

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

1. Repérage d'un point de l'espace :

Soit $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires et O un point de l'espace.

Le quadruplet $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est appelé repère de l'espace.

On dit que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est la base du repère.

O est appelé l'origine du repère.

Le repère est dit orthonormé lorsque les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\|$.

Tout vecteur $\vec{u}$ peut se décomposer de sorte que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. x , y et z sont appelés les coordonnées du vecteur $\vec{u}$.

On note : $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ou $\vec{u}(x; y; z)$.

Pour tout point M de l'espace, on a : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

x , y et z sont les coordonnées du point M .

x est l'abscisse, y l'ordonnée et z la cote du point M .

On note $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ou $M(x; y; z)$.

1.1. Représentation d'un point dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace.

1.2. Les coordonnées du milieu d'un segment :

Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ deux points de l'espace muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Alors on a :

- $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$.

- les coordonnées du milieu I de $[AB]$ sont :
$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} \end{cases}$$

Exemple

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient les points $A(1; 2; -3)$, $B(-2; 4; 0)$ et $C(3; 0; -2)$.

Déterminons les coordonnées de A' , B' et C' , les milieux respectifs de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

$$\text{Alors : } \begin{cases} x_A = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2} \\ x_A = \frac{4+0}{2} = 2 \\ x_A = \frac{0-2}{2} = -1 \end{cases} ; \begin{cases} x_B = \frac{1+3}{2} = 2 \\ x_B = \frac{2+0}{2} = 1 \\ x_B = \frac{-3-2}{2} = -\frac{5}{2} \end{cases} ; \begin{cases} x_C = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2} \\ x_C = \frac{2+4}{2} = 3 \\ x_C = \frac{-3+0}{2} = -\frac{3}{2} \end{cases} .$$

1.3. Norme d'un vecteur :

Soit le vecteur $\vec{u}(x; y; z)$ et les points $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ de l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On a :

- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- $AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

1.4. Vecteurs orthogonaux :

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $x x' + y y' + z z' = 0$.

2. Détermination d'équations de droites et de plans :

2.1. Déterminer les équations cartésiennes et paramétriques d'une droite :

Equations paramétriques :

L'espace est muni d'un repère $(O; i, j, k)$.

Soit une droite d passant par un point $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$\text{On a : } M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in d \Leftrightarrow \text{Il existe un réel } t \text{ tel que } \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$$

$$M(x; y; z) \in (d)$$

$$\Leftrightarrow \vec{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \vec{AM} = k\vec{u}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_A = ka \\ y - y_A = kb \\ z - z_A = kc \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = ka + x_A \\ y = kb + y_A \\ z = kc + z_A \end{cases}$$

Remarque :

Ce système s'appelle une représentation paramétrique de la droite d .

Méthode : Utiliser la représentation paramétrique d'une droite

L'espace est muni d'un repère $(O; i, j, k)$.

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } B \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Soit les points

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (AB) avec le plan de repère $(O; i, j)$.

- On commence par déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) :

$$\text{Un vecteur directeur de (AB) est } \vec{AB} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ -3-3 \\ 2-(-1) \end{pmatrix}, \text{ soit } \vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Une représentation paramétrique de (AB) est : } \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - 6t \\ z = -1 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ le point d'intersection de la droite (AB) avec le plan de repère $(O; i, j)$.

Alors $z = 0$ car M appartient au plan de repère $(O; i, j)$.

Donc $-1 + 3t = 0$ soit $t = \frac{1}{3}$.

$$\begin{cases} x = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \\ y = 3 - 6 \times \frac{1}{3} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Et donc

Le point M a donc pour coordonnées $\left(\frac{5}{3}; 1; 0\right)$.

Equation cartésienne :

a) Vecteur directeur

Deux points distincts A et B définissent une droite (D).

La direction de cette droite est celle du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est appelé un **vecteur directeur** de la droite.

Tout vecteur $\vec{u}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ est aussi un vecteur directeur.

