

Les Applications

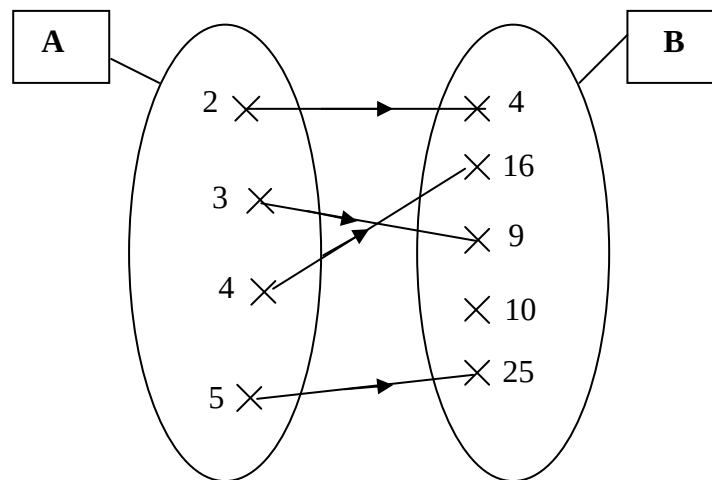
Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

I) Définitions d'une application et d'une fonction :

1°) Définition d'une application :

Soient A et B deux ensembles non vides. Une application de A dans B est une relation de A vers B qui à chaque élément de l'ensemble de départ A associe un seul élément de l'ensemble d'arrivée B.

2°) Exemple de représentation sagittale :



3°) Notation :

$f : A \rightarrow B$ " f envoie A dans B "

$2 \alpha 7$ " 2 a pour image 7 "

$f : x \alpha y$ Signifie que « x a pour image y » ou « x est l'antécédent de y ».

4°) Définition d'une fonction :

Une relation de A vers B est une fonction de A vers B, si chaque élément de l'ensemble de départ A possède au plus une image dans l'ensemble d'arrivée B.

Remarque :

Toute application est une fonction, mais toute fonction n'est pas une application.

II – Applications particulières :

1°) Application bijective :

- Définition : Une application f de l'ensemble A dans l'ensemble B est une application bijective (ou bijection), si tout élément de B possède un unique antécédent dans A par f .

- Théorème : Soit $f : A \rightarrow B$

$$(f : A \rightarrow B \text{ est bijective}) \Leftrightarrow (\forall y \in B \exists ! x \in A / y = f(x))$$

- Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 3x + 5$. f est-elle bijective ?

Réponse : Soit y un élément de $\mathbb{R}$ tels que $f(x) = y$.

$$f(x) = y \Leftrightarrow 3x + 5 = y \Leftrightarrow 3x = y - 5 \Leftrightarrow x = \frac{y - 5}{3} \text{ unique d'où } f \text{ est bijective.}$$

2°) Application injective :

- Définition : Une application f de l'ensemble A dans l'ensemble B est une application injective (ou injection), si tout élément de B possède 0 ou 1 antécédent dans A par f .

- Théorème : Soit $f : A \rightarrow B$
 $(f : A \rightarrow B \text{ est injective}) \Leftrightarrow (\forall x \in A, \forall x' \in A, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$.

- Exemple : Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2 + 1$. f est-elle injective ?

Réponse : Soient x et x' deux éléments de $\mathbb{R}_+$ tels que $f(x) = f(x')$.

$$f(x) = f(x') \Leftrightarrow x^2 + 1 = x'^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 = x'^2 \Leftrightarrow x = x' \text{ ou } x = -x' \notin \mathbb{R}_+$$

D'où f est injective.

3°) Application surjective :

- Définition : Une application f de l'ensemble A dans l'ensemble B est une application surjective (ou surjection), si tout élément de B possède 1 ou plusieurs antécédent dans A par f .

