

Lycée Empire Manding de Faladie (LPEMA-F)	Année Scolaire 2025-2026	
Composition de la Troisième période		
<i>Epreuve de Mathématiques</i>		
Classe : 11 ^e Sciences	Durée : 3 heures	Coefficient : 4

Situation 1 :(5pts)

On considère la suite (u_n) définie par: $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 4}{3} \end{cases} \forall n \in \mathbb{N}$

- 1) a) Calcule u_1 et u_2 . (1pt)
- b) Démontre que la suite (u_n) est décroissante. (On suppose $u_n > 2$) (0,75pt)
- 2) On considère la suite $v_n = u_n - 2$.
 - a) Démontre que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$. (1pt)
 - b) Exprime v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n . (1,5pt)
- 3) Calcule $S_n = v_3 + v_1 + \dots + v_{10}$ (0,75pt)

Situation 2 :(5pts)

I. Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormé du plan et (C) l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que : $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$

- 1) Montre que (C) est le cercle de centre $I(4; 3)$ et de rayon $R = 5$. (1,25pt)
- 2) Soit le point $A(1; -1)$.
 - a) Vérifie que $A \in (C)$. (0,75pt)
 - b) Donne une équation de la droite (D) tangente au cercle (C) en A . (0,75pt)
- 3) Détermine une représentation paramétrique du cercle (C) . (0,75pt)

II. Soit ABC un triangle rectangle en A tels que $AB = 4cm$; $AC = 6cm$

Détermine $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}$ (1,5pt)

Problème :(10pts)

Partie A :

Soit g une fonction définie sur $[0; +\infty[$, $g(x) = 2 - (x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}$

- 1) a) Montre que, pour tout $x \in [0; +\infty[$, $g'(x) = -3x\sqrt{x^2 + 1}$. (1,5pt)
- b) Dresse le tableau de variation de g . (0,75pt)
- 2) a) Montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0; +\infty[$ (0,75pt)
- b) Vérifie que $\alpha \in]0,7; 0,8[$. (0,5pt)
- c) Dédus-en que : $g(x) > 0$ pour $x \in [0; \alpha[$ et $g(x) < 0$ pour $x \in]\alpha; +\infty[$. (0,5pt)

Partie B :

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} - x + 1$

Soit (C) la courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (Unité 2cm)

- 1) a) Détermine $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (0,75pt)
b) Montre que, pour tout $x \in [0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ (1,5pt)
c) Déduis-en le tableau de variation de f sur $[0 ; +\infty[$. (0,75pt)
- 2) a) Montre que la droite $(D) : y = -x + 3$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$. (0,75pt)
b) Montre que pour tout $x \in [0 ; +\infty[$ on a : $x - \sqrt{x^2+1} < 0$ (0,75pt)
c) Déduis-en la position relative de (C) par rapport à (D) . (0,5pt)
- 3) Trace (D) et (C) . (on prend $\alpha = 0,75$) (1pt)