

Chapitre 3

Le barycentre

Du niveau de base au niveau concours

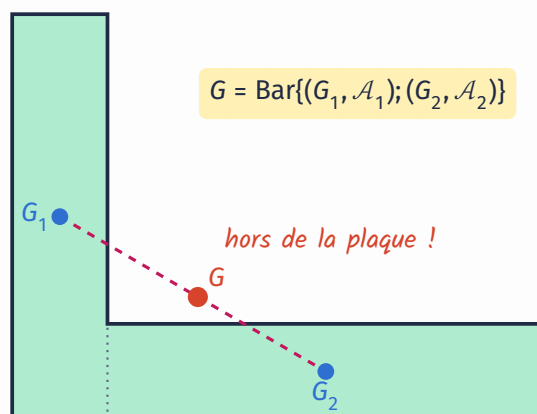
À connaître par cœur

$$\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} + \gamma \vec{GC} = \vec{0} \quad (\alpha + \beta + \gamma \neq 0)$$

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}$$

Défi de concours

Où est le centre de gravité d'une plaque en forme de L ?



Le barycentre : le point d'équilibre des masses

★★★★ Niveau 4 · Concours

★★★ Niveau 3 · Approfondissement

★★ Niveau 2 · Bac

★ Niveau 1 · Bases

Cours complet

Méthodes et pièges

66 exercices corrigés

Test d'entrée

Sommaire

Test d'entrée : par où commencer ?	4	18 Niveau 4 · Concours	26
1 Barycentre de deux points	5	19 Barycentre de deux points	28
2 Propriétés du barycentre	7	20 Barycentre de trois points	30
3 Coordonnées du barycentre	8	21 Associativité et quatre points	31
4 Barycentre de trois points	9	22 Coordonnées du barycentre	33
5 Associativité	10	23 Alignement et ensembles de points	34
6 Barycentre de quatre points	11	24 Défis de concours	36
7 Alignement et concours	12	25 Corrigés du niveau 1	39
8 Réduire une somme vectorielle	14	26 Corrigés du niveau 2	41
9 Ensembles de points	14	27 Corrigés du niveau 3	44
10 Barycentre et physique	16	28 Corrigés du niveau 4	46
11 Pour aller plus loin	17	29 Corrigés : deux points	49
12 Les pièges classiques	18	30 Corrigés : trois points	52
13 Les astuces des concours	19	31 Corrigés : associativité	55
14 L'essentiel du chapitre en une page	21	32 Corrigés : coordonnées	58
15 Niveau 1 · Bases	22	33 Corrigés : alignement et ensembles	62
16 Niveau 2 · Bac	23	34 Corrigés : défis de concours	65
17 Niveau 3 · Approfondissement	25	Corrigé du test d'entrée	69

Comment utiliser ce livret

Les 4 niveaux d'exercices

Niveau 1 · Bases ★

les automatismes indispensables.

Niveau 2 · Bac ★★

le niveau des devoirs surveillés.

Niveau 3 · Approfondissement ★★★

pour viser la mention Très bien.

Niveau 4 · Concours ★★★★★

problèmes de concours (classes préparatoires, écoles d'ingénieurs).

Les encadrés du cours

Définition : à savoir par cœur.

Propriété / Théorème : les outils.

Méthode : la démarche pas à pas.

Exemple : un calcul entièrement rédigé.

Piège : l'erreur classique à éviter.

Astuce de concours ★ : le petit plus qui fait gagner du temps.

Ce livret est « intelligent » : commence par le **test d'entrée** (page 4) ; en 15 minutes, il t'indique par où commencer et quels exercices faire en priorité. Le livret contient 66 exercices corrigés : la partie B est un parcours en 4 niveaux (exercices 1 à 30) ; la partie C est une banque de 36 exercices classés par thème (Barycentre de deux points, Barycentre de trois points, Associativité et quatre points, Coordonnées du barycentre, Alignement et ensembles de points, Défis de concours). Tous les corrigés sont regroupés dans la partie D.

Conseil : cherche chaque exercice au moins 10 minutes avant de lire le corrigé. Le numéro de page du corrigé est indiqué à droite de chaque énoncé (il est cliquable dans le PDF).

La carte du chapitre



À la fin du chapitre, je sais...

- | | |
|---|---|
| ☐ vérifier qu'un barycentre existe ; | ☐ utiliser l'associativité (barycentre partiel) ; |
| ☐ construire le barycentre de deux points ; | ☐ utiliser l'isobarycentre de quatre points ; |
| ☐ placer G sur (AB) selon les signes ; | ☐ démontrer un alignement, un concours ; |
| ☐ écrire un point de (AB) comme barycentre ; | ☐ réduire $\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} + \gamma \vec{MC}$; |
| ☐ reconnaître un barycentre dans une égalité ; | ☐ trouver un ensemble de points (cercle, médiatrice, droite) ; |
| ☐ calculer les coordonnées d'un barycentre ; | ☐ calculer un centre d'inertie (levier, plaque percée). |
| ☐ construire le barycentre de trois points ; | |
| ☐ utiliser le centre de gravité ($\vec{AG} = \frac{2}{3} \vec{AA'}$) ; | |

Test d'entrée : par où commencer ?

