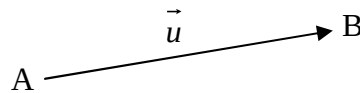


Produit Scalaire

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

I- Norme d'un vecteur

1°) Définition : $\vec{u}$ étant un vecteur de représentant le bipoint (A;B), on appelle norme de $\vec{u}$ le nombre réel positif noté : $\|\vec{u}\| = d(A;B)$.



$$\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = d(A;B) = AB$$

2°) Propriétés : Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs du plan

P₁) : $\forall \vec{u} \in \mathcal{V}, \|\vec{u}\| > 0$.

P₂) : $\forall \vec{u} \in \mathcal{V}, \|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$.

P₃) : $\forall \vec{u} \in \mathcal{V}, \forall \vec{v} \in \mathcal{V}$ et $\forall k \in \mathbb{R}$, si $\vec{u} = k \times \vec{v}$ alors $\|\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{v}\|$.

3°) Egalité de deux vecteurs non nuls

Deux vecteurs non nuls sont dits égaux s'ils ont même norme, même direction et même sens.

II- Produit scalaire

1°) Définition : soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.



On appelle **produit scalaire** du vecteur $\vec{u}$ par le vecteur $\vec{v}$ le réel noté : $\vec{u} \bullet \vec{v}$ tel que : $\vec{u} \bullet \vec{v} = \overline{OH} \times \overline{OB} \Leftrightarrow \overline{OA} \bullet \overline{OB}$ où H est le projeté orthogonal de A sur la droite (OB). $\vec{u} \bullet \vec{v} = \overline{OH} \times \overline{OB}$. (**Expression algébrique du produit scalaire**)

Remarque :

Si l'angle ($\overline{OA}$; $\overline{OB}$) est **aigu** alors le produit scalaire $\overline{OA} \bullet \overline{OB}$ est **positif** ;

Si l'angle ($\overline{OA}$; $\overline{OB}$) est **obtus** alors le produit scalaire $\overline{OA} \bullet \overline{OB}$ est **négatif**.

2°) Propriétés du produit scalaire

On démontre et on admettra les propriétés suivantes

$$P_1) \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$P_2) \quad (k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$P_3) \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{u} \cdot \vec{w}) \quad \text{et} \quad (\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} = (\vec{v} \cdot \vec{u}) + (\vec{w} \cdot \vec{u})$$

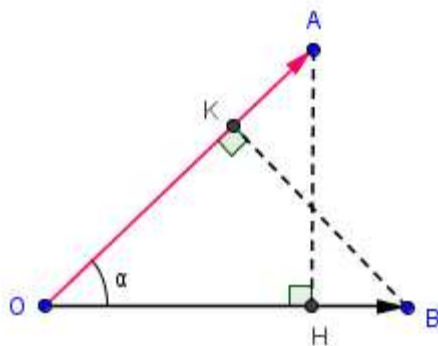
$$P_4) \quad \vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0 \quad \text{et si} \quad \vec{u} \neq \vec{0} \quad \text{alors} \quad \vec{u} \cdot \vec{u} > 0.$$

$$P_5) \quad \vec{u} \cdot \vec{0} = 0.$$

Remarque : $\vec{u} \cdot \vec{u}$ se note $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$ et « on lit carré scalaire de $\vec{u}$ ».

3°) Expression trigonométrique du produit scalaire

Soit $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ deux vecteurs du plan



$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OH} \times \overrightarrow{OB} = OH \times OB \\ &= \overrightarrow{OK} \times \overrightarrow{OA} = OK \times OA \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OH \times OB \quad \text{Calculons } OH ; \cos(\widehat{BOA}) = \frac{OH}{OA} \quad OH = OA \times \cos(\widehat{BOA})$$

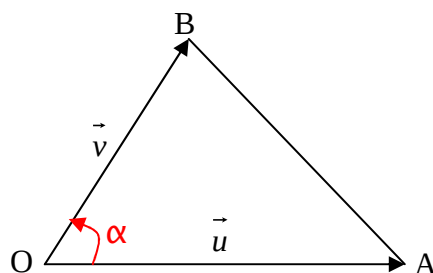
D'où $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos \alpha$ où α est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$

$$\cdot \quad \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos \alpha \quad . \quad (\text{Expression trigonométrique du produit scalaire}).$$

Remarque : Si $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ alors $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos \frac{\pi}{2} = 0$

4°) Produit scalaire et triangle

Soit O, A, B trois points non alignés du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.