Un point M appartient à (d) si et seulement si les vecteurs

$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

Exemple 2 : Soit (e) la droite passant par B(2 ; -1 ; 4) et de vecteur directeur

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$M(x ; y ; z) \in (e)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BM}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \overrightarrow{BM} = k\vec{v}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - 2 \\ y - (-1) \\ z - 4 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = k \cdot (-1) \\ y + 1 = k \cdot 3 \\ z - 4 = k \cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -k + 2 & (1) \\ y = 3k - 1 & (2) \\ z = k + 4 & (3) \end{cases}$$

(3) : $k = z - 4$ (3')

$$(3') \text{ dans (1) : } x = -(z - 4) + 2 \Leftrightarrow x + z - 6 = 0$$

$$(3') \text{ dans (2) : } y = 3(z - 4) - 1 \Leftrightarrow y - 3z + 13 = 0$$

$$(d) \equiv \begin{cases} x = -k + 2 \\ y = 3k - 1 \\ z = k + 4 \end{cases} \quad \text{ou bien} \quad (d) \equiv \begin{cases} x + z - 6 = 0 \\ y - 3z + 13 = 0 \end{cases}$$

Finalement :

système de 3 équations paramétriques
équations cartésiennes

système de 2

Ces deux systèmes représentent bien évidemment la même droite.

Exemple :

L'espace est muni d'un repère (O, i, j, k) .

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1° Soit les points A(-2 ; 3 ; 1) et B(4 ; 2 ; 1) et le vecteur

a) Déterminer un système d'équations paramétriques et un système d'équations cartésiennes de la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

b) Est-ce que B appartient à (d) ?

2° Soit les points C(4 ; -1 ; 2) et D(2 ; 0 ; 3)

a) Déterminer un système d'équations paramétriques et cartésiennes de la droite (CD).

b) Déterminer les réels a et b afin que le point E(a ; b ; 1) appartienne à (CD).

3° Soit les points F(1 ; 2 ; -3) et G(2 ; 1 ; 2)

a) Déterminer un système d'équations paramétriques et cartésiennes de la droite (FG).

b) Existe-t-il un point H sur (FG) tel que son abscisse soit le triple de son ordonnée. Si oui, en donner les coordonnées.

$$1^\circ \text{ a) } \begin{cases} x = k - 2 \\ y = -k + 3 \\ z = k + 1 \end{cases} \quad (d) \equiv \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - z + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{b) non} \quad 2^\circ \text{ a) } \begin{cases} x = -2k + 4 \\ y = k - 1 \\ z = k + 2 \end{cases} \quad (CD) \equiv \begin{cases} x + 2y - 2 = 0 \\ y - z + 3 = 0 \end{cases} \quad \text{b) a}$$

$= 6 \quad \text{et} \quad b = -2$

$$3^\circ \text{ a) } \begin{cases} x = k + 1 \\ y = -k + 2 \\ z = 5k - 3 \end{cases} \quad (FG) \equiv \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 5x - z - 8 = 0 \end{cases} \quad \text{b) } H\left(-\frac{9}{4}; -\frac{3}{4}; -\frac{13}{4}\right)$$

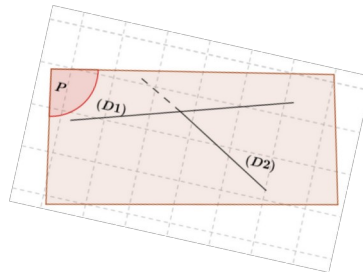
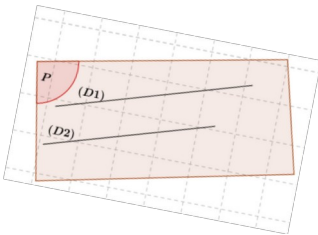
3. Etude de positions relatives de deux droites ; d'une droite et d'un plan ; de deux plans :

3.1. Etudier la position relative de deux droites :

Activité :

Soient les figures suivantes :

1. Observe les figures et dites dans chaque cas comment sont les droites (D_1) et (D_2) ?



2. Comment sont D_1 , D_2 et le plan P dans chaque cas ?

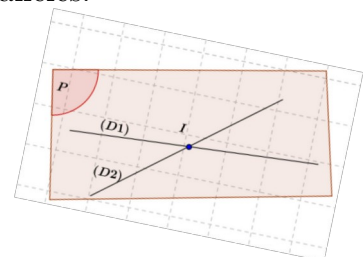
Synthèse partielle :

1. Figure 1 : D_1 et D_2 sont sécantes.
Figure 2 : D_1 et D_2 sont parallèles.
Figure 3 : D_1 et D_2 ne sont ni sécantes ni parallèles.
2. Figure 1 : D_1 et D_2 appartiennent tous à P .
Figure 2 : D_1 et D_2 appartiennent tous à P .
Figure 3 : $D_1 \in P$ mais $D_2 \not\in P$.