 15 minutes

 Sans calculatrice

 1 point par question

 Réponses sur ta feuille

Avant le cours, fais le point sur les outils du **tronc commun** utiles au chapitre : aucune question ne demande le cours. Corrigé et orientation : **page 69**.

Bloc 1 · Vecteurs et Chasles

___ / 4

- ① **Relation de Chasles** (a) Simplifier $\vec{u} = \vec{DA} - \vec{DB} + \vec{CB}$.
(b) Quel point N vérifie $\vec{NA} + \vec{AB} = \vec{CB}$?

- ② **Réel fois vecteur** $AB = 4$ cm, $\vec{AE} = 3\vec{AB}$, $\vec{AF} = -\frac{1}{2}\vec{AB}$. (a) $\vec{EF}$ à l'aide de $\vec{AB}$? EF ?
(b) Ordre de A, B, E, F sur la droite (AB) ?

- ③ **Colinéarité** ABC est un triangle, $\vec{AP} = 2\vec{AB} - 3\vec{AC}$, $\vec{AQ} = k\vec{AB} + 6\vec{AC}$. Pour quel réel k les points A, P, Q sont-ils alignés ?

- ④ **Milieux** I est le milieu de $[AB]$, K celui de $[AI]$. (a) $\vec{AK}$ et $\vec{KB}$ à l'aide de $\vec{AB}$? (b) Réel k tel que $\vec{KA} = k\vec{KB}$?

Bloc 2 · Coordonnées et colinéarité

___ / 4

- ⑤ **Coordonnées** $A(3; -1)$, $B(-1; 5)$.
Coordonnées du vecteur $\vec{AB}$, du milieu I de $[AB]$ et du symétrique C de A par rapport à B ?

- ⑥ **Déterminant** (a) $\vec{u}(-6; 15)$ et $\vec{v}(4; -10)$ sont-ils colinéaires ?
(b) $E(-3; 1)$, $F(0; 3)$ et $H(6; 8)$ sont-ils alignés ?

- ⑦ **Équation de droite** $A(-3; 5)$, $B(5; 1)$.
(a) Une équation cartésienne de la droite (AB) ? (b) Ses points d'intersection avec les axes ?

- ⑧ **Repère lié au triangle** Triangle ABC , repère $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$: coordonnées de B, C , du milieu I de $[BC]$ et de M tel que $\vec{BM} = 2\vec{BC}$?

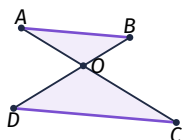
Bloc 3 · Géométrie du triangle

___ / 4

- ⑨ **Centre de gravité** $A(-4; 3)$, $B(8; 1)$, $C(-4; -7)$, A' milieu de $[BC]$. Coordonnées de A' , puis du centre de gravité G ($\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AA'}$) ?

- ⑩ **Deux médianes** Les médianes $[AA']$ et $[BB']$ de ABC se coupent en G ; $GA' = 2$ cm, $BG = 5$ cm. Calculer AG, AA' et BB' .

- ⑪ **Thalès** Ci-contre :
 $(AB) \parallel (CD)$, $OA = 4$, $OC = 6$,
 $OD = 4,5$, $AB = 6$. (a) OB et
 CD ? (b) Réel k tel que
 $\vec{OC} = k\vec{OA}$?



- ⑫ **Médianes et aires** (a) Pourquoi la médiane $[AA']$ coupe-t-elle ABC en deux triangles de même aire ? (b) G est le centre de gravité : l'aire de GBC est quelle fraction de celle de ABC ?

Temps écoulé ?

Pose le crayon, compte tes points bloc par bloc et corrige-toi **page 69**.

Bloc 1

___ / 4

+

Bloc 2

___ / 4

+

Bloc 3

___ / 4

=

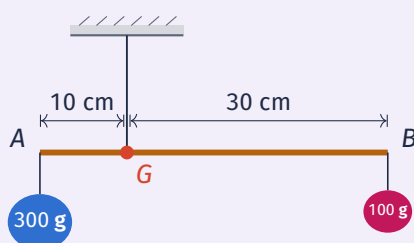
Mon score

___ / 12

Partie A • Le cours

Définitions, théorèmes, méthodes, pièges et astuces de concours

1 Barycentre de deux points



Le mobile. Pour décorer une chambre, on suspend une tige légère $[AB]$ de 40 cm : un oiseau de 300 g en A, un nuage de 100 g en B. Où attacher le fil pour que la tige reste horizontale ? Pas au milieu : **plus près de la masse la plus lourde**. La loi du levier donne $300 \times GA = 100 \times GB$; avec $GA + GB = 40$: $GA = 10$ cm et $GB = 30$ cm. Comme $\vec{GA}$ et $\vec{GB}$ sont de sens contraires :

$$300 \vec{GA} + 100 \vec{GB} = \vec{0}, \quad \text{soit} \quad 3 \vec{GA} + \vec{GB} = \vec{0}.$$

Définition : point pondéré

Un **point pondéré** est un couple (A, α) formé d'un point A du plan et d'un réel α , appelé **coefficient** (ou **poids**) du point A. Dans les figures, le coefficient est écrit dans une pastille de couleur : A 3. Une masse physique est positive ; en mathématiques, on accepte **tout réel** (un coefficient négatif joue le rôle d'un **trou** dans une plaque, section 10).

