

Le 27 Mars 2025 1446 رمضان

Exercice 01 : (7points)

Partie A : I - Soit $f(x) = \frac{1}{x^3 - 4x}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O; I; J).

1. Montrer que le domaine de définition de f est : $D_f = \mathbb{R} - \{-2; 0; 2\}$
2. Calculer les limites aux bornes de D_f puis interpréter graphiquement les résultats
3. Montre que : $\forall x \in D_f : f'(x) = -\frac{(3x^2 - 4)}{(x^3 - 4x)^2}$ puis calculer $f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ et $f\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$
4. Dresser le tableau de variation de f
5. Construire (C)
6. Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre m le nombre de solution de l'équation $f(x) = m$

II - Soit g la restriction de f sur l'intervalle $]2; +\infty[$

1. Montrer que g réalise une bijection de $I =]2; +\infty[$ sur un intervalle J à préciser
2. Dresser le TV de g^{-1} et Construire la courbe (C') de g^{-1}

III - Soit la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $T_n = \frac{1}{n^2 + n}$

1. Déterminer les réels a et b tels que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$ $T_n = \frac{a}{n} - \frac{b}{n+1}$
2. En utilisant les deux expressions de T_n
 - a) Montrer que : $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2+2} + \frac{1}{3^2+3} + \frac{1}{4^2+4} + \dots + \frac{1}{n^2+n} = \frac{n}{n+1}$
 - b) Déduis-en la valeur exacte de : $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{2070}$

Partie B :

On donne la fonction $g(x) = 1 + \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$

- 1- a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$
 - b) En déduire que pour tout $x \in [1; +\infty[$, $0 < g'(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$
 - c) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet, dans $[1; +\infty[$ une solution unique α et que $\alpha \in]2, 3[$
- 2- Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 \geq 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = g(U_n)$
 - a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq 1$
 - b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} |U_n - \alpha|$
 - c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et préciser sa limite

Exercice 2 : (8points)

L'espace est rapporté a un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. On considère les points :

A (2; -1; 3) ; B (-2; 3; 1) ; C (-2; 0; 4); D (9; -5; 8) et E (8; -7; 6)

1. Les points A ; B et E sont-ils alignés ? Déterminent-ils un plan ?
2. Montrer que les points A, B et C déterminent un plan
3. Montrer alors qu'une équation du plan (ABC) est : $x + 2y + 2z - 6 = 0$
4. Vérifier que les points A, B, C et E sont coplanaires
5. Montrer que les vecteurs $\vec{ED}$ et $\vec{AB}$ sont orthogonaux
6. Montrer que la droite (ED) est perpendiculaire au plan (ABC)
7. Vérifier que le triangle ABC est rectangle en C et que ABCD est un tétraèdre
8. Calculer alors le volume V du tétraèdre ABCD
9. Déterminer l'ensemble Γ des points M de l'espace tels que : $MA^2 + MB^2 = 36$ (Vérifier que $A \in \Gamma$)

Exercice 3 : (5points)

Partie A : Soit A, B, C et D quatre points d'un cercle Γ de centre O tel que : $(AB) \perp (CD)$;

M le milieu de $[BC]$ et $(AB) \cap (CD) = P$

1. Montrer que $(\vec{PM}; \vec{PC}) = (\vec{CP}; \vec{CM})$
2. Montrer que les droites (MP) $\perp$ (AD)

Partie B : Soit x un réel tel que : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $x \neq k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

1. Montrer que : $\left(\frac{1}{\cos x} + \tan x\right) \left(\frac{1}{\cos x} - \tan x\right) = 1$
2. Montrer que : $\frac{1}{\tan^2(x)} - \cos^2(x) = \frac{\cos^2(x)}{\tan^2(x)}$
3. Montrer que : $\tan^2(x) \sin^2(x) = \tan^2(x) - \sin^2(x)$

Fin.