Synthèse Générale :

Deux droites de l'espace sont :

- Soit coplanaires dans ce cas elles sont alors sécantes ou parallèles ;



- Soit non coplanaires.

Définition : dans l'espace ;

- Deux droites sont parallèles si elles sont strictement parallèles ou bien confondues.
- Deux droites sont sécantes lorsqu'elles sont perpendiculaires ou quelconques.

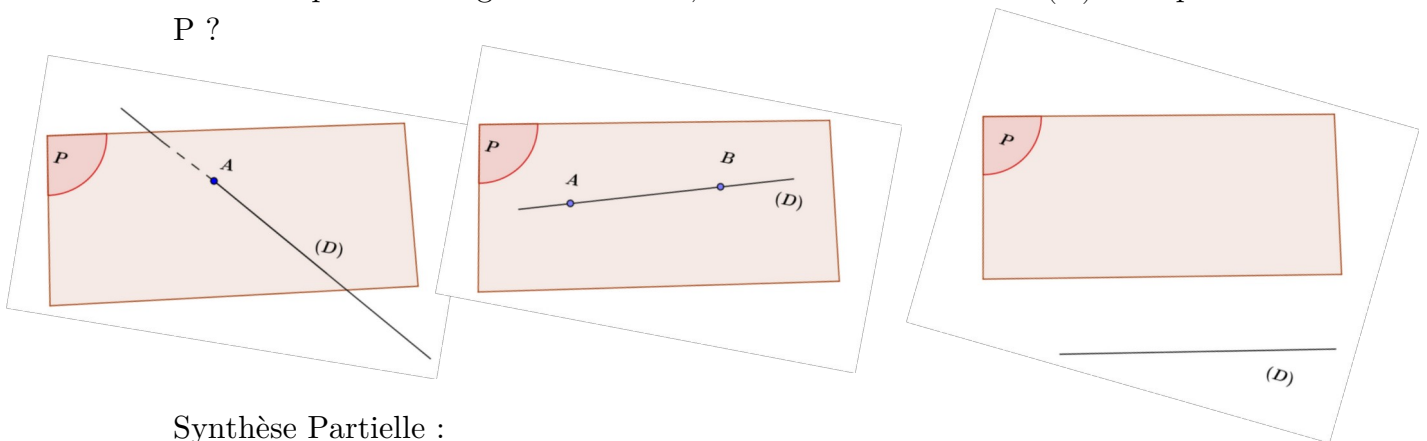
NB : Dans l'espace ; deux droites non parallèles ne sont pas forcément sécantes.

Théorème : deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre elles.

3.2. Etudier la position relative d'une droite et d'un plan :

Activité :

Dans chaque cas de figures suivantes, comment sont la droite (D) et le plan P ?



Synthèse Partielle :

Figure 1 : P et (D) ont en commun le point A donc P et (D) sont sécants.

Figure 2 : P et (D) n'ont aucun point commun alors ils sont parallèles.

Figure 3 : P et (D) ont en commun les points A et B alors $(D) \subset P$.

NB : Si $(D) \subset P$ alors (D) et P sont parallèles.

Synthèse Générale :

Définition :

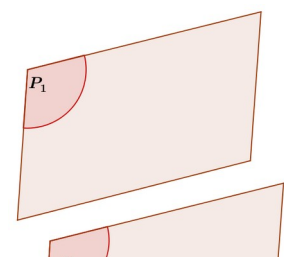
- dans l'espace une droite (D) est parallèle à un plan P lorsque (D) est incluse dans P ou lorsque (D) et P sont disjoints.
- Un plan P est sécant à une droite (D) en un point lorsque l'intersection de (D) et de P est réduite à ce point.

