,5pt)

2) Vérifie l'égalité : $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$. (0,5pt)

3) Trouve un nombre entier naturel N de deux chiffres tel que la somme des chiffres soit 14 et le produit de N par le nombre N' obtenu en inversant l'ordre des chiffres soit 5605. (1,5pt)

4) Soit la fonction $g(x) = \frac{-x^2 - 3x + 2}{x^2 + x}$.

a) Détermine Dg de g . (0,5pt)

b) Détermine des réels a ; b et c tels $g(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}$. (1pt)

II) On donne les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = \frac{|x^2 - 2x - 3|}{x+1} \text{ et } g(x) = x - 3.$$

Démontre que f est un prolongement de g sur un intervalle I que l'on précisera. (1pt)

Problème : -----(11points)

Les parties *I* et *II* sont indépendantes.

Partie I :

Soit le polynôme $f(x) = x^5 - 7x^4 + 19x^3 - 25x^2 + 16x - 4$.

- 1) Calcule $f(-1)$; $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$. (1pt)
- 2) Soit la fonction polynôme q telle que : $f(x) = (x^2 - 3x + 2)q(x)$.
Précise le degré de q sans calculer $q(x)$. Détermine $q(x)$. (1pt)
- 3) Vérifie que $q(1) = q(2) = 0$. Trouve le quotient de $q(x)$ par $(x^2 - 3x + 2)$. (1pt)
- 4) En déduis une factorisation de $f(x)$ sous forme de produit de facteurs du premier degré.
Précise l'ordre de multiplicité des zéros de $f(x)$. (1pt)
- 5) Soit la fonction rationnelle $h(x)$ définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{f(x)}{x^3 - 7x + 6}$.
 - a) Précise Dh . (0,5pt)
 - b) Pour tout x de Dh , simplifie $h(x)$. (0,75pt)
 - c) Pour tout x de Dh , étudie le signe de $h(x)$ puis en-déduis les solutions dans $\mathbb{R}$ de $h(x) > 0$. (1pt)

Partie II :

On considère la fonction polynôme du second degré t_n définie par :

$$t_n(x) = (n-1)x^2 - 2(2n-3)x + n^2 - 3n + 3.$$

- 1) a) Précise Dt_n . (0,25pt)
b) On pose $n = 2$, trouve les réels α et θ tels que pour tout réel x : $t_2(x) = (x - \theta)^2 + \alpha$. (1pt)
- 2) t_2 est-elle injective ? Surjective ? Bijective ? (1pt)
- 3) a) Trouve l'image directe par t_2 de $E = \left[2; \frac{7}{2}\right]$. (0,75pt)
b) Trouve l'image réciproque par t_2 de $F = [-7; 1]$. (0,75pt)
- 4) Factorise t_2 puis étudie son signe suivant les valeurs du réel x . (1pt)