Calculons le carré scalaire : $(\vec{u} - \vec{v})^2$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{v}^2 \Leftrightarrow -2\vec{u} \bullet \vec{v} = (\vec{u} - \vec{v})^2 - \vec{u}^2 - \vec{v}^2 \Leftrightarrow 2\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - (\vec{u} - \vec{v})^2$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \bullet \vec{v} = \frac{\vec{u}^2 + \vec{v}^2 - (\vec{u} - \vec{v})^2}{2} \text{ or } \vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA}.$$

D'où : $\overrightarrow{OA} \bullet \overrightarrow{OB} = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2}.$

5° Calcul du sinus d'un angle orienté

Soient $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs dans la base $\mathcal{B}(\vec{i}; \vec{j})$ et α une mesure de l'angle $(\vec{u}; \vec{v})$. Nous avons les formules suivantes :

$$\sin \alpha = \frac{\det(\vec{u}; \vec{v})}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} \quad \text{et} \quad \cos \alpha = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}.$$

III- Étude analytique du produit scalaire

1° Expression du produit scalaire dans une base orthonormale

Soit $(\vec{i}; \vec{j})$ une base orthonormée de $\mathcal{V}$ et soient $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs de $\mathcal{V}$. Calculons $\vec{u} \bullet \vec{v}$ en fonction des coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \bullet (x'\vec{i} + y'\vec{j}) = (xx')\vec{i}^2 + (xy')(\vec{i} \bullet \vec{j}) + (yx')(\vec{j} \bullet \vec{i}) + (yy')\vec{j}^2$$

$(\vec{i}; \vec{j})$ étant une base orthonormée on a : $\|\vec{i}\| = 1$; $\|\vec{j}\| = 1$ et $\vec{i} \bullet \vec{j} = 0$

D'où : $\vec{u} \bullet \vec{v} = xx' + yy'.$

2° Expression de la norme d'un vecteur dans une base orthonormée

Soit $\vec{u}(x; y)$ dans la base orthonormée $(\vec{i}; \vec{j})$. $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\|^2 &= \vec{u}^2 \\ &= (x\vec{i} + y\vec{j}) \bullet (x\vec{i} + y\vec{j}) \\ &= x^2\vec{i}^2 + (2xy)(\vec{i} \bullet \vec{j}) + y^2\vec{j}^2 \\ &= x^2 + y^2 \quad ; \quad \text{donc} \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

3° droites perpendiculaires

Soient les droites (D) de vecteur directeur $\vec{u}(a; b)$ et (D') de vecteur directeur $\vec{v}(a'; b')$ dans une base orthonormée.

$$(D) \perp (D') \Leftrightarrow \vec{u} \bullet \vec{v} = 0 \Leftrightarrow aa' + bb' = 0.$$

Exemple :

Soient (D) : $3x + 2y - 1 = 0$ et (D') : $2x - 3y + 5 = 0$.

Montrer que (D) et (D') sont perpendiculaires.

4°) Équation d'un cercle

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère orthonormé du plan $\mathcal{P}$. soit $I(a; b)$ un point du plan et r un réel strictement positif.

Le cercle de centre I et de rayon r est l'ensemble des points $M(x; y)$ de $\mathcal{P}$ tels que la distance de I à M est égale à r .

Soit $\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P} / d(I; M) = r\}$; $d(I; M) = r \Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \Leftrightarrow$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Remarque

Un point M appartient au cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB] \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0)$

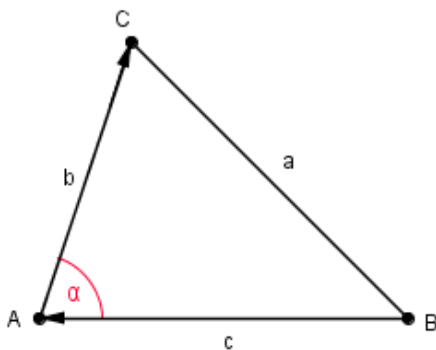
Exemple

Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$, où $A(2; 3)$ et $B(-1; 0)$.