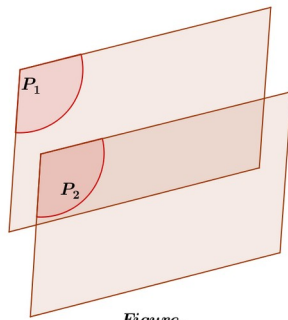
Théorème : si une droite D est parallèle à une droite Δ d'un plan P , alors D est parallèle à P .

3.3. Etudier la position relative de deux plans :

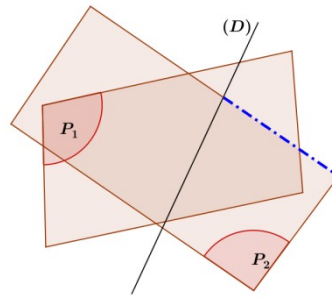
Activité :

Soient les figures suivantes :





Figure₁



Figure₂

Comment sont P_1 et P_2 dans chaque cas ?

Synthèse Partielle :

Figure 1 : P_1 et P_2 sont confondus.

Figure 2 : P_1 et P_2 ont en commun la droite (D) alors ils sont sécants.

Figure 3 : P_1 et P_2 sont parallèles.

Synthèse Générale :

Deux plans de l'espace sont soit parallèles ; soit sécants.

Définition :

- Deux plans confondus ou disjoints sont dits parallèles.
- Deux plans non parallèles sont dits sécants, leur intersection est alors une droite.

Théorème 1 : Si deux droites sécantes d'un plan sont parallèles à un autre plan, alors ces deux plans sont parallèles.

Théorème 2 : deux plans parallèles un même troisième sont parallèles entre eux.

Théorème 3 : Un plan Q sécant à deux plans P_1 et P_2 strictement parallèles les coupe suivant deux droites parallèles $(D_1$ et $D_2)$.

4. Détermination des coordonnées d'un vecteur :

Un vecteur de l'espace est défini par une direction de l'espace, un sens et une norme (longueur).

Les vecteurs de l'espace suivent les mêmes règles de construction qu'en géométrie plane : Relation de Chasles, propriétés en rapport avec la colinéarité, ... restent valides.

4.1. Les coordonnées d'un vecteur :

Soit $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et $B(x_B ; y_B ; z_B)$ deux points du plan muni d'un repère (O, i, j, k) .

Alors on a :

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}.$$

Propriétés :

L'espace est muni d'un repère (O, i, j, k) .

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{u}' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont égaux si et seulement si $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$.

Les coordonnées du vecteur $k\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$.

Les coordonnées du vecteur $\vec{u} + \vec{u}'$ sont $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$.

Exemples

L'espace est muni d'un repère (O, i, j, k) .

a) Soit les points $A(4 ; -1 ; 3)$, $B(-3 ; 2 ; 0)$ et $C(1 ; 2 ; -1)$. Déterminer les coordonnées de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} -3-4 \\ 2-(-1) \\ 0-3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{AB} \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{AC} \begin{pmatrix} 1-4 \\ 2-(-1) \\ -1-3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

b) Déterminer les coordonnées de $\vec{u} = 3\vec{AB} - 2\vec{AC}$.

$$3 \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21+6 \\ 9-6 \\ 9+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix}$$

donc $\vec{u} \begin{pmatrix} -15 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix}$

c) Déterminer les coordonnées de D pour que $\vec{AB} = \vec{CD}$.

Soit $D(x_D ; y_D ; z_D)$. Alors $\vec{CD} = \begin{pmatrix} x_D - 1 \\ y_D - 2 \\ z_D + 1 \end{pmatrix}$.

$$\vec{AB} = \vec{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} -7 = x_D - 1 \\ 3 = y_D - 2 \\ 3 = z_D + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7 + 1 = x_D \\ 3 + 2 = y_D \\ 3 - 1 = z_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -6 \\ y_D = 5 \\ z_D = 2 \end{cases} \text{ donc } D(-6 ; 5 ; 2).$$

Remarque : $\vec{0}$ est le vecteur nul. Ses coordonnées sont $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4.2. Vecteurs colinéaires :

Deux vecteurs sont colinéaires s'ils ont la même direction, donc si l'un des deux est égal au produit de l'autre par un réel k .

