

Barycentre

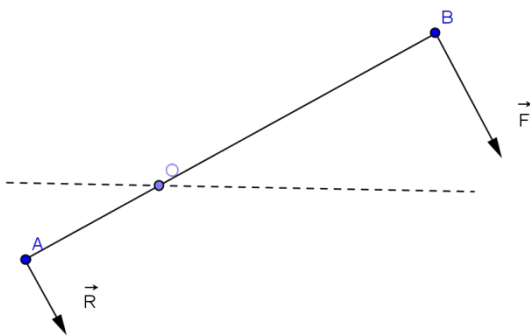
Classe : 11^é Sciences

I.- Barycentre de deux points pondérés

Activité

La condition d'équilibre d'un levier mobile autour d'un point O est $F \times OB = R \times OA$;
 $\vec{F}$ et $\vec{R}$ étant les deux forces appliquées en A et B.

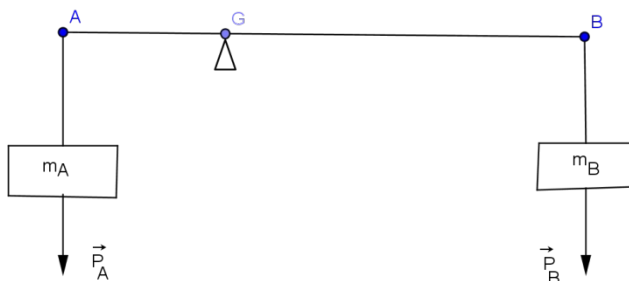
(2.04, 7.98)



Soit le système constitué par une tige $AB = 1\text{ m}$ de masse négligeable portant à ses extrémités deux masses m_A et m_B . Comment doit-on poser la tige sur un pointeau G pour qu'elle reste en équilibre :

- a) lorsque $m_A = 1\text{ Kg}$ et $m_B = 1\text{ Kg}$
- b) lorsque $m_A = 2\text{ Kg}$ et $m_B = 1\text{ Kg}$
- c) lorsque $m_A = 1\text{ Kg}$ et $m_B = 3\text{ Kg}$

(0.84, 6.98)



Synthèse Partielle

La tige est en équilibre si $P_A \times GA = P_B \times GB$, c'est-à-dire $m_A \times GA = m_B \times GB$.

Trouvons la position du point G pour que l'équilibre soit atteint :

a) lorsque $m_A = 1 \text{ Kg}$ et $m_B = 1 \text{ Kg}$

Dans ce cas la condition d'équilibre s'écrit $GA = GB$, autrement dit G est le milieu du segment $[AB]$.

b) lorsque $m_A = 2 \text{ Kg}$ et $m_B = 1 \text{ Kg}$

La condition d'équilibre s'écrit $2 \times GA = GB$

D'autre part $GA + GB = AB$; on a :

$$GA + 2GA = AB \implies GA = \frac{1}{3} AB$$

$$GA = \frac{1}{3} AB \text{ alors } GB = \frac{2}{3} AB$$

c) lorsque $m_A = 1 \text{ Kg}$ et $m_B = 3 \text{ Kg}$, la condition d'équilibre s'écrit $GA = 3 \times GB$ or

$GA + GB = AB$; on a :

$$3 \times GB + GB = AB \implies GB = \frac{1}{4} AB$$

$$GB = \frac{1}{4} AB \text{ alors } GA = \frac{3}{4} AB$$

Dans chacun de ces trois cas, on peut dire que le point G est situé entre A et B tel que $m_A \times GA = m_B \times GB$, c'est-à-dire $m_A \vec{GA} + m_B \vec{GB} = \vec{0}$.

En physique on dit que G est le centre de gravité du système. En mathématiques, on dit que G est le barycentre des points A et B affectés respectivement par des coefficients m_A et m_B .

Synthèse générale

Théorème

Soit A et B deux points du plan et a, b deux nombres réels.

Si $a + b \neq 0$, alors il existe un seul point G tel que : $a \vec{GA} + b \vec{GB} = \vec{0}$.

