

Classe : 11^{ème} science

Chapitre : 1 **Durée : H**

Les Applications

Domaine : Sciences, Mathématiques et Technologies.

Compétences : Résoudre une situation problème, Communiquer des messages utilisant le langage et le symbolisme Mathématiques.

Composantes : Diagnostiquer la situation problème, mettre à l'essai des pistes de solutions et partager les informations relatives à la démarche et formuler les résultats.

Manifestations : Sélectionner les données mathématiques, scientifiques et technologiques qui sont en rapport avec la situation, établir des relations entre les données retenues ; Inventorier des différentes pistes de solution, Choisir une piste et l'appliquer.

Ressource :

Ressources humaines : Professeur, élèves,

Ressources Matérielles : règle ; compas ; crayon ; Chiffon ; craie ...

Stratégies d'animation : Travaux en groupe (pédagogie active).

Contenu :

Séquence 1 : Utilisation des matériels de géométrie, rapports trigonométriques dans un triangle rectangle (02 heures)

I. Définitions

1. Définition d'une fonction :

Soient A et B deux ensembles non vides, f une relation de A vers B.

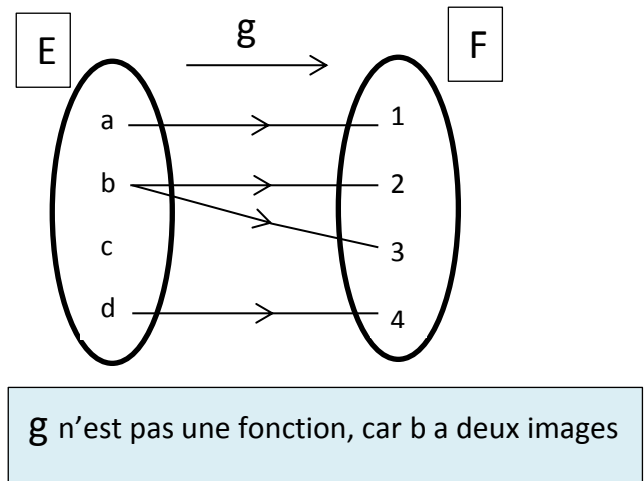
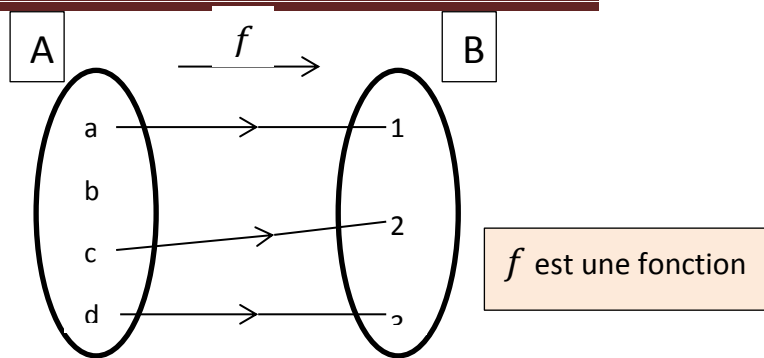
On dit que f est une fonction de A vers B, si à chaque élément de l'ensemble de départ A associe zéro ou un élément de l'ensemble d'arrivée B.

On note $f : A \rightarrow B$

$$x \mapsto f(x)$$

On dit que x est un antécédent de y par f, si $y = f(x)$

Exemple :

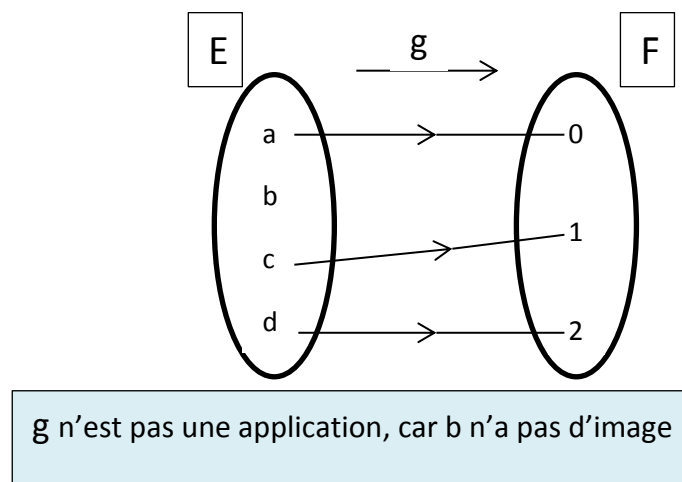
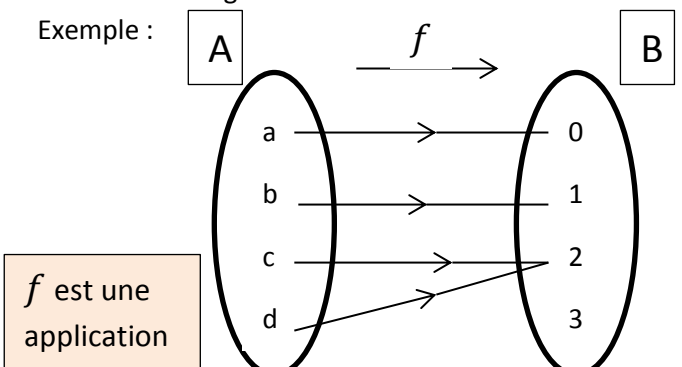


2. Définition d'une application

Soient A et B deux ensembles non vides.

