

2.4. Droites parallèles-Droites orthogonales (ou perpendiculaires)

Soit $(\Delta) : ax + by + c = 0$ et $(\Delta') : a'x + b'y + c' = 0$

$$\diamond (\Delta) // (\Delta') \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \Leftrightarrow a'b = ab'$$

$$\diamond (\Delta) \perp (\Delta') \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$$

Soit $(D): y = mx + p$ et $(D'): y = m'x + p'$

$$\diamond (D) // (D') \Leftrightarrow m = m'$$

$$\diamond (D) \perp (D') \Leftrightarrow m \times m' = -1$$

Evaluation

Dans le plan muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on donne

$(D_m): (m - 2)x + (m + 1)y + 3 = 0$ avec m paramètre réel.

- 1) Trouve si possible m pour que (D_m) passe par le point $A\left(\frac{2}{7}\right)$.
- 2) Trouve si possible m pour que (D_m) passe par le point $B\left(\frac{1}{-1}\right)$.
- 3) Détermine m pour que (D_m) soit parallèle à la droite $(\Delta) : 9x - 5y + 1 = 0$.
- 4) Détermine m pour que (D_m) perpendiculaire à $(\Delta') = 4x - y + 7 = 0$.
- 5) Trouve une équation cartésienne de chacune des droites : (D_0) , (D_2) et (D_{-1}) .
- 6) Détermine une équation cartésienne de la droite (Δ) passant par le point A et parallèle à (D_0) .
- 7) Trouve une équation cartésienne de la droite (Δ_2) passant par le point A et perpendiculaire à (D_0) .
- 8) Trouve l'équation normale à (D_0) .
- 9) Calcule la distance du point A à (D_0) .
- 10) Détermine m pour que $d(A; (D_m)) = 3\sqrt{5}$.
- 11) Trace les droites (D_0) , (D_{-1}) et (D_2) .

Solution :

Evaluation

Exercice 1 : Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) Trouve une équation cartésienne puis une représentation paramétrique du cercle $(\mathcal{C}_1)$ de centre $O\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et de rayon 3.
- 2) Trouve une équation cartésienne puis une représentation paramétrique du cercle $(\mathcal{C}_2)$ de centre $I\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et de rayon 5.
- 3) Trouve une équation cartésienne du cercle passant par $A\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, B\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}, C\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
- 4) Trouve une équation cartésienne puis une représentation paramétrique du cercle $(\mathcal{C}_4)$ de diamètre $[DE]$ avec $E\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, D\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$.
- 5) Construis $(\mathcal{C}_1), (\mathcal{C}_2), (\mathcal{C}_4)$
- 6) Trouve les coordonnées des points d'intersection de $(\mathcal{C}_1)$ et $(\Delta): y = x - 1$

Exercice 2

Parmi les équations ci-dessous indique celles d'un cercle :

$$(E_0): x^2 + y^2 = -2$$

$$(E_1): x^2 + y^2 = 2$$

$$(E_2): 3x^2 + 2y^2 = 5$$

$$(E_3): x^2 + y^2 - 7x - 3y + 50 = 0$$

$$(E_4): x^2 + y^2 + 4x + 2y - 20 = 0$$

$$(E_5): \begin{cases} x = 5 \cos \theta \\ y = -5 \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in \mathbb{R} ; \quad (E_6): \begin{cases} x = 3 - 7 \cos \theta \\ y = -2 - 7 \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in \mathbb{R}$$

Exercice 3

On donne le cercle $(\mathcal{C}): x^2 + y^2 - 3y - 1 = 0$ et le point $A(1; 3)$.

- 1) Vérifie que $A \in (\mathcal{C})$
- 2) Trouve une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point A .

Evaluation générale

Exercice 01 S

Dans le plan muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on considère la droite

$(D_m): mx + (2m-1)y + 2 - m = 0$, la droite $(D): 7x - 3y + 1 = 0$ et les points $A(-1; 3)$ et $B(0; \frac{1}{2})$

- 1) Construis les droites (D_0) , (D_1) et (D_{-1})
- 2) Précise trois vecteur directeurs et trois vecteurs normaux de (D_0) , (D_1) et (D_{-1})
- 3) Précise si possible la pente de (D_0) , (D_1) et $(D_{\frac{1}{2}})$
- 4) Calcule $d(B; D_1)$
- 5) Détermine les valeurs de m pour que :
 - a) $d(B; (D_m)) = \frac{3\sqrt{2}}{4}$
 - b) (D_m) et (D) soient perpendiculaires.
 - c) (D_m) et (D) soient parallèles.
 - d) $B \in (D_m)$.
- 6) Détermine une équation cartésienne de la droite passant par B et orthogonale à (D_1)
- 7) Détermine une équation cartésienne de la droite passant par B et parallèle à (D_1) .
- 8) Trouve une équation cartésienne puis une équation paramétrique de la droite (D_2) passant par B et d'angle orienté $\frac{\pi}{3}$.
- 9) Trouve une équation cartésienne puis une équation paramétrique de la droite (D_2) passant par B et A .