La boîte à outils du tronc commun (à savoir par cœur)

Chasles : $\vec{AB} = \vec{AM} + \vec{MB}$ pour tout point M ;
 $\vec{BA} = -\vec{AB}$; $\vec{AB} = \vec{0} \iff A = B$.

Placer un point : pour un point A et un vecteur $\vec{u}$ donnés, il existe **un seul** point G tel que $\vec{AG} = \vec{u}$.

Alignement : si $A \neq B$: A, B, C alignés $\iff$ il existe un réel t tel que $\vec{AC} = t \vec{AB}$.

Milieu : I milieu de $[AB]$
 $\iff \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0} \iff \vec{AI} = \frac{1}{2} \vec{AB}$.

Coordonnées : $\vec{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$; pour $\vec{u}(x, y)$ et $\vec{v}(x', y')$, $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$; $\vec{u}, \vec{v}$ colinéaires $\iff \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Norme : $\|\vec{AB}\| = AB$ et $\|k \vec{u}\| = |k| \|\vec{u}\|$.

Théorème (existence et unicité)

Soit (A, α) et (B, β) deux points pondérés tels que $\alpha + \beta \neq 0$. Il existe un **unique** point G tel que $\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} = \vec{0}$; il est défini par

$$\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \vec{AB} \quad \text{ou encore} \quad \vec{BG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \vec{BA}.$$

Démonstration. On fait apparaître A dans $\vec{GB}$ (Chasles) : $\vec{GB} = \vec{GA} + \vec{AB}$. Donc

$$\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} = \vec{0} \iff (\alpha + \beta) \vec{GA} + \beta \vec{AB} = \vec{0} \iff (\alpha + \beta) \vec{AG} = \beta \vec{AB} \iff \vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \vec{AB}$$

(on divise par $\alpha + \beta \neq 0$). Un seul point G vérifie la dernière égalité : d'où l'existence **et** l'unicité. En échangeant les rôles de A et B , on obtient $\vec{BG}$. □

Définition : barycentre de deux points

Si $\alpha + \beta \neq 0$, ce point G est le **barycentre** des points pondérés (A, α) et (B, β) :

$$G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\} \iff \alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} = \vec{0}.$$

Si $\alpha + \beta = 0$ (avec $\alpha \neq 0$ et $A \neq B$), il n'y a **pas** de barycentre : $\alpha \vec{GA} - \alpha \vec{GB} = \alpha \vec{BA} \neq \vec{0}$ pour tout point G .

Retour au mobile : $G = \text{Bar}\{(A, 300); (B, 100)\}$, donc $\vec{AG} = \frac{100}{400} \vec{AB} = \frac{1}{4} \vec{AB}$ et $AG = \frac{1}{4} \times 40 = 10$ cm. En prenant les normes dans $\alpha \vec{GA} = -\beta \vec{GB}$, on obtient $|\alpha| GA = |\beta| GB$: c'est exactement la **loi du levier**.

Méthode : Comment construire un barycentre de deux points

1. Vérifier que $\alpha + \beta \neq 0$. 2. Calculer $k = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$: le **coefficient de l'autre point**, divisé par la somme. 3. Placer G tel que $\vec{AG} = k \vec{AB}$: si $k = \frac{p}{q}$, on partage $[AB]$ en q parts égales (Thalès, ci-dessous) et on reporte $|p|$ parts depuis A , vers B si $k > 0$, dans l'autre sens si $k < 0$. 4. Contrôler : G est **plus proche du point de plus grand coefficient** (en valeur absolue).

Exemple : construire $G = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 3)\}$ à la règle et au compas

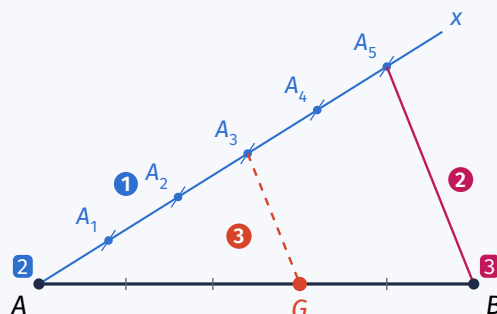
$2 + 3 = 5 \neq 0$ et $\vec{AG} = \frac{3}{5} \vec{AB}$: on partage $[AB]$ en 5.

① On trace une demi-droite $[Ax)$ et on y reporte au compas 5 longueurs égales : $A_1, \dots, A_5$.

② On trace la droite (A_5B) .

③ La parallèle à (A_5B) passant par A_3 coupe $[AB]$ en G : d'après Thalès, $\frac{AG}{AB} = \frac{AA_3}{AA_5} = \frac{3}{5}$.

Contrôle : G est plus proche de B (coefficient $3 > 2$) ; et $2 GA = 2 \times 3 = 6 = 3 \times 2 = 3 GB$ (en cinquièmes de AB).



Modèle de rédaction (pour $E = \text{Bar}\{(A, 4); (B, -1)\}$). « La somme des coefficients est $4 + (-1) = 3 \neq 0$, donc E existe. Par définition $4\vec{EA} - \vec{EB} = \vec{0}$; avec Chasles, $4\vec{EA} - (\vec{EA} + \vec{AB}) = \vec{0}$, soit $3\vec{EA} = \vec{AB}$, donc $\vec{AE} = -\frac{1}{3} \vec{AB}$. On place E sur la droite (AB) , du côté opposé à B par rapport à A , avec $AE = \frac{1}{3} AB$. » Contrôle : E est plus proche de A ($|4| > |-1|$).

