

EXERCICE 1 :

1. Calcule les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - 4}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{7-x}}{\sqrt{2x+3} - \sqrt{15-2x}}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2\cos(x) - \sqrt{2}}{2x - \pi}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3}{(2 - \sqrt{3})x^3 - x^2}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-5x^3 + 2x^2 + 7}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{4\cos(x) - 2\sqrt{2}}{4x - \pi}$$

2. Calcule la fonction dérivée des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sin(\sqrt{-x^2 + 3})$$

$$g(x) = \frac{2x^3 + 5x^2 - 5x - 7}{(x+2)^2}$$

$$h(x) = (3x^3 + 3x + 3)(2x^2 - 2)$$

3. On considère la fonction h définie par :

$$\begin{cases} h(x) = 2x^2 + ax - 3 & \text{si } x \leq 1 \\ h(x) = \frac{2x+b}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Détermine les réels a et b pour que h soit continue et dérivable en $x_0 = 1$.

4. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{3 - \sqrt{4x+1}}{2x-4}$. f est-elle prolongeable par continuité en $x_0 = 2$? Si oui, précise son prolongement g .

EXERCICE 2 :

Discute graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel m l'existence et le signe des racines de l'équation $(E) : x^2 - (m+1)x - 2m - 2 = 0$. (On pourra étudier, la fonction $x \mapsto \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$)

PROBLEME :

Le but de l'exercice est d'étudier et de construire la courbe représentative (C_f) de la fonction f définie par : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \frac{-x^3 - x^2 + 6x - 9}{x - 2}$

PARTIE A : Etude d'une fonction auxiliaire.

On considère le polynôme P définie par : $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. avec a, b, c et d des réels.

1. Trouve les réels a, b, c et d pour que P admet 9 pour extremum en 2. Sachant que $P(1) = 4$ et $P(-2) = 25$.
2. On pose $P(x) = -2x^3 + 5x^2 + 4x - 3$.
 - a. Etudie les variations de P puis dresse son tableau de variation.
 - b. Calcule $P(-1)$. Et étudie le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x .

PARTIE B : Étude de la fonction principale.

1. Détermine l'ensemble de définition f .
2. Calcule les limites de f aux bornes de D_f . Interprète les résultats.
3. Étudie la position de la courbe (C_f) par rapport à l'asymptote parabolique $\varphi : x \mapsto -x^2 - 3x$.
4. Calcule $f'(x)$ et montre que $f'(x)$ a le même signe que $P(x)$.
5. Dresse le tableau de variations de f .
6. Trouve une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) de f au point d'abscisse $x_0 = 1$.
7. Complète le tableau des valeurs suivantes :

-3	-2	0	1	2	4	5
$f(x)$						

8. Trouve les coordonnées des points d'intersections de (C_f) avec les axes des coordonnées.
9. Construis (C_f) , (T) et ses asymptotes dans un même repère orthonormé.
10. Existe-t-il des points de la courbe où la tangente est parallèle à la droite $(D) : y = 3x - 1$?

PARTIE C :

Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =]-\infty ; 1]$

1. Montre que g réalise une bijection de $I =]-\infty ; 1]$ vers un intervalle J que l'on précisera.
2. On désigne par g^{-1} la bijection réciproque de g
 - a. Calcule $(g^{-1})'(\frac{9}{2})$.
 - b. Dresse le tableau de variations de g^{-1} .
 - c. Construis la courbe de (g^{-1}) de g^{-1} dans le même repère que (C_f) et (T) .

PARTIE D :

Soit la fonction h définie par : $h(x) = 2\sin(2x) - 4\sin(x)$

1. Détermine l'ensemble de définition de h .
2. Explique pourquoi, on peut restreindre l'étude de h sur l'intervalle $K =]0 ; \pi]$
3. Justifie que $h'(x) = 4(2\cos x + 1)(\cos x - 1)$
4. Dresse le tableau de variation de h .