Donc : u et v sont colinéaires $\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \quad u = kv$

($\exists k \in \mathbb{R}$: il existe un réel k)

Exemples

Soit les vecteurs $u = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$ et $t = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 5 \end{pmatrix}$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$)

a) Est-ce que les vecteurs u et v sont colinéaires ?

$$u \text{ et } v \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \quad u = kv \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = -2k \\ -2 = k \\ -6 = 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \\ k = -2 \\ k = -2 \end{cases}$$

donc $u = -2v$ et u et v sont colinéaires.

b) Est-ce que les vecteurs u et w sont colinéaires ?

$$u \text{ et } w \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \quad u = kw \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = -6k \\ -2 = 3k \\ -6 = -9k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{2}{3} \\ k = -\frac{2}{3} \\ k = \frac{2}{3} \end{cases}$$

donc u et w ne sont pas colinéaires.

c) Déterminer les réels a et b pour que les vecteurs u et t soient colinéaires.

$$u \text{ et } t \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \quad u = kt \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a \\ b \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = ka \\ -2 = kb \\ -6 = 5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{4}{a} & (1) \\ k = \frac{-2}{b} & (2) \\ k = \frac{-6}{5} & (3) \end{cases}$$

$$(3) \text{ dans } (1) : \frac{4}{a} = \frac{-6}{5} \Leftrightarrow -6a = 4 \bullet 5 \Leftrightarrow a = \frac{20}{-6} = -\frac{10}{3}$$

$$(3) \text{ dans } (2) : \frac{-2}{b} = \frac{-6}{5} \Leftrightarrow -6b = -2 \bullet 5 \Leftrightarrow b = \frac{-10}{-6} = \frac{5}{3}$$

$$\text{donc } t = \begin{pmatrix} -\frac{10}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 5 \end{pmatrix}$$

4.3. Norme d'un vecteur :

L'espace est muni d'un repère (O, i, j, k) .

• Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace.

La longueur du vecteur u appelée **norme** de u et notée $\|u\|$ est calculée par :

$$\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

• Soit $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et $B(x_B ; y_B ; z_B)$ deux points de l'espace.

La longueur du vecteur $\overrightarrow{AB}$ appelée **norme** de $\overrightarrow{AB}$ et notée $\|\overrightarrow{AB}\|$ est calculée par :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Remarques :

• Au lieu de noter $\|\overrightarrow{AB}\|$ (norme du vecteur), on peut aussi noter AB (distance de A à B).

Exemples :

Le plan est muni d'un repère (O, i, j, k) . Soit les points $A(5 ; 0 ; -2)$ et $B(3 ; 2 ; 2)$.

Calculer AB .

$$AB = \sqrt{(3-5)^2 + (2-0)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{4+4+16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

4.4. Droites parallèles, points alignés

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exemples :

L'espace est muni d'un repère (O, i, j, k) . Soit les points A(5 ; 0 ; -2), B(3 ; 2 ; 2), C(1 ; 0 ; 1) et D(-2 ; 3 ; 7).

- a) Est-ce que les points B, C et D sont alignés ? b) Est-ce que les droites (AB) et (CD) sont parallèles ?

B, C et D sont alignés

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \quad \overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{BD}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-3 \\ 0-2 \\ 1-2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -2-3 \\ 3-2 \\ 7-2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 = -5k \\ -2 = k \\ -1 = 5k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2}{5} \\ k = -2 \\ k = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

Donc B, C et D ne sont pas alignés.

(AB) et (CD) sont parallèles

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \quad \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-5 \\ 2-0 \\ 2+2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -2-1 \\ 3-0 \\ 7-1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 = -3k \\ 2 = 3k \\ 4 = 6k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2}{3} \\ k = \frac{2}{3} \\ k = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Donc (AB) et (CD) sont parallèles.

- c) Déterminer les réels a et b pour que A, B et E(a ; -3 ; b) soient alignés.