- Théorème : Soit $f : A \rightarrow B$
 $(f : A \rightarrow B \text{ est surjective}) \Leftrightarrow (\forall y \in B \exists x \in A / y = f(x))$

- Exemple : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow [-1 ; +\infty[$
 $x \mapsto x^2 - 1$. f est-elle surjective ?

Soit y un élément de $[-1 ; +\infty[$ tels que $f(x) = y$.

$$f(x) = y \Leftrightarrow x^2 - 1 = y \Leftrightarrow x^2 = y + 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{y + 1} \text{ où } x = -\sqrt{y + 1}$$

D'où f est surjective.

4°) Théorème :

Une application f de A dans B est **bijective** si elle est à la fois **injective** et **surjective**.

5°) Remarque : Dans la pratique pour montrer qu'une application est soit bijective, soit injective, soit surjective, on résout : $\forall x \in B$ l'équation $f(x) = y$.

- Si $f(x) = y$ admet **1 solution unique** x , alors f est **bijective**.
- Si $f(x) = y$ admet **0 ou 1 solution** x , alors f est **injective**.
- Si $f(x) = y$ admet **1 ou plusieurs solutions** x , alors f est **surjective**.

III– Application réciproque d'une bijection :

1°) Définition : On appelle application réciproque d'une bijection f de A sur B , la bijection notée : f^{-1} de B sur A . $f : A \rightarrow B$; $f^{-1} : B \rightarrow A$

$$\forall y \in B, \forall x \in A, y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

2°) Exemple : Soit $g : \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R} - \{1\}$

$$x \mapsto g(x) = \frac{x-1}{x-2}$$

Montrer que g est bijective, puis déterminer g^{-1} .

Réponse : Soit $y \in \mathbb{R} - \{1\}$ montrons $\exists! x \in \mathbb{R} - \{2\}$ tel que $g(x) = y$.

$$g(x) = y \Leftrightarrow \frac{x-1}{x-2} = y \Leftrightarrow y(x-2) = x-1 \Leftrightarrow x(y-1) = 2y-1 \Leftrightarrow x = \frac{2y-1}{y-1} \text{ unique}$$

donc g est bijective. D'où $g^{-1} : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R} - \{2\}$

$$t \mapsto \frac{2t-1}{t-1}$$

IV– Composition des applications :

1°) Définition : f étant une fonction de E vers F , g une application de F vers G , la fonction notée : $g \circ f$ de E vers G est définie par :

$$g \circ f : E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$
$$x \mapsto (g \circ f)(x) = g[f(x)]$$

et s'appelle la composée de f par g .

2°) Exemples :

$$\text{soit } f : x \mapsto f(x) = 2x + 1; \quad g : x \mapsto g(x) = \frac{1}{x}; \quad h : x \mapsto h(x) = x^2$$

Trouver les ensembles de définition de chacune des fonctions f ; g et h puis calculer $g \circ f(3)$; $f \circ g(3)$; $g \circ f(-2)$; $f \circ g(-2)$; $g \circ f(x)$; $h \circ f(x)$.

$$\text{Réponse : } g \circ f(3) = g[f(3)] = g(7) = \frac{1}{7}. \quad f \circ g(3) = f[g(3)] = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{3}.$$

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = g(2x+1) = \frac{1}{2x+1}; \quad h \circ f(x) = h[f(x)] = h(2x+1) = (2x+1)^2$$

V– Image directe – Image réciproque par une application :

1°) Image directe

a°) Définition : Soit f une fonction de E vers F d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$, et A une partie de E . On appelle image directe (ou image) de A par f notée $f(A)$ l'ensemble des images par f de tous les éléments de $A \cap \mathcal{D}_f$.

b°) Exemple : soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow \frac{1}{x+1}.$$

Trouver les images par f de chacun des intervalles de $\mathbb{R}$ suivants :

$A =]-1 ; 4]$; $B = [-5 ; 3]$.

Réponse : f est définie si $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$; $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{-1\}$.

- Image directe de $A =]-1 ; 4]$ par f .