IV- Applications du produit scalaire

1°) Généralisation du théorème de Pythagore (ou loi du cosinus)

a) Soit ABC un triangle quelconque tels que $AB = c$; $AC = b$; $BC = a$.



$$\begin{aligned} \text{Comme } \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} ; \text{ on peut écrire} \\ \overrightarrow{BC}^2 &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 \\ \overrightarrow{BC}^2 &= \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{BC}^2 &= \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\alpha) \end{aligned}$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \times AB \times AC \times \cos(\alpha)$$

- Si l'angle $\hat{A}$ est droit alors on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2$, car $\cos(\alpha) = 0$.

On retrouve ainsi le théorème de Pythagore

b) Conclusion :

Dans un triangle ABC si on désigne par $AB = c$; $AC = b$; $BC = a$;
 $\text{mes}(\hat{BAC}) = \hat{A}$; $\text{mes}(\hat{ACB}) = \hat{C}$; $\text{mes}(\hat{CBA}) = \hat{B}$, alors on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \times b \times c \times \cos(\hat{A})$$

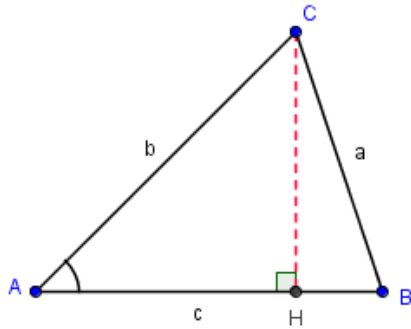
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \times a \times c \times \cos(\hat{B})$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \times a \times b \times \cos(\hat{C})$$

Relation **d'AL-KASHI**

2°) Aire d'un triangle

L'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC est donnée par la formule



$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times b \times c \times \sin(\hat{A})$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin(\hat{C})$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times a \times c \times \sin(\hat{B})$$

3°) Formule des trois sinus

On utilise les formules précédentes

- De $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times b \times c \times \sin(\hat{A}) = \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin(\hat{C})$ on déduit $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$
- De $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times b \times c \times \sin(\hat{A}) = \frac{1}{2} \times a \times c \times \sin(\hat{B})$ on déduit $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$
- D'où : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2 \times R$.

(R étant le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC).

4°) Ensemble (E) des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = k$ ($k \in \mathbb{R}$)

Considérons un segment [AB] de milieu I. soit M un point du plan.

	$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \bullet (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \\ &= \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \bullet (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA} \bullet \overrightarrow{IB} \\ &= \overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{MI} \bullet (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + IA \times IB \times \cos(\pi) \\ &= \overrightarrow{MI}^2 - (IA \times IB) \\ &= \overrightarrow{MI}^2 - \left(\frac{AB}{2} \times \frac{AB}{2} \right) \\ &= \overrightarrow{MI}^2 - \frac{AB^2}{4} \end{aligned}$
--	--

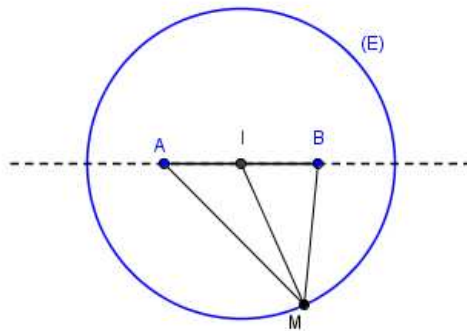
$$\text{D'où : } \overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = k \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}^2 - \frac{AB^2}{4} = k \Leftrightarrow IM^2 = k + \frac{AB^2}{4}.$$

$$\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = k \Leftrightarrow IM^2 = k + \frac{AB^2}{4}$$

- Si $k + \frac{AB^2}{4} < 0$ alors $(E) = \emptyset$
- Si $k + \frac{AB^2}{4} = 0$ alors $(E) = \{ I \}$
- Si $k + \frac{AB^2}{4} > 0$ alors $IM = \sqrt{k + \frac{AB^2}{4}}$; d'où (E) est le cercle de centre I et de rayon $r = IM$.