Remarque. Un peu d'histoire. Le mot vient du grec *barus*, « lourd ». **Archimède** (III^e siècle av. J.-C.) établit la loi du levier et cherche les centres de gravité des figures planes. Au IX^e siècle, à Bagdad, **Thābit ibn Qurra** démontre la loi de la **balance romaine** (le *qarastūn*, section 10) ; en 1121, **al-Khāzinī** étudie balances et centres de gravité dans son *Livre de la balance de la sagesse*. En 1827, **Möbius** invente le « calcul barycentrique », avec des coefficients de signe quelconque.

2

Propriétés du barycentre

Homogénéité

Si $\alpha + \beta \neq 0$, pour tout réel $k \neq 0$: $\text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\} = \text{Bar}\{(A, k\alpha); (B, k\beta)\}$.

Démonstration. $k\alpha + k\beta = k(\alpha + \beta) \neq 0$, et $k\alpha\vec{GA} + k\beta\vec{GB} = k(\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB})$ est nul si et seulement si $\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} = \vec{0}$ (car $k \neq 0$). $\square$

On peut donc **multiplier ou diviser tous les coefficients** par un même réel non nul (pour avoir des entiers, ou une somme égale à 1) :

$$\begin{aligned} \text{Bar}\{(A, 0,6); (B, -0,4)\} &= \text{Bar}\{(A, 3); (B, -2)\} \quad (\times 5) & \text{Bar}\{(A, -8); (B, -4)\} &= \text{Bar}\{(A, 2); (B, 1)\} \quad (\div (-4)) \\ \text{Bar}\{(A, 300); (B, 100)\} &= \text{Bar}\{(A, 3); (B, 1)\} = \text{Bar}\{(A, \frac{3}{4}); (B, \frac{1}{4})\} \quad (\text{le mobile : } \div 100, \text{ puis } \div 4) \end{aligned}$$

Position de G sur la droite (AB) (avec $A \neq B$)

Soit $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$. Alors $G \in (AB)$, et :

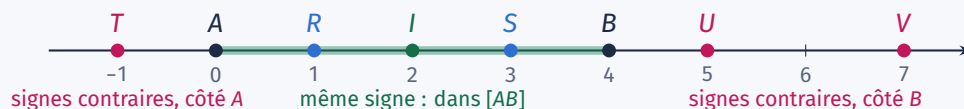
- si α et β sont de **même signe**, G est sur le **segment** $[AB]$, plus près du point de plus grand coefficient ;
- s'ils sont de **signes contraires**, G est **hors** de $[AB]$, du côté du point de plus grand coefficient en valeur absolue ;
- si $\alpha = \beta$, G est le **milieu** I de $[AB]$ (on dit que I est l'**isobarycentre** de A et B) ; si $\beta = 0$, $G = A$.

Démonstration. $\vec{AG} = k\vec{AB}$ avec $k = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$, donc $G \in (AB)$; et $G \in [AB] \iff 0 \leq k \leq 1$. Même signe : $k = \frac{|\beta|}{|\alpha| + |\beta|} \in [0, 1]$. Signes contraires : k et $1 - k = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$ sont de signes contraires, donc $k < 0$ ou $k > 1$; si $|\alpha| > |\beta|$, $\alpha + \beta$ a le signe de α , donc $k < 0$ (côté A). Si $\alpha = \beta$: $k = \frac{1}{2}$. $\square$

Exemple : six barycentres sur une droite graduée

On gradue (AB) avec A en 0 et B en 4 : le barycentre a pour abscisse $4k$, où $k = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$.

point	R	I	S	T	U	V
coefficients (α, β) de A et B	(3, 1)	(1, 1)	(1, 3)	(5, -1)	(-1, 5)	(-3, 7)
$k = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{7}{4}$
abscisse $4k$	1	2	3	-1	5	7



Contrôle pour T : sur l'axe, $\vec{TA}$ et $\vec{TB}$ mesurent 1 et 5, et $5 \times 1 + (-1) \times 5 = 0$ ✓.

Écrire un point de (AB) comme barycentre de A et B

Pour tout réel t : $\vec{AM} = t\vec{AB} \iff M = \text{Bar}\{(A, 1 - t); (B, t)\}$. Ainsi, **tout point de (AB)** est un barycentre de A et B.

En effet, $(1 - t) + t = 1 \neq 0$, et $\text{Bar}\{(A, 1 - t); (B, t)\}$ est le point M tel que $\vec{AM} = \frac{t}{1} \vec{AB} = t\vec{AB}$.

Méthode : Comment reconnaître un barycentre dans une égalité vectorielle

1. Écrire tous les vecteurs avec la **même origine** M (utiliser $\vec{AM} = -\vec{MA}$ et Chasles). 2. Tout passer dans un membre : $a\vec{MA} + b\vec{MB} = \vec{0}$. 3. Si $a + b \neq 0$, conclure : $M = \text{Bar}\{(A, a); (B, b)\}$.