A, B et E sont alignés

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{R}) \quad \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AE}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-5 \\ 2-0 \\ 2+2 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a-5 \\ -3-0 \\ b+2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = k(a-5) \\ 2 = -3k \\ 4 = k(b+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{-2}{a-5} & (1) \\ k = -\frac{2}{3} & (2) \\ k = \frac{4}{b+2} & (3) \end{cases}$$

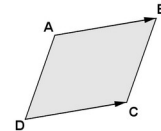
$$(2) \text{ dans } (1) : -\frac{2}{3} = \frac{-2}{a-5} \Leftrightarrow -2(a-5) = -6 \Leftrightarrow a-5 = 3 \Leftrightarrow a = 8$$

$$(2) \text{ dans } (3) : -\frac{2}{3} = \frac{4}{b+2} \Leftrightarrow -2(b+2) = 12 \Leftrightarrow b+2 = -6 \Leftrightarrow b = -8 \quad \text{donc}$$

$E(8 ; -3 ; -8)$

4.5. Parallélogrammes

ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.



Exemple :

L'espace est muni d'un repère (O, i, j, k) . Soit les points $I(5 ; 3 ; -1)$, $J(-3 ; 5 ; 2)$ et $K(2 ; 0 ; -1)$.

Déterminer le point L pour que IJKL soit un parallélogramme.

(IJKL) est un parallélogramme

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3-5 \\ 5-3 \\ 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-x_L \\ -y_L \\ -1-z_L \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -8 = 2 - x_L \\ 2 = -y_L \\ 3 = -1 - z_L \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_L = 10 \\ y_L = -2 \\ z_L = -4 \end{cases}$$

donc $L(10 ; -2 ; -4)$

5. Etude de Droites vectorielles et de Plans vectoriels :

5.1. Définir un plan vectoriel et une droite vectorielle :

Définition vectorielle d'une droite :

Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace.

La droite (D) passant par A et ayant la même direction que celle de $\vec{u}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

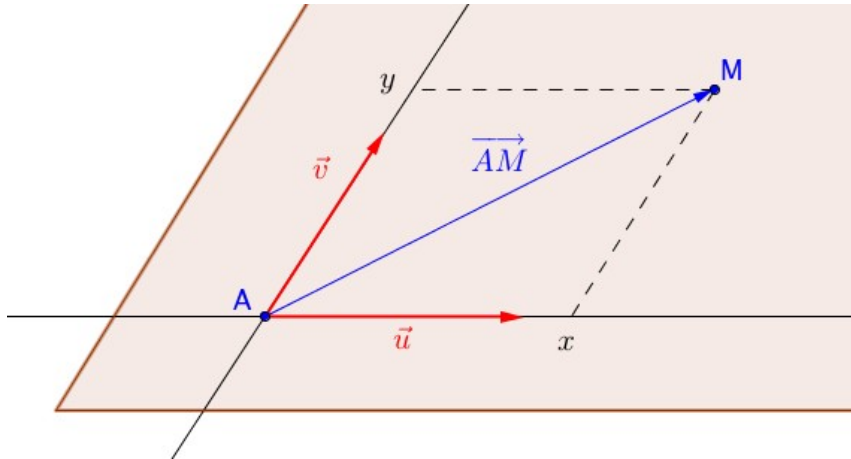
On note $(D) = (A; \vec{u})$.

2) Plan de l'espace

Définition vectorielle d'un plan :

Soit A un point et deux vecteurs non nuls de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires de l'espace.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$, avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ est le plan passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Le triplet $(A; \vec{u}; \vec{v})$ est un repère du plan.



Remarques :

- Un plan est donc totalement déterminé par un point et deux vecteurs non colinéaires.
- Deux plans déterminés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles.

5.2. Orthogonalité dans l'espace :

- Vecteur normal :

Un vecteur non nul $\vec{n}$ de l'espace est normal à un plan P lorsqu'il est orthogonal à tout vecteur admettant un représentant dans P .

Théorème : Un vecteur non nul $\vec{n}$ de l'espace est normal à un plan P s'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de P .

Une droite est orthogonale à toute droite d'un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

5.3. Déterminer les équations de droites et de plans vectoriels :

- Equation cartésienne d'un plan

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; i, j, k)$.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Un plan P de vecteur normal $\vec{n}$ non nul admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, si a , b et c sont non tous nuls, l'ensemble des points $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $ax + by + cz + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$, est un plan.

Exemple :

Le plan d'équation cartésienne $x - y + 5z + 1 = 0$ a pour vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Exemple :

Dans un repère orthonormé, déterminer une équation cartésienne du plan P passant

par le point $A \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Une équation cartésienne de P est de la forme $3x - 3y + z + d = 0$.