Exemple

Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 2$. Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = 8$.



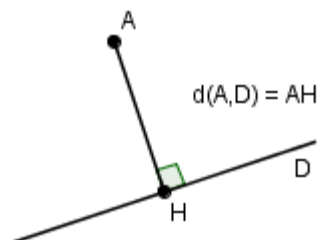
Soit I le milieu de $[AB]$; $\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = k \Leftrightarrow IM^2 = k + \frac{AB^2}{4}$

$\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = 8 \Leftrightarrow IM^2 = 9 \Leftrightarrow IM = 3$. D'où l'ensemble (E) des points M cherchés est le cercle de centre I et rayon $r = 3$.

5°) Distance d'un point à une droite

On démontre et admettra que : si $(\mathcal{D})$ est la droite d'équation : $ax + by + c = 0$ ($a ; b \neq (0 ; 0)$) et si $A(x_A; y_A)$ est un point du plan, alors la distance de A à $(\mathcal{D})$ est :

$$d(A ; \mathcal{D}) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



I – Notion de points pondérés

a) Définition :

On appelle **point pondéré** tout couple $(A ; \alpha)$ formé d'un point A du plan et d'un réel α .

b) Notation : $(A ; \alpha)$ se lit « A affecté du coefficient α » ou $A(\alpha)$.

II – Barycentre de 2 points pondérés

1°) Activité : Soient $(A ; a) ; (B ; b)$ deux points pondérés et M un point du plan P. Discuter suivant les valeurs de $(a+b)$ l'ensemble des points M du plan vérifiant : $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

-0-

$M \in P / a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ (fixons le point A)

$$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow (a+b)\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \boxed{(a+b)\overrightarrow{AM} = b\overrightarrow{AB}}.$$

a) 1^{er} cas : Si $(a+b) \neq 0$ alors $\overrightarrow{AM} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$. Donc M est unique dans le plan

b) 2^{ème} cas : Si $(a+b) = 0$ alors $b\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow$ soit $b = 0$ ou $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$. Donc tous les points M du plan sont solutions.

2°) Définition :

Etant donnés deux points pondérés $(A ; a) ; (B ; b)$ avec $a+b \neq 0$. On appelle barycentre des points pondérés $(A ; a) ; (B ; b)$ l'unique point G du plan tel que : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.

$$\boxed{[G \text{ barycentre de } (A ; a) ; (B ; b)] \Leftrightarrow [a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}]}$$

3°) Conséquences

Étant donnés deux points pondérés $(A ; a) ; (B ; b)$ et $k \neq 0$ un réel. Si G est barycentre de

$(A ; a) ; (B ; b)$ alors G est barycentre de $(A ; ka) ; (B ; kb)$.

4°) Remarque

Si $a = 1$ et $b = 1$ alors G barycentre de $(A ; 1) ; (B ; 1)$ est appelé **l'isobarycentre** ou **l'équibarycentre** des points pondérés $(A ; 1) ; (B ; 1)$.

5°) Théorème

Étant donnés deux points pondérés $(A ; a) ; (B ; b)$. Si G est barycentre des points pondérés $(A ; a) ; (B ; b)$ alors les points A ; B ; G sont alignés.

Démonstration

G barycentre des points pondérés (A ; a) ; (B ; b) $\Leftrightarrow a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ (fixons A)
 $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow (a+b)\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow (a+b)\overrightarrow{AG} =$
 $b\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}.$

$\overrightarrow{AG}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$. D'où A ; B ; G sont alignés.

