

Le 27 Mars 2025 1446 رمضان

Exercice 01 : (7points)

Soit la fonction définie par : $f(x) = \frac{-1}{x^2-x}$ et Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- Déterminer D_f de f
- Déterminer les réels a et b tels que : $f(x) = \frac{a}{x} - \frac{b}{x-1}$
- Calculer les limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$. puis interpréter graphiquement les résultats
- Montrer que : $\forall x \in D_f$; $f'(x) = \frac{2x-1}{(x^2-x)^2}$
- Dresser le tableau de variation de f
- Montrer que la droite (Δ) d'équation : $x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie de (C)
- Tracer la courbe (C)
- Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =]1; +\infty[$

8.1 . Montrer que g réalise une bijection de I sur J que l'on précisera

8.2. Dresser le TV de g^{-1} la fonction réciproque de g

Exercice 02 : (5points)

On considère la fraction rationnelle $f(x) = \frac{1}{x^2+x}$

- Déterminer le domaine de définition D_f de f
 - Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de f . interpréter les résultats.
 - Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x appartenant à D_f , $f(x) = \frac{a}{x} - \frac{b}{x+1}$
 - En utilisant les deux expressions de $f(x)$.
- 4.1. Montrer que : $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2+2} + \frac{1}{3^2+3} + \frac{1}{4^2+4} + \dots + \frac{1}{n^2+n} = \frac{n}{n+1}$
- 4.2. Déduis-en la valeur exacte de : $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{2162}$

Exercice 03 : (8points)

On considère la suite numérique (U_n) définie par
$$\begin{cases} U_0 = a \quad \text{et} \quad U_1 = b \\ U_{n+2} = 2\alpha U_{n+1} - \alpha^2 U_n \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Tels que : a ; b et α des réelles constantes. Soient (V_n) et (W_n) les suites définies par :

$$V_n = U_{n+1} - \alpha U_n \quad \text{et} \quad W_n = (b - \alpha a) \frac{U_n}{\alpha^n}$$

- Calculer V_0 et W_0
- Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison α
- Exprimer V_n en fonction de n .
- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad W_{n+1} - W_n = \frac{(b-\alpha a)}{\alpha^{n+1}} \times V_n$
- En déduire que (W_n) est une suite arithmétique de raison $r = \frac{(b-\alpha a)^2}{\alpha}$
- Exprimer W_n en fonction de n
- Exprimer U_n en fonction de n

Fin.