Démonstration

$$a \vec{GA} + b \vec{GB} = \vec{0} \iff (a+b) \vec{GA} + b \vec{AB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB}$$

On Pose $\vec{u} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB}$

On sait que, étant donnés un point A et un vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point G tel que : $\overrightarrow{AG} = \vec{u}$

Définition

- On appelle point pondéré tout couple (A, a) où A est un point et a un nombre réel ; a est appelé le coefficient du point A.
- Soit $(A, a), (B, b)$ deux points pondérés tels que $a+b \neq 0$.
On appelle barycentre des points pondérés $(A, a), (B, b)$ l'unique point G tel que $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

On note $G = [(A, a), (B, b)]$ ou

$$G = \text{bar} \begin{array}{|c|c|} \hline A & B \\ \hline a & b \\ \hline \end{array}$$

Propriétés caractéristique

G étant le barycentre des points pondérés $(A, a), (B, b)$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) Pour tout point M ; $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a+b)\overrightarrow{MG}$
- (2) $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$
- (3) $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{BG} = \frac{a}{a+b} \overrightarrow{BA}$

Remarque

a et b étant différents de 0, de l'égalité (2) on déduit : $\overrightarrow{GB} = -\frac{a}{b} \overrightarrow{GA}$.

Le barycentre des points pondérés $(A, a), (B, b)$ est le centre de l'homothétie de rapport $-\frac{a}{b}$ qui applique A sur B

Propriétés

Le point G étant le barycentre des points pondérés $(A, a), (B, b)$

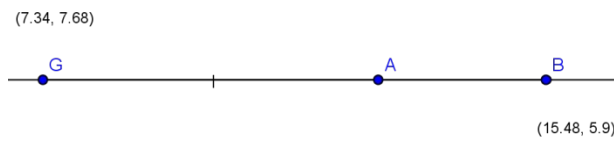
- Le point G appartient à la droite (AB)
- Si k est un nombre réel différent de 0, alors G est le barycentre de $(A, ka), (B, kb)$

Construction du barycentre de deux points pondérés

- **Utilisation de la propriété caractéristique (3) :** $\vec{AG} = \frac{b}{a+b} \vec{AB}$; $\vec{BG} = \frac{a}{a+b} \vec{BA}$

Construisons le barycentre G des points pondérés $(A, 3)$, $(B, -2)$:

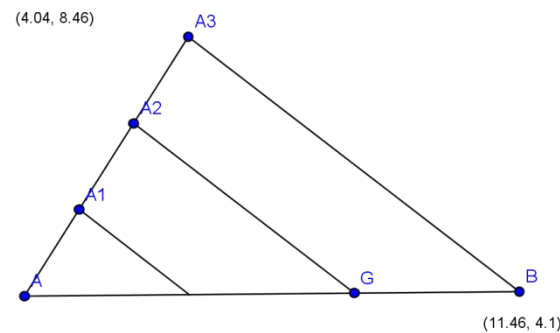
$\vec{AG} = -2 \vec{AB}$. Donc G est le point de la droite (AB) d'abscisse -2 dans le repère $(A ; B)$



Construisons le barycentre G des points pondérés $(A, 1)$, $(B, 2)$. $\vec{AG} = \frac{2}{3} \vec{AB}$

Il s'agit de diviser le segment $[AB]$ en trois parties égales. Pour cela on peut procéder comme suite :

- Placer les points alignés A_1 , A_2 et A_3 tels que : $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$ et les droites (AA_3) et (AB) ne soit pas parallèles
- Tracer le segment $[AB]$
- Projeter les points A_1 , A_2 sur $[AB]$ parallèlement à $[A_3B]$



- **Utilisation de la propriété (1) : pour tout point M ,** $a \vec{MA} + b \vec{MB} = (a+b) \vec{MG}$