III – Coordonnées du barycentre de 2 points pondérés

1°) Définition

Soient $A(x_A; y_A)$; $B(x_B; y_B)$ deux points du plan dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ et $G(x_G; y_G)$ barycentre de A(a) et B(b). on appelle **coordonnées barycentriques** (ou coordonnées du barycentre G) **l'unique couple $(x_G; y_G)$** tels que :

$$x_G = \frac{ax_A + bx_B}{a+b} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{ay_A + by_B}{a+b}$$

2°) Exemple : soit les A(1 ; 2) et B(-3 ; -2). Trouver les coordonnées du barycentre G des points pondérés (A ; -2) et (B ; 4).

$$x_G = \frac{-2-12}{2} = -7 \quad ; \quad y_G = \frac{-4-8}{2} = -6.$$

D'où G(-7 ; -6).

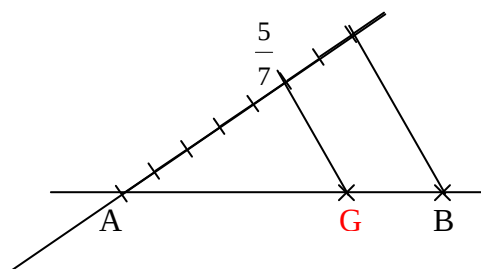
IV – Construction du barycentre de 2 points pondérés

Application : construire le barycentre G des 2 points pondérés A et B dans les cas suivants

- a) (A ; 2) et (B ; 5)
- b) (A ; -5) et (B ; 2)
- c) (A ; 2) et (B ; 4)

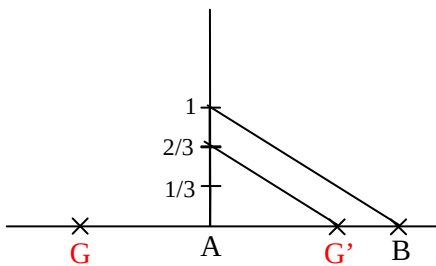
Solution

- a) G barycentre de (A ; 2) et (B ; 5)



$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GB} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{AB} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 7\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{AB} &= \vec{0} \Leftrightarrow 7\overrightarrow{AG} = 5\overrightarrow{AB} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} &= \frac{5}{7}\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

b) G barycentre de (A ; -5) et (B ; 2)



$$-5\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -5\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG} = -2\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$\text{Posons } \overrightarrow{AG'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \text{ donc } \overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AG'}$$

V – Barycentre de 3 points pondérés

1°) Propriétés

Le barycentre de plusieurs points pondérés peut se ramener de proche en proche à la recherche du barycentre de deux points pondérés.

Exemple :

Soient (A; α) ; (B; β) ; (C; γ) trois points pondérés tels que : $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et $\alpha + \beta \neq 0$. Soit G_1 barycentre des points pondérés (A; α) et (B; β) ; on a :

$$\alpha\overrightarrow{G_1A} + \beta\overrightarrow{G_1B} = \vec{0} \Leftrightarrow (\text{en fixant A}) \alpha\overrightarrow{G_1A} + \beta\overrightarrow{G_1A} + \beta\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$(\alpha + \beta)\overrightarrow{G_1A} + \beta\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{AG_1} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB} = \vec{0}}. \text{ Soit G barycentre des points}$$

pondérés (G_1 ; $\alpha + \beta$) et (C; γ) ; on a :

$$(\alpha + \beta)\overrightarrow{GG_1} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow (\text{en fixant } G_1) (\alpha + \beta)\overrightarrow{GG_1} + \gamma\overrightarrow{GG_1} + \gamma\overrightarrow{G_1C} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$(\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{GG_1} + \gamma\overrightarrow{G_1C} = \vec{0} \Leftrightarrow (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{G_1G} = \gamma\overrightarrow{G_1C} = \vec{0} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{G_1G} = \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma}\overrightarrow{G_1C} = \vec{0}}.$$