Le point A appartient à P donc ses coordonnées vérifient l'équation : $3 \times (-1) - 3 \times 2 + 1 + d = 0$ donc $d = 8$.

Une équation cartésienne de P est donc $3x - 3y + z + 8 = 0$.

- Intersection d'une droite et d'un plan

Dans un repère orthonormé, le plan P a pour équation $2x - y + 3z - 2 = 0$.

Soit $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- Démontrer que la droite (AB) et le plan P sont sécants.
- Déterminer leur point d'intersection.

Solution :

- Un vecteur normal de P est $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(AB) et P sont sécants si $\vec{n}$ et $\vec{AB}$ ne sont pas orthogonaux.

On a $\vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Comme $\vec{AB} \cdot \vec{n} = -2 \times 2 + 3 \times 3 = 5 \neq 0$, on conclut que (AB) et le plan P ne sont pas parallèles et donc sécants.

- Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 \\ z = -3 + 3t \end{cases} \text{ avec } t \text{ réel.}$$

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Le point intersection de (AB) et de P vérifie donc le système suivant :

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 \\ z = -3 + 3t \\ 2x - y + 3z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{On a donc } 2(1 - 2t) - 2 + 3(-3 + 3t) - 2 = 0$$

$$5t - 11 = 0 \text{ soit } t = \frac{11}{5}.$$

$$\text{D'où } \begin{cases} x = 1 - 2 \times \frac{11}{5} = -\frac{17}{5} \\ y = 2 \\ z = -3 + 3 \times \frac{11}{5} = \frac{18}{5} \end{cases}$$

$$\text{Ainsi la droite (AB) et le plan } P \text{ sont sécants en } M \left(-\frac{17}{5}; 2; \frac{18}{5} \right).$$

- Intersection de deux plans :

Dans un repère orthonormé, les plans P et P' ont pour équations respectives $-x + 2y + z - 5 = 0$ et $2x - y + 3z - 1 = 0$.

- Démontrer que les plans P et P' sont sécants.
- Déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection d .

Solution :

- P et P' sont sécants si leurs vecteurs normaux ne sont pas colinéaires.

$$\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{n}' \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Un vecteur normal de P est $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et un vecteur normal de P' est $\vec{n}' \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Les coordonnées des deux vecteurs ne sont pas proportionnelles donc leurs vecteurs ne sont pas colinéaires.

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- Le point de d , intersection de P et de P' , vérifie donc le système suivant :

$$\begin{cases} -x + 2y + z - 5 = 0 \\ 2x - y + 3z - 1 = 0 \end{cases}$$

On choisit par exemple x comme paramètre et on pose $x = t$. On a alors :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = t \\ -t + 2y + z - 5 = 0 \\ 2t - y + 3z - 1 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ z = -2y + t + 5 \\ -y + 3z = 1 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ z = -2y + t + 5 \\ -y + 3(-2y + t + 5) = 1 - 2t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ z = -2y + t + 5 \\ -y - 6y + 3t + 15 = 1 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ z = -2y + t + 5 \\ -7y = -14 - 5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2 + \frac{5}{7}t \\ z = -2\left(2 + \frac{5}{7}t\right) + t + 5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2 + \frac{5}{7}t \\ z = 1 - \frac{3}{7}t \end{cases} \end{aligned}$$

Ce dernier système est une représentation paramétrique de d , avec $t \in \mathbb{R}$.

- Plans perpendiculaires :

Deux plans sont perpendiculaires lorsqu'un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.

Exemple : Démontrer que deux plans sont perpendiculaires

Dans un repère orthonormé, les plans P et P' ont pour équations respectives $2x + 4y + 4z - 3 = 0$ et $2x - 5y + 4z - 1 = 0$.

Démontrer que les plans P et P' sont perpendiculaires.

Solution :

Les plans P et P' sont perpendiculaires si et seulement si un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.

Un vecteur normal de P est $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ et un vecteur normal de P' est $\vec{n}' \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 2 \times 2 + 4 \times (-5) + 4 \times 4 = 0$$

Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux donc les plans P et P' sont perpendiculaires.