Une relation f de A vers B est une application si chaque élément de l'ensemble de départ A a une seule image dans l'ensemble d'arrivée B

Exemple :



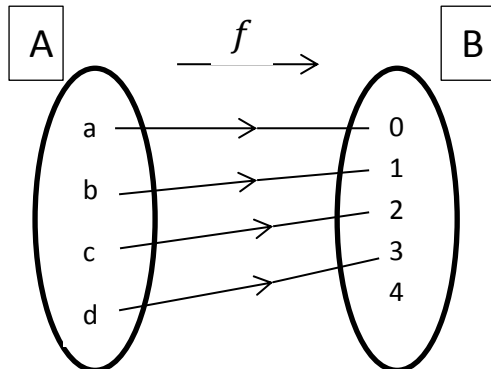
Remarque : Toute application est une fonction, mais toute fonction n'est pas une application.

II. Applications particulières :

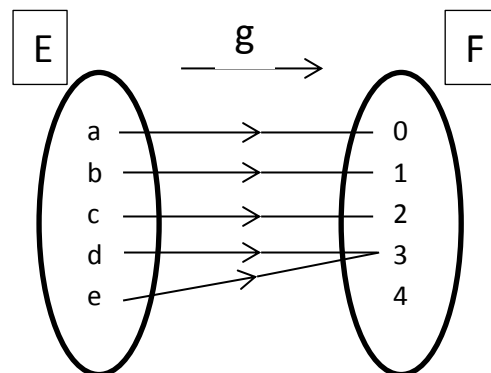
1. Application injective

Une application de l'ensemble A vers l'ensemble B est injective, si tout élément de B possède zéro ou un élément dans A.

Exemple :



f est injective



g n'est pas une injection, car 3 a deux antécédents

Théorème : Soit $f: A \rightarrow B$

(f est injective) $\Leftrightarrow (\forall x \in A, x' \in B; f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$

Exemple : Soit $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto x^2 + 1$$

f est-elle injective ?

2. Application surjective :

Une application de l'ensemble A vers l'ensemble B est surjective, si tout élément de B possède un ou plusieurs antécédents dans

A.

Théorème : Soit $f: A \rightarrow B$

(f est surjective) $\Leftrightarrow (\forall y \in B, \exists x \in A; y = f(x))$

Exemple : Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow [-1; +\infty[$

$$x \mapsto x^2 - 1$$

f est-elle surjective ?

3. Application bijective :

Une application de A vers B est bijective si elle est à la fois injective et surjective.

Remarque :

Théorème : Soit $f: A \rightarrow B$

(f est bijective) $\Leftrightarrow (\forall y \in B, \exists! x \in A, f(x) = y)$.

Exercice d'application :

III. Application réciproque d'une bijection :

On appelle réciproque d'une bijection f de A vers B, la bijection notée f^{-1} de B sur A.

Si $f: A \rightarrow B$, alors $f^{-1}: B \rightarrow A$

On a : $\forall y \in B, \forall x \in A; y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y)$

Exemple : Soit $g: \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$

$$x \mapsto g(x) = \frac{x-1}{x-2}$$

Montrer que g est bijective, puis déterminer g^{-1} .

IV. Composition des applications :

Soient f une application de E vers F et g une application de F vers G, la fonction notée $g \circ f$ de E vers G est définie par :

$g \circ f: E \rightarrow F \rightarrow G$

$$x \mapsto (g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

Est la composée de f par g .

Exemple :

Soit $f: x \mapsto f(x) = 2x + 1$, $g: x \mapsto g(x) = \frac{1}{x}$

$h: x \mapsto h(x) = x^2$

Trouver les ensembles de définition de chacune des fonctions : f , g et h puis calculer $g \circ f(x)$; $h \circ f(x)$; $g \circ f(3)$; $f \circ g(3)$; $g \circ f(-2)$ et $f \circ g(-2)$.

v. Restriction d'une application (prolongement)

Soit f une application de A dans B, X une

partie de A. On appelle restriction de f à X l'application de X de B notée : $f|_X$ définie

$$\text{par : } \forall x \in X, \left(f|_X \right)(x) = f(x)$$

On dit que f est le prolongement de $f|_X$ à A.

Exemple : Soit

$$f : x \mapsto f(x) = |2x - 1| + |1 - x| \text{ et}$$

$$g : [1; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 3x - 2$$

g est-elle la restriction de f à $[1; +\infty[$

VI. Image directe— Image réciproque par une application

1. Image directe :

Soient E et F deux ensembles non vides, f une application de E vers F et $A \subset E$.

On appelle image directe (ou image) de A par f notée $f(A)$ l'ensemble des images par f de tous les éléments de A.

$$\text{On a : } f(A) = \{f(x), x \in A\}$$

Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 2x + 5$$

$$A = \left\{ -1; 0; \frac{1}{2}; 2 \right\} \text{ et } B = [0; 1]$$

Trouver les images directes par f de A et de B.

2. Image réciproque :

Soit f une application de E vers F et B une partie de F.

On appelle image réciproque de B par f notée $f^{-1}(B)$, l'ensemble des antécédents par f de tous les éléments de B.

$$\text{On a : } f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$$

Exemple : Soit $f : \mathbb{R} - \{4\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$

$$x \mapsto 1 - \frac{1}{x-4}$$

$$C = \{-1; 0; 1\} \text{ et } D = \left[\frac{3}{2}; 2 \right[$$

Déterminer $f^{-1}(C)$ et $f^{-1}(D)$.