2°) Définition

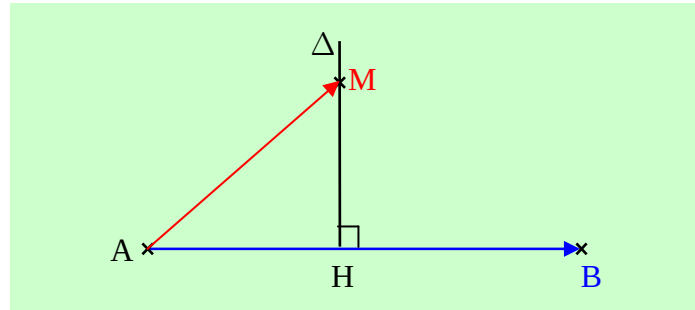
Étant donnés trois points pondérés (A; α) ; (B; β) ; (C; γ) tel que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

On appelle **barycentre** des points pondérés (A; α) ; (B; β) ; (C; γ) **l'unique point G** tel que : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

3°) Exemple : Soit ABC un triangle. Déterminer et construire le barycentre G des points pondérés (A ; 1) ; (B ; 2) ; (C ; -4).

VI – Ligne de niveau de l'application $M \mapsto \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = k \quad (k \in \mathbb{R})$

Déterminons dans le plan P l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = k$.
Soit M un point du plan et H son projeté orthogonal sur (AB).



On sait que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overline{AH} \times \overline{AB}$. Étant donné un réel k, on a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = k \Leftrightarrow \overline{AH} \times \overline{AB} = k \Leftrightarrow \overline{AH} = \frac{k}{\overline{AB}}$. Ainsi M vérifie $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = k$ si et seulement si son projeté orthogonal sur (AB) est le point H déterminé par $\overline{AH} = \frac{k}{\overline{AB}}$.

L'ensemble des points M cherché est la droite (Δ) perpendiculaire à (AB) au point H tel que :

$$\overline{AH} = \frac{k}{\overline{AB}}$$

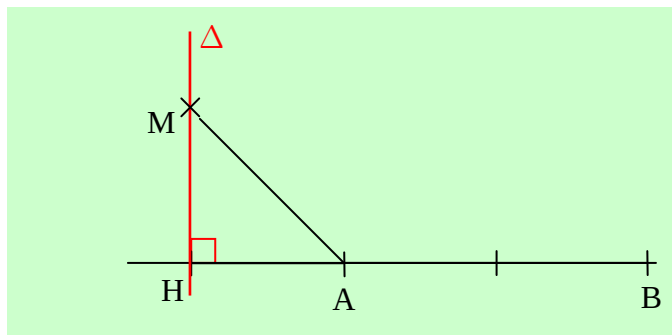
Application : soit deux points A et B tels que $AB = 2$ et l'application

$$f : P \rightarrow P \\ M \mapsto \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM}$$

- Construire les lignes de niveau -1 ; 0 de f .
- Déterminer l'ensemble des points M tels que $f(M) = 2$.

Solution a)

- $K = -1$

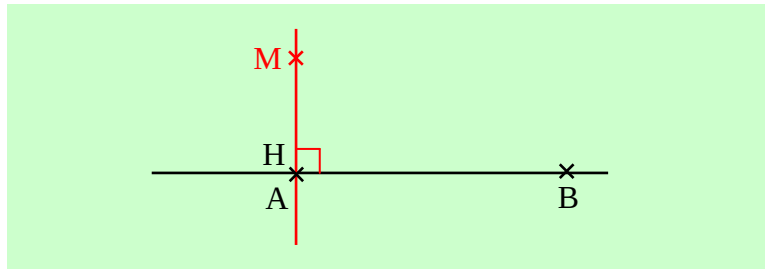


$$\begin{aligned} K = -1 ; \quad f(M) = -1 &\Leftrightarrow \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overline{AH} \times \overline{AB} &\Leftrightarrow \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = k &\Leftrightarrow \\ \overline{AH} \times \overline{AB} = -1 &\Leftrightarrow \overline{AH} = \frac{-1}{2}. \end{aligned}$$

L'ensemble des points M cherchés est la droite (Δ) perpendiculaire à (AB) passant par le point H tel que : $\overline{AH} = \frac{-1}{2}$

- $K = 0$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AH} = 0 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AH} = 0$; les points A et H sont confondus.