Exercice 02 S

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ on considère les points $A(7; 3)$, $B(3; 5)$ et $C(4; -3)$.

11. Trouve une équation cartésienne puis une représentation paramétrique du cercle passant par $A(7; 3)$, $B(3; 5)$ et $C(4; -3)$.
12. Détermine une équation cartésienne puis une représentation paramétrique du cercle (C_1) de diamètre $[AB]$.
13. Trouve une équation cartésienne puis une représentation paramétrique du cercle (C_2) de centre $O(0; 0)$ et de rayon 2.
14. Trouve une équation cartésienne puis une représentation paramétrique du cercle (C_3) de centre $C(4; -3)$ et de rayon 2.
15. Trouve une équation de la tangente (T) à (C_1) en A .
16. Trouve une équation réduite de la médiatrice (Δ_1) du segment $[AB]$.
17. Trouve une équation cartésienne puis une équation paramétrique de la droite (Δ_2) passant par A et d'angle orienté $\frac{3\pi}{4}$.
18. Calcule la distance de C à la droite (Δ_3) d'équation $x - y - 4 = 0$.
19. Trouve les coordonnées des points d'intersections de $(\Delta_4): -2x + y = -6$ et du cercle $(C_2): x^2 + y^2 - 10x - 8y = -36$.

20. Trouve les coordonnées du point G_1 centre de gravité du triangle ABC .

21. Construis le parallélogramme $ABDC$ puis $(C_2), (T); (\Delta_1)$.

Exercice 03 C

1) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs orthogonaux tels que $\|\vec{u}\| = 4$ et $\|\vec{v}\| = 5$. Déterminer le réel x pour que :

a) $(x\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = 13$

b) $(x\vec{u} + \vec{v})^2 = 34$

c) $(x\vec{u} + \vec{v}) \cdot (x\vec{u} + \vec{v}) = 23$

2) Dans le plan muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on considère les droites vectorielles

$D_{\vec{u}}$ et $D_{\vec{v}}$ engendrées respectivement par les vecteurs $\vec{u} = (m+2)\vec{i} - 2\vec{j}$ et

$\vec{v} = -2m\vec{i} - (m+2)\vec{j}$. Détermine l'ensemble des valeurs de m pour que :

a) $D_{\vec{u}} = D_{\vec{v}}$ b) $D_{\vec{u}}$ et $D_{\vec{v}}$ soient orthogonales

Exercice 04 S

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) Trouve une représentation paramétrique du cercle (C) d'équation :

$$x^2 + y^2 + 7x - 4y - 5 = 0$$

2) On donne les points $A(2;3); B(-7;5)$

a) Trouve une équation paramétrique du cercle (C_1) de diamètre $[AB]$

b) Détermine et construis si possible l'ensemble (E_1) des points M du plan tels que :

$$\frac{MA}{MB} = \frac{3}{5}$$

c) Trouve la distance du point $C(-1;-3)$ à la droite (AB)

d) Détermine et construis si possible l'ensemble (E_1) des points M du plan tels que :

$$-2MA^2 + 6MB^2 = 100$$

e) Détermine et construis si possible l'ensemble (E_1) des points M du plan tels que :

$$-3MA^2 + 3MB^2 = -12$$

f) Discute suivant les valeurs de k l'ensemble (E_1) des points M du plan tels que :

$$2MA^2 - MB^2 = k$$

Exercice 05 C

Soit ABC un triangle tel que $AB = 3\text{cm}; AC = 4\text{cm}; BC = 5\text{cm}$

1) Détermine et construis le barycentre G des points pondérés $(A, 5); (B, -3); (C, 2)$.

2) On donne l'application f de P dans P définie par : $f(M) = 5MA^2 - 3MB^2 + 2MC^2$

- a) Discute suivant les valeurs de k l'ensemble (E_k) des points M du plan tels que :
 $f(M) = k$
- b) Détermine et construis si possible l'ensemble (E) des points M du plan tels que :
 $f(M) = -25$

Exercice 06 S

Dans le plan P est rapporté à un repère (O, I, J) , on donne les points $A(1; 0); B(0; 1); C(2, 1)$.