Exemple : trois égalités, trois barycentres

- $\vec{AV} = \frac{7}{4}\vec{AB}$: $V = \text{Bar}\{(A, -\frac{3}{4}); (B, \frac{7}{4})\} = \text{Bar}\{(A, -3); (B, 7)\}$ (on multiplie par 4) : c'est le point V du tableau.
- $\vec{MA} = 5\vec{MB}$: $\vec{MA} - 5\vec{MB} = \vec{0}$, $1 - 5 = -4 \neq 0$: $M = \text{Bar}\{(A, 1); (B, -5)\} = \text{Bar}\{(A, -1); (B, 5)\}$ (homogénéité) : c'est le point U du tableau, $\vec{AU} = \frac{-5}{-4}\vec{AB} = \frac{5}{4}\vec{AB}$ (abscisse 5).
- $2\vec{AN} = 5\vec{NB}$: $-2\vec{NA} - 5\vec{NB} = \vec{0}$, soit $2\vec{NA} + 5\vec{NB} = \vec{0}$ (on multiplie par -1) : $N = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 5)\}$, $\vec{AN} = \frac{5}{7}\vec{AB}$.

Théorème (réduction de $\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB}$)

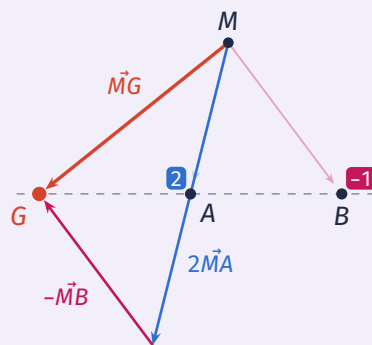
- Si $\alpha + \beta \neq 0$ et $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$, alors pour **tout** point M : $\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} = (\alpha + \beta)\vec{MG}$.
- Si $\alpha + \beta = 0$, alors pour tout point M : $\alpha\vec{MA} - \alpha\vec{MB} = \alpha\vec{BA}$: c'est **un vecteur constant** (il ne dépend pas de M).

Démonstration. On insère G (Chasles) : $\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} = \alpha(\vec{MG} + \vec{GA}) + \beta(\vec{MG} + \vec{GB}) = (\alpha + \beta)\vec{MG} + \underbrace{\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB}}_{=\vec{0}}$.

Et $\vec{MA} - \vec{MB} = \vec{MA} + \vec{BM} = \vec{BA}$. □

Sur la figure : $G = \text{Bar}\{(A, 2); (B, -1)\}$, donc $\vec{AG} = \frac{-1}{1}\vec{AB} = -\vec{AB}$: G est le symétrique de B par rapport à A . La somme des coefficients vaut 1, donc $2\vec{MA} - \vec{MB} = \vec{MG}$: en mettant bout à bout $2\vec{MA}$ et $-\vec{MB}$, la flèche **arrive exactement en** G , quel que soit le point M de départ.

Trois usages de la réduction : avec $M = A$, on retrouve $\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\vec{AB}$ (**construire**) ; avec $M = O$, origine d'un repère, on obtient les **coordonnées** de G (section 3) ; avec M quelconque, on remplace une somme de deux vecteurs par **un seul** vecteur (sections 8 et 9). **Exemples :** pour tout point M , $3\vec{MA} + \vec{MB} = 4\vec{MR}$ (R du tableau) et $5\vec{MA} - 5\vec{MB} = 5\vec{BA}$.

**3****Coordonnées du barycentre****Coordonnées du barycentre de deux points**

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (orthonormé ou non), si $\alpha + \beta \neq 0$ et $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$:

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta}$$

$$y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}$$

Démonstration. La réduction avec $M = O$ donne $(\alpha + \beta)\vec{OG} = \alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB}$; or $\vec{OG}$, $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ ont pour coordonnées celles des points G, A, B ; on divise par $\alpha + \beta$. □

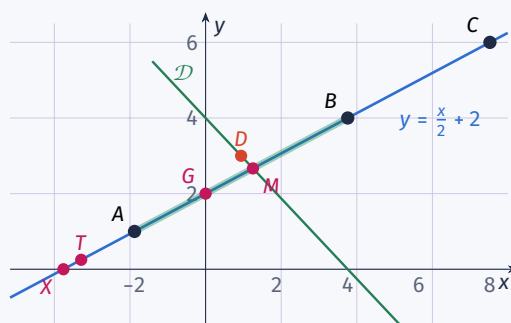
Les coordonnées de G sont des **moyennes pondérées** de celles de A et B (pour $\alpha = \beta$: le milieu, $x_G = \frac{x_A + x_B}{2}$).

Méthode : Comment utiliser les coordonnées

Calculer G : appliquer les formules (vérifier d'abord $\alpha + \beta \neq 0$). **Trouver des coefficients** : si $C \in (AB)$, chercher t tel que $\vec{AC} = t\vec{AB}$ (sur une coordonnée non nulle de $\vec{AB}$), et $C = \text{Bar}\{(A, 1-t); (B, t)\}$. **Couper (AB) par une droite $\mathcal{D}$** : écrire $M = \text{Bar}\{(A, 1-t); (B, t)\}$, soit $M(x_A + t(x_B - x_A), y_A + t(y_B - y_A))$, et traduire $M \in \mathcal{D}$: une équation du premier degré en t . **Non aligné** : si $\det(\vec{AB}, \vec{AD}) \neq 0$, D n'est **pas** un barycentre de A et B .