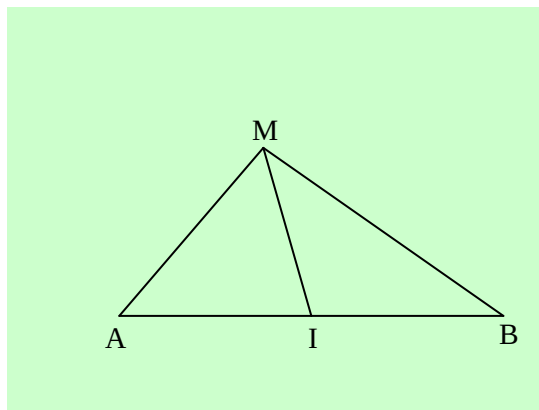


L'ensemble des points M est la droite perpendiculaire à (AB) passant par H.

VII – Ligne de niveau de l'application $M \mapsto \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = k \quad (k \in \mathbb{R})$

Déterminons l'ensemble (E) des points M du plan tel que $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = k$; ($k \in \mathbb{R}$)

Soit I le milieu de [AB]. $\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = k \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = k \Leftrightarrow$



$$\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2 = k$$

$$\Leftrightarrow$$

$$2\overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = k$$

$$\text{comme } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$$

$$2\overrightarrow{MI}^2 + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2 = k \text{ comme } \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$$

$$2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{IA}^2 = k \Leftrightarrow$$

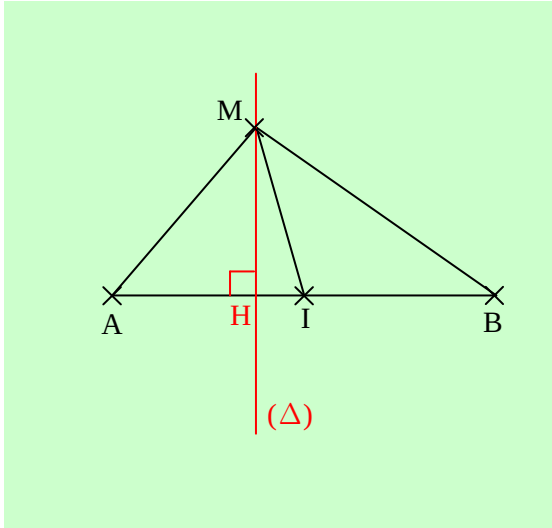
$$2\overrightarrow{MI}^2 + 2\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = k \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}^2 + \frac{AB^2}{2} = k \Leftrightarrow$$

$$2\overrightarrow{MI}^2 = k - \frac{AB^2}{2} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI}^2 = \frac{2k - AB^2}{4}$$

- 1^{er} cas : Si $2k - AB^2 < 0$, alors l'ensemble (E) des points M cherchés est le vide, $(E) = \emptyset$.
- 2^{ème} cas : Si $2k - AB^2 = 0$, alors l'ensemble (E) des points M cherchés est $\{I\}$. $(E) = \{I\}$.
- 3^{ème} cas : Si $2k - AB^2 > 0$, alors $MI = \sqrt{\frac{2k - AB^2}{4}}$. L'ensemble (E) des points M cherchés est le cercle de centre I et de rayon $r = \sqrt{\frac{2k - AB^2}{4}}$.

VIII – Ligne de niveau de l'application $M \mapsto \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = k \quad (k \in \mathbb{R})$

Déterminons l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = k$.
Soit I milieu de $[AB]$, M un point du plan et H le projeté orthogonal de M sur (AB) .



$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA})^2 \Leftrightarrow \\ \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 &= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 - \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IA}^2 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 &= 4\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 4\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{IA} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 &= 4\overrightarrow{IH} \times \frac{\overrightarrow{AB}}{2} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{IH} \times \overrightarrow{AB}} \\ \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 &= k \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IH} \times \overrightarrow{AB} = k \Leftrightarrow \\ \boxed{\overrightarrow{IH} &= \frac{k}{2\overrightarrow{AB}}} \end{aligned}$$

L'ensemble des points M cherchés est la droite (Δ) perpendiculaire à (AB) au

point H tel que : $\boxed{\overrightarrow{IH} = \frac{k}{2\overrightarrow{AB}}}$