Construisons le barycentre des points pondérés $(A, 3)$, $(B, 2)$

$$G = [(A, 3), (B, 2)]$$

M étant un point du plan, on a : $3 \vec{MA} + 2 \vec{MB} = 5 \vec{MG}$

- H est le point tel que $\vec{MH} = 3 \vec{MA} + 2 \vec{MB}$

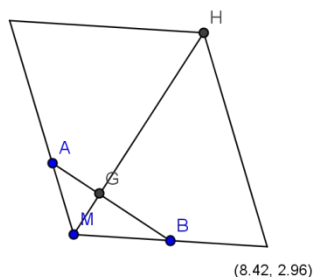
On a donc $\vec{MH} = 5 \vec{MG}$

Par conséquent $G \in (MH)$

- Or on sait que $G \in (AB)$

G est donc le point d'intersection des droites (AB) et (MH)

(3.66, 7.72)



Ensemble des barycentres de deux points pondérés

Définition

On dit qu'un point G est un barycentre de deux points A et B lors qu'on peut trouver deux nombres réels x et y de somme différente de 0, tels que G soit le barycentre des points pondérés (A, x) , (B, y) .

Propriété

A et B étant deux points du plan l'ensemble des barycentres de ces deux points est la droite (AB) .

Evaluation

On donne deux points A et B .

On considère les points C , D et E tels que : $\overrightarrow{AC} = 0,6 \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD} = -1,2 \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AE} = 1,4 \overrightarrow{AB}$.

Déterminer les nombres réels a et b pour que chacun des points A , B , C , D , E soit le barycentre des points pondérés (A, a) , (B, b) .

Remarque

On pourra justifier le schéma ci-dessous qui donne les positions du barycentre de deux points pondérés (A, a) , (B, b) suivant les valeurs de a et b .

II.- Barycentre de trois points pondérés

Activité

(A, a) , (B, b) et (C, c) étant trois points pondérés tel que $a + b + c \neq 0$

Etudier dans le plan, l'équation (E) d'inconnue un point M : (E) $a \overrightarrow{MA} + b \overrightarrow{MB} + c \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

Synthèse Partielle

Synthèse générale

Propriété et Définition

(A, a) , (B, b) et (C, c) sont trois points pondérés tels que $a + b + c \neq 0$.

Il existe un point G et un seul tel que $a \overrightarrow{GA} + b \overrightarrow{GB} + c \overrightarrow{GC} = \vec{0}$. Ce point G est appelé barycentre des points (A, a) , (B, b) et (C, c)

Propriétés Caractéristiques

G étant le barycentre des trois points pondérés (A, a) , (B, b) et (C, c) , les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) Pour tout point M , $a \overrightarrow{MA} + b \overrightarrow{MB} + c \overrightarrow{MC} = (a + b + c) \overrightarrow{MG}$

$$(2) \quad a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$(3) \quad \overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c} \overrightarrow{AC}$$

Autres propriétés

G étant le barycentre des trois points pondérés (A, a) , (B, b) et (C, c) ,

- Si k est un nombre réel différent de 0, alors G est le barycentre de (A, ka) , (B, kb) et (C, kc) ,
- Si G_1 est le barycentre de (A, a) , (B, b) , alors G est le barycentre de $(G_1, a+b)$ et (C, c) . G_1 est appelé le barycentre partiel de A et B

Construction du Barycentre de trois points pondérés

Exemple

On considère un triangle ABC.

Construisons le barycentre G des points pondérés $(A, 1)$, $(B, 2)$, $(C, 5)$.

- Utilisation de la propriété caractéristique (3) : $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c} \overrightarrow{AC}$

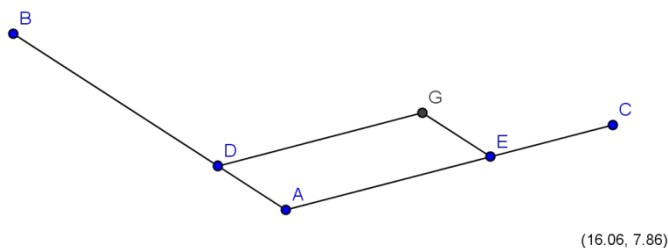
$$\text{On a : } \overrightarrow{AG} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{5}{8} \overrightarrow{AC}$$

On construit les points D et E tels que : $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE} = \frac{5}{8} \overrightarrow{AC}$

Le point G est tel que : $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

C'est donc le point G tel que ADGE soit un parallélogramme.