Exemple : $A(-2, 1)$ et $B(4, 4)$, $\vec{AB}(6, 3)$

- $G = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 1)\}$: $x_G = \frac{2 \times (-2) + 4}{3} = 0$,
 $y_G = \frac{2 \times 1 + 4}{3} = 2$: $G(0, 2)$, sur l'axe des ordonnées.
- $T = \text{Bar}\{(A, 5); (B, -1)\}$ (le système du point T de la section 2) : $x_T = \frac{-10-4}{4} = -\frac{7}{2}$, $y_T = \frac{5-4}{4} = \frac{1}{4}$:
 $T(-\frac{7}{2}, \frac{1}{4})$.
- (AB) coupe l'axe des abscisses en
 $X = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ avec $\alpha y_A + \beta y_B = 0$:
 $\alpha + 4\beta = 0$, d'où $\alpha = 4$, $\beta = -1$ et $x_X = \frac{-8-4}{3} = -4$:
 $X(-4, 0)$.
- $C(8, 6)$: $\vec{AC}(10, 5) = \frac{5}{3}\vec{AB}$, donc
 $C = \text{Bar}\{(A, -\frac{2}{3}); (B, \frac{5}{3})\} = \text{Bar}\{(A, -2); (B, 5)\}$.
Contrôle : $\frac{4+20}{3} = 8$ et $\frac{-2+20}{3} = 6$ ✓.
- (AB) coupe $\mathcal{D}$: $x + y = 4$: $M(-2 + 6t, 1 + 3t) \in \mathcal{D} \iff -1 + 9t = 4 \iff t = \frac{5}{9}$:
 $M(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}) = \text{Bar}\{(A, 4); (B, 5)\}$.
- $D(1, 3)$: $\vec{AD}(3, 2)$,
 $\det(\vec{AB}, \vec{AD}) = 6 \times 2 - 3 \times 3 = 3 \neq 0$: D n'est pas sur (AB) .



4

Barycentre de trois points

Théorème et définition

Soit (A, α) , (B, β) , (C, γ) trois points pondérés tels que $s = \alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Il existe un **unique** point G tel que $\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} + \gamma\vec{GC} = \vec{0}$: c'est le **barycentre** du système, noté $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$.

- Construction** : $\vec{AG} = \frac{\beta}{s}\vec{AB} + \frac{\gamma}{s}\vec{AC}$; coordonnées : $x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{s}$ et $y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{s}$.

- Réduction** (section 8) : pour tout point M , $\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} + \gamma\vec{MC} = s\vec{MG}$. **Homogénéité** : on peut multiplier α, β, γ par un même $k \neq 0$.

Démonstration. Avec Chasles, $\vec{GB} = \vec{GA} + \vec{AB}$ et $\vec{GC} = \vec{GA} + \vec{AC}$, donc $\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} + \gamma\vec{GC} = s\vec{GA} + \beta\vec{AB} + \gamma\vec{AC}$, qui est nul si et seulement si $s\vec{AG} = \beta\vec{AB} + \gamma\vec{AC}$: un seul point G convient (on divise par $s \neq 0$). Les coordonnées s'obtiennent comme en section 3. $\square$

L'ordre des points ne compte pas : $\text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\} = \text{Bar}\{(C, \gamma); (A, \alpha); (B, \beta)\}$. Si $s = 0$, on ne définit pas de barycentre : $\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} + \gamma\vec{GC}$ ne dépend plus de G (section 8).

Méthode : Comment construire le barycentre de trois points (méthode du parallélogramme)

1. Vérifier que $s \neq 0$. 2. Écrire $\vec{AG} = \frac{\beta}{s}\vec{AB} + \frac{\gamma}{s}\vec{AC}$. 3. Placer $U \in (AB)$ et $V \in (AC)$ tels que $\vec{AU} = \frac{\beta}{s}\vec{AB}$ et $\vec{AV} = \frac{\gamma}{s}\vec{AC}$. 4. Compléter le parallélogramme $AUGV$: $\vec{AG} = \vec{AU} + \vec{AV}$. (Souvent plus rapide : l'associativité, section 5.)

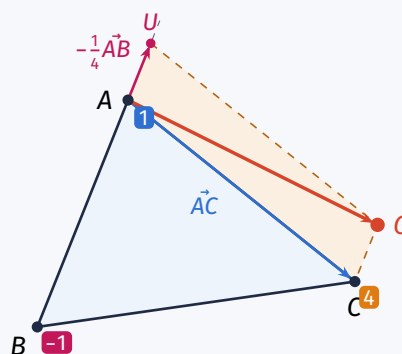
Exemple : $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, -1); (C, 4)\}$ dans le triangle « fil rouge » $A(2, 5), B(0, 0), C(7, 1)$

Existence : $s = 1 - 1 + 4 = 4 \neq 0$.

Construction : $\vec{AG} = \frac{-1}{4}\vec{AB} + \frac{4}{4}\vec{AC} = -\frac{1}{4}\vec{AB} + \vec{AC}$. Ici $V = C$, et U est le point tel que $\vec{AU} = -\frac{1}{4}\vec{AB}$ (sur (AB) , du côté opposé à B , à la distance $\frac{1}{4}AB$ de A). On complète le parallélogramme $AUGC$.

Coordonnées : $x_G = \frac{1 \times 2 + (-1) \times 0 + 4 \times 7}{4} = \frac{15}{4}$, $y_G = \frac{5 - 0 + 4}{4} = \frac{9}{4}$: $G(\frac{15}{4}, \frac{9}{4})$.

Contrôle : $\vec{AB}(-2, -5)$ et $\vec{AC}(5, -4)$, donc $-\frac{1}{4}\vec{AB} + \vec{AC}$ a pour coordonnées $(\frac{11}{4}, -\frac{11}{4})$, comme $\vec{AG}$ ✓.



Théorème (centre de gravité d'un triangle)

L'isobarycentre $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, 1)\}$ du triangle ABC est son **centre de gravité** : le point de concours des trois médianes. Si A' est le milieu de $[BC]$: $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AA'}$, $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

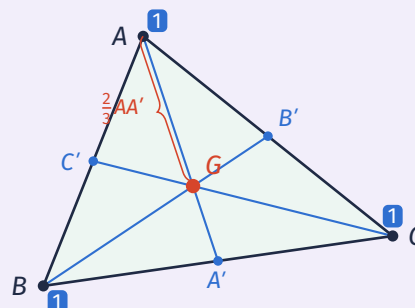
et $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$, $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$.

Démonstration. Comme A' est le milieu de $[BC]$, $\vec{GB} + \vec{GC} = 2\vec{GA'}$ (réduction). Donc

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \iff \vec{GA} + 2\vec{GA'} = \vec{0},$$

c'est-à-dire $G = \text{Bar}\{(A, 1); (A', 2)\}$, soit $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AA'}$: G est sur la médiane (AA') . De même, G est sur (BB') et sur (CC') : les trois médianes passent par G . $\square$

Exemple : pour le fil rouge, $G(\frac{2+0+7}{3}, \frac{5+0+1}{3}) = (3, 2)$, et avec $A'(\frac{7}{2}, \frac{1}{2})$: $\vec{AA'}(\frac{3}{2}, -\frac{9}{2})$, $\frac{2}{3}\vec{AA'} = (1, -3) = \vec{AG}$ ✓. Le centre de gravité d'une **plaque triangulaire** homogène est ce point (section 10).



5

Associativité

Théorème (barycentre partiel)

Soit $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$, avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Si $\alpha + \beta \neq 0$ et si $H = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$, alors

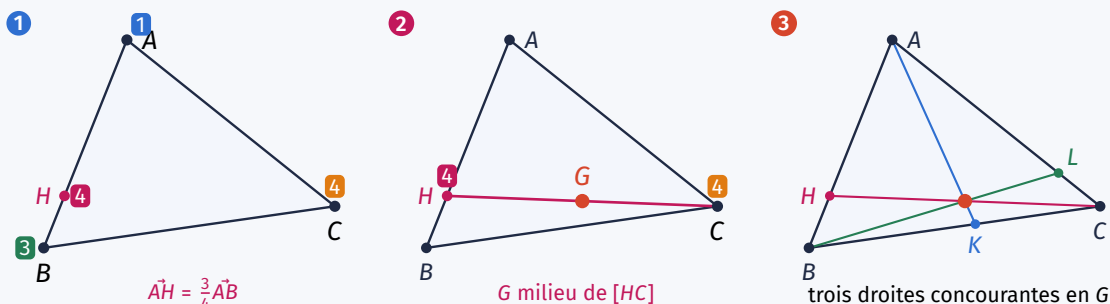
$$G = \text{Bar}\{(H, \alpha + \beta); (C, \gamma)\} \quad \text{donc} \quad G \in (HC) \quad \text{et} \quad \vec{HG} = \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{HC}.$$

On remplace deux points par leur **barycentre partiel**, affecté de la **somme** de leurs coefficients.

Démonstration. Par réduction (section 2) avec $M = G$: $\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} = (\alpha + \beta) \vec{GH}$. Donc $\vec{0} = \alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} + \gamma \vec{GC} = (\alpha + \beta) \vec{GH} + \gamma \vec{GC}$, avec $(\alpha + \beta) + \gamma \neq 0$: c'est la définition de $\text{Bar}\{(H, \alpha + \beta); (C, \gamma)\}$. $\square$

Méthode : Comment utiliser l'associativité pour construire

1. Choisir deux points dont la somme des coefficients est **non nulle** (de préférence ceux qui donnent un point simple : un milieu, un point déjà construit). 2. Construire leur barycentre partiel H (section 1). 3. Construire $G = \text{Bar}\{(H, \alpha + \beta); (C, \gamma)\}$ sur la droite (HC) . 4. Contrôler avec un autre regroupement : les droites obtenues doivent passer par le même point.

Exemple : construction pas à pas de $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 3); (C, 4)\}$ (fil rouge)

Étape 1. $1 + 3 = 4 \neq 0$: $H = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 3)\}$, $\vec{AH} = \frac{3}{4} \vec{AB}$. **Étape 2.** Par associativité, $G = \text{Bar}\{(H, 4); (C, 4)\}$: des coefficients **égaux**, donc G est le **milieu de** $[HC]$. **Étape 3 (contrôle).** $K = \text{Bar}\{(B, 3); (C, 4)\}$ vérifie $\vec{BK} = \frac{4}{7} \vec{BC}$ et $G = \text{Bar}\{(A, 1); (K, 7)\}$, donc $\vec{AG} = \frac{7}{8} \vec{AK}$; $L = \text{Bar}\{(A, 1); (C, 4)\}$ vérifie $\vec{AL} = \frac{4}{5} \vec{AC}$ et $G = \text{Bar}\{(B, 3); (L, 5)\}$, donc $\vec{BG} = \frac{5}{8} \vec{BL}$. Les droites (CH) , (AK) , (BL) sont **concurrentes** en G . Coordonnées : $G(\frac{2+0+28}{8}, \frac{5+0+4}{8}) = (\frac{15}{4}, \frac{9}{8})$, et $H(\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$: le milieu de $[HC]$ est bien $(\frac{15}{4}, \frac{9}{8})$ ✓.