- 1) Calcule $\|\overline{AB}\|$; $\|\overline{AC}\|$; $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$. Déduis-en la nature du triangle ABC .
- 2) Détermine et construis le barycentre G des points pondérés $A; B$ et C affectés respectivement des coefficients $2; 1; 1$.
- 3) Montre que pour tout point M du plan, on a :
 $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 4MG^2 + GC^2 + GB^2 + 2GA^2$
- 4) Calcule $GA; GB$ et GC puis détermine et construis l'ensemble (D) des points M du plan P tels que : $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 4$
- 5) Calcule la distance de G à la droite (Δ) d'équation : $3x + 4y - \frac{5}{2} = 0$. Que peut-on conclure ?
- 6) Montre que l'ensemble (E) des points M tels que : $d(M, (\Delta)) = d(M, (AB))$ est la réunion de deux droites (D_1) et (D_2) orthogonales appelées bissectrices de (Δ) et (AB)
- 7) Trouve les coordonnées du point H pour que $ABHC$ soit un carré.
- 8) Calcule l'aire et le périmètre du carré $ABHC$.
- 9) Trouve les coordonnées du point G_1 centre de gravité du triangle ABC .
- 10) Calcule $AG_1; BG_1$ et CG_1 .
- 11) Trouve une équation paramétrique du cercle (C_1) de centre A et passant par C .
- 12) Trouve une équation cartésienne de la droite (Δ_1) passant par C et tangente au cercle (C_1) .
- 13) Calcule le périmètre et l'aire du triangle ABC ; le rayon R du cercle circonscrit au triangle ABC et le rayon r du cercle inscrit au triangle ABC .
- 14) Trace (Δ_1) et (C_1) .
- 15) Détermine et construis si possible l'ensemble (F) des points M du plan P tels que :
 a) $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{4}$ b) $-3MA^2 + 5MB^2 = 9$ c) $-8MA^2 + 8MB^2 = -24$ d) $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 3$

Exercice 07 C

les parties 1,2 et 3 sont indépendantes

- 1) Soit A, B, C et D quatre points du plan P tels que $\overline{AB} = \frac{3}{5}\overline{CD}$. Montre que D est

barycentre des points $(A, a), (B, b)$ et (C, c) . Construis le point D .

- 2) Soit A et B deux points du plan P tels que $AB = 4$ et f l'application définie par

$$f: P \rightarrow \mathbb{R}$$

$$M \mapsto 3MA^2 + 6MB^2$$

Détermine l'ensemble des points M du plan tel que $f(M) = 120$

- 3) Soit A, B et C trois points non alignés de P et G bar $\{(A, -3); (B, 1); (C, 1)\}$.

a) Démontre que A est le centre de gravité du triangle GBC .

b) Construis G .

Exercice 08 S

Soit deux points A et B tels que $AB = 5$ cm

- 1) Détermine et construis le barycentre G des points pondérés $(A, 4)$ et $(B, 1)$.
- 2) Détermine l'ensemble (E) des points M du plan tel que $4MA^2 + MB^2 = 40$
- 3) Soit l'ensemble (F) des points M du plan P tel que $4MA^2 - MB^2 = k$, k un réel.
- a) Discute suivant les valeurs de k l'ensemble des points de (F) .
- b) Détermine la valeur de k pour que G soit élément de (F) .
- 4) Détermine l'ensemble (H) des points M du plan tel que : $\frac{MA}{MB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Exercice 09 S

Soit ABC un triangle tel que $AB = 10$ cm, $AC = 6$ cm, $BC = 8$ cm

- 1) Trace ce triangle. Détermine en degré la mesure de chaque angle du triangle ABC . En déduire la nature du triangle ABC .
- 2) Détermine la longueur de chaque médiane du triangle ABC .
- 3) Calcule l'aire et le périmètre du triangle ABC .
- 4) Détermine IA avec I le centre de gravité du triangle ABC .
- 5) Détermine le rayon R du cercle circonscrit et le rayon r du cercle inscrit au triangle ABC .
- 6) Détermine et construis le barycentre G des points pondérés $(A, 1); (B, -2); (C, 3)$.
- 7) On donne l'application f de P dans P définie par $f(M) = MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2$
- 8) Discute suivant les valeurs de k l'ensemble (E_k) des points M du plan tels que :
 $f(M) = k$
- 9) Détermine et construis si possible l'ensemble (E) des points M du plan tels que :
 $f(M) = 8$