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, x \in A, \Leftrightarrow -1 < x \leq 4 \Leftrightarrow 0 < x+1 \leq 5 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq \frac{1}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq f(x); \text{ D'où } f(A) = \left[\frac{1}{5}; +\infty[.$$

- Image directe de $B = [-5 ; 3]$ par f .

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{D}_f, x \in B &\Leftrightarrow x \in [-5 ; -1[\cup]-1 ; 3] \\ -5 \leq x < -1 &; \quad -1 < x \leq 3 \\ -4 \leq x+1 < 0 &; \quad 0 < x+1 \leq 4 \\ \frac{1}{x+1} \leq -\frac{1}{4} &; \quad \frac{1}{4} \leq \frac{1}{x+1} \\ \text{D'où } f(B) &= \left] -\infty ; -\frac{1}{4} \right] \cup \left[\frac{1}{4} ; +\infty \right[. \end{aligned}$$

2°) Image réciproque

a°) Définition : Soit f une fonction de E vers F d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$, et B une partie de F . On appelle image réciproque de B par f , la partie de $\mathcal{D}_f$, notée : $f^{-1}(B)$ constitué des antécédents par f de tous les éléments de B .

b°) Remarque : Comment chercher l'image réciproque ?

Pour trouver l'image réciproque d'un intervalle B de $\mathbb{R}$ par une fonction f d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$, on résout l'un des systèmes d'inconnue x suivants :

- Si $B = [a, b]$ on résout $x \in \mathcal{D}_f$; $a \leq f(x) \leq b$.
- Si $B =]a, b[$ on résout $x \in \mathcal{D}_f$; $a < f(x) < b$.
- Si $B = [a, b[$ on résout $x \in \mathcal{D}_f$; $a \leq f(x) < b$.
- Si $B = \{b\}$ on résout $x \in \mathcal{D}_f$; $f(x) = b$
- Si $B =]-\infty, a]$ on résout $x \in \mathcal{D}_f$; $f(x) \leq a$.
- Si $B =]a, +\infty[$ on résout $x \in \mathcal{D}_f$; $a < f(x)$.

c°) Exemples : soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \alpha 2x - 1 \qquad x \alpha x^2 - x - 2$$

- Trouver l'image réciproque par f de $B = [1 ; 3]$
- Trouver l'image réciproque par g de $B = \{ 0 \}$

VI– Coïncidence de deux fonctions sur un ensemble :

1°) Définition : soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \alpha f(x) \qquad x \alpha g(x)$$

Soit C un sous-ensemble de $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$.

$$\left(\begin{array}{c} f \text{ et } g \text{ coïncident} \\ \text{sur } C \end{array} \right) \text{ si et seulement si } \left(\begin{array}{c} \forall x \in C \\ f(x) = g(x) \end{array} \right)$$

2°) Exemple : soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \alpha f(x) = |2x - 1| + |1 - x| \quad ; \quad x \alpha g(x) = 3x - 2$$

- Trouver la partie C de $\mathbb{R}$ sur laquelle f et g coïncident.

Réponse :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$ 2x - 1 $	$-2x + 1$	0	$2x - 1$	$2x - 1$
$ 1 - x $	$1 - x$	$1 - x$	0	$-1 + x$
$f(x)$	$-3x + 2$	x	$3x - 2$	

Pour $x \in C = [1 ; +\infty[$ $f(x) = g(x)$ donc f et g coïncident sur C .

VII– Restriction d'une application :

1°) Définition : Soit f une application de A dans B , et X une partie de A . On appelle restriction de f à X l'application de X dans B notée : $f|_X$ définie par :

$$\forall x \in X, \left(f|_X \right)(x) = f(x).$$

2°) Exemple : Soit $f : x \alpha f(x) = |2x - 1| + |1 - x|$ et $g : [1 ; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \alpha 3x - 2$

$g : [1 ; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est la restriction de f à $[1 ; +\infty[$; et f est le prolongement de g sur $\mathbb{R}$.