(7.06, 11.54)



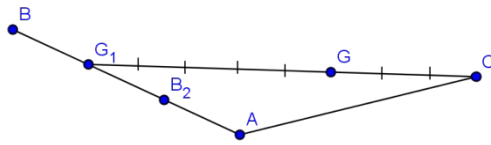
- Utilisation d'un barycentre partiel

$1+2=3$. Le barycentre G_1 est tel que $\overrightarrow{AG_1} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$

Le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 2)$, $(C, 5)$ est le barycentre de $(G_1, 3)$ et $(C, 5)$.

$$\text{Donc } \overrightarrow{G_1G} = \frac{5}{8} \overrightarrow{G_1C}$$

(7.06, 11.54)



(16.06, 7.86)

III. Barycentre de quatre points pondérés

Activité

On considère quatre points pondérés $(A, 1)$, $(B, -2)$, $(C, 4)$ et $(D, 2)$. On se propose :

- de démontrer qu'il existe un unique point G, que l'on appelle barycentre des quatre points pondérés $(A, 1)$, $(B, -2)$, $(C, 4)$ et $(D, 2)$, tel que : $\vec{GA} - 2\vec{GB} + 4\vec{GC} + 2\vec{GD} = \vec{0}$
(1)

- de construire ce point G en utilisant plusieurs méthodes.

Pour cela :

1) Démontrer que : (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\vec{AG} = -\frac{2}{5}\vec{AB} + \frac{4}{5}\vec{AC} + \frac{2}{5}\vec{AD}$

2) Construire G en utilisant la propriété (2).

3) Construire G en utilisant deux barycentres partiels des quatre points pondérés $(A, 1)$, $(B, -2)$, $(C, 4)$ et $(D, 2)$

Synthèse partielle

Ici on constate que : $-2 + 4 \neq 0$, $1 + 2 \neq 0$.

On construira donc :

- Le barycentre G_1 de $(B, -2)$ et $(C, 4)$
- Le barycentre G_2 de $(A, 1)$ et $(D, 2)$.
- Le barycentre G de $(G_1, 2)$ et $(G_2, 3)$

Remarque

On aurait choisi de construire le barycentre G_3 de $(A, 1)$ et $(B, -2)$ et le barycentre G_4 de $(C, 4)$ et $(D, 2)$, puis le barycentre G de $(G_3, -1)$ et $(G_4, 6)$, cependant, il est inutile de vouloir construire le barycentre de $(A, 1)$ et $(C, 4)$, car $(B, -2)$ et $(D, 2)$ n'ont pas de barycentre **NB** :

- Le barycentre des points pondérés (A, a) , (B, b) est aussi le barycentre des deux points pondérés $(A, 1)$, $(B, 1)$; il est appelé isobarycentre des deux points A et B.

Justifier que l'isobarycentre des points A et B est le milieu du segment $[AB]$.

-. Le barycentre G des points pondérés (A, a) , (B, b) et (C, c) est aussi le barycentre des trois points pondérés $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$ il est appelé isobarycentre des points A, B et C

Lorsque les points A, B et C sont non alignés, leur isobarycentre est le centre de gravité du triangle ABC.

IV. Coordonnées d'un barycentre

Activité

Le plan étant muni d'un repère orthonormé G étant le barycentre de (A, a) et (B, b)

Exprimer $\vec{OG}$ en fonction de $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$

Propriété

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormé du plan et soit $A(x_A; y_A)$; $B(x_B; y_B)$ et $C(x_C; y_C)$

- Les coordonnées du barycentre G des points pondérés $(A; \alpha)$; $(B; \beta)$ sont :

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta} \text{ et } y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}$$

- Les coordonnées du barycentre G des points pondérés $(A; \alpha)$; $(B; \beta)$; $(C; \gamma)$ sont :

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma} \text{ et } y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