Exercice 10

Dans le plan P est rapporté à un repère (O, I, J) , on donne les points

$$A(1; 2); B(-1; 3); C(2; -3).$$

- 1) Calcule $\|\overrightarrow{AB}\|$; $\|\overrightarrow{AC}\|$; $\|\overrightarrow{BC}\|$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.
- 2) Détermine et construis le barycentre G des points pondérés $A; B$ et C affectés respectivement des coefficients $-3; 5; 2$.
- 3) Montre que pour tout point M du plan, on a :

$$-3MA^2 + 5MB^2 + 2MC^2 = 4MG^2 + 2GC^2 + 5GB^2 - 3GA^2$$
- 4) Calcule $GA; GB$ et GC puis détermine et construis si possible l'ensemble (D) des points M du plan P tels que : $-3MA^2 + 5MB^2 + 2MC^2 = 7$
- 5) Calcule la distance de G à la droite (Δ) d'équation : $x + y - 7 = 0$.
- 6) Détermine une équation cartésienne puis une représentation paramétrique du cercle de Diamètre $[AB]$.
- 7) Trouve les coordonnées du point H orthocentre du triangle ABC .
- 8) Trouve les coordonnées du point G_1 centre de gravité du triangle ABC .
- 9) Calcule $AG_1; BG_1$ et CG_1 .
- 10) Trouve une équation paramétrique du cercle (C_1) de centre A et passant par C .
- 11) Trouve une équation cartésienne de la droite (Δ_1) passant par C et tangente au cercle (C_1) .
- 12) Calcule le périmètre et l'aire du triangle ABC , le rayon R du cercle circonscrit au triangle ABC et le rayon r du cercle inscrit au triangle ABC .
- 13) Trace (Δ_1) et (C_1) .
- 14) Détermine et construis si possible l'ensemble (F) des points M du plan P tels que :
 b) $\frac{MA}{MB} = \frac{2}{3}$ b) $-MA^2 + 2MB^2 = 7$ c) $-7MA^2 + 7MB^2 = -14$
 d) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 7$ e) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 6$
- 15) Détermine une équation cartésienne de la droite (Δ_2) médiatrice du segment $[AB]$. Déduis-en une représentation paramétrique de (Δ_2) , un vecteur directeur, un vecteur normal et la pente de (Δ_2) .
- 16) Détermine $(\Delta_2) \cap (C_1)$.
- 17) Détermine l'ensemble (E_k) des points M tel que :

$$x^2 + y^2 - 2kx - 4ky + 4k^2 + 1 = 0$$
 . Construis (E_2)

Exercice 11

Dans le plan P est rapporté à un repère (O, I, J) , on donne les points

$$A(4; 7); B(-12; -5); C(13; -5)$$

- 1) Détermine une équation cartésienne des droites $(AB), (AC), (BC)$.

- 2) Détermine une équation cartésienne des bissectrices intérieures du triangle ABC .
- 3) Vérifie que ces trois droites sont concourantes en un point Ω appelé centre du cercle inscrit au triangle ABC . Déduis-en une équation cartésienne du cercle (C_1) inscrit dans le triangle ABC .
- 4) Détermine une équation cartésienne de la droite (Δ) normale à la droite (AB) et passant par $D(1; 2)$.
- 5) Détermine une équation cartésienne normale à la droite (AB) .
- 6) Construis le triangle ABC et (C_1) .
- 7) Détermine les coordonnées de G centre de gravité du triangle ABC .
- 8) Détermine et construis si possible l'ensemble des points $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 7$.

Exercice 12

- 1) EFG est un triangle tel que $EF = g$; $FG = e$ et $EG = f$. On donne $A = 3\text{cm}^2$ l'aire du triangle EFG ; $f = 3\text{cm}$ et $\text{mes}(\hat{E}) = 45^\circ$.
 - a) Calcule g et e .
 - b) Calcule $\text{mes}(\hat{F})$ et $\text{mes}(\hat{G})$.
 - c) Calcule $\overline{GE} \cdot \overline{FG}$ et les rayons des cercles circonscrit et inscrit au triangle EFG .

Exercice 13

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques du plan, x un réel donné

- 1- Développe l'expression $f(x) = (x\vec{u} + \vec{v})^2$. On obtient ainsi un trinôme du second degré en x . Quel est le signe de $f(x)$?
- 2- Justifie que le discriminant de ce trinôme est toujours négatif. Déduis-en que $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$. Cette inégalité est connue sous le nom d'inégalité de Cauchy Schwartz.