Attention, piège !

On ne regroupe **jamais** deux points dont la somme des coefficients est **nulle** : ils n'ont pas de barycentre. Pour $G = \text{Bar}\{(A, 2); (B, -2); (C, 1)\}$ (somme 1), on ne peut pas grouper A et B ; on groupe $(B, -2)$ et $(C, 1)$ (somme -1) : $N = \text{Bar}\{(B, -2); (C, 1)\}$ vérifie $\vec{BN} = \frac{1}{-1} \vec{BC} = -\vec{BC}$ (N symétrique de C par rapport à B), puis $G = \text{Bar}\{(A, 2); (N, -1)\}$, soit $\vec{AG} = -\vec{AN}$: G est le symétrique de N par rapport à A .

6

Barycentre de quatre points

Définition et propriétés

Si $s = \alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$, il existe un **unique** point G tel que $\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} + \gamma\vec{GC} + \delta\vec{GD} = \vec{0}$: c'est le barycentre $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma); (D, \delta)\}$. Comme pour trois points :

- $\vec{AG} = \frac{1}{s}(\beta\vec{AB} + \gamma\vec{AC} + \delta\vec{AD})$; $x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C + \delta x_D}{s}$ (de même pour y_G); réduction : $\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} + \gamma\vec{MC} + \delta\vec{MD} = s\vec{MG}$;
- **associativité** : on peut regrouper les points **deux par deux** ou **trois et un**, si les sommes partielles sont non nulles.

L'isobarycentre d'un quadrilatère. Soit $ABCD$ un quadrilatère ; I, J, K, L les milieux de $[AB], [BC], [CD], [DA]$; P et Q ceux des diagonales $[AC]$ et $[BD]$. En groupant deux par deux l'isobarycentre G de A, B, C, D :

$$G = \text{Bar}\{(I, 2); (K, 2)\} = \text{Bar}\{(J, 2); (L, 2)\} = \text{Bar}\{(P, 2); (Q, 2)\}.$$

G est le **milieu commun** de $[IK], [JL]$ et $[PQ]$. **Conséquence (théorème de Varignon)** : les diagonales de $IJKL$ ont le même milieu, donc $IJKL$ est un **parallélogramme**. En groupant trois et un : $G = \text{Bar}\{(G_1, 3); (D, 1)\}$, où G_1 est le centre de gravité de ABC : $\vec{DG} = \frac{3}{4}\vec{DG}_1$.

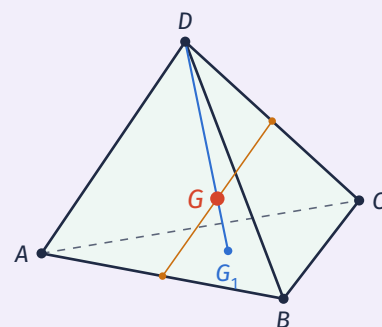
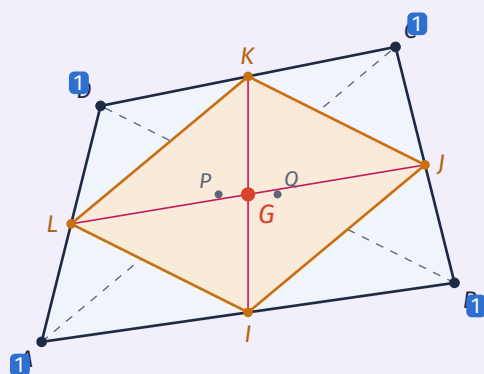
Exemple : $A(0, 0), B(7, 1), C(6, 5), D(1, 4)$: $G(\frac{14}{4}, \frac{10}{4}) = (\frac{7}{2}, \frac{5}{2})$; $I(\frac{7}{2}, \frac{1}{2})$ et $K(\frac{7}{2}, \frac{9}{2}), P(3, \frac{5}{2})$ et $Q(4, \frac{5}{2})$ ont bien pour milieu G ✓.

Un parallélogramme. Le point $\text{Bar}\{(A, 1); (B, 3); (C, 1); (D, 3)\}$ est le centre O du parallélogramme $ABCD$: en effet, O est le milieu de $[AC]$ et de $[BD]$, donc $(A, 1)$ et $(C, 1)$ se regroupent en $(O, 2)$, $(B, 3)$ et $(D, 3)$ en $(O, 6)$; et le barycentre de $(O, 2)$ et $(O, 6)$ est O .

Ouverture : dans l'espace. Tout ce chapitre reste vrai pour des points de l'espace (avec les vecteurs de l'espace). Quatre points A, B, C, D **non coplanaires** forment un **tétraèdre**. Son isobarycentre G vérifie :

- $G = \text{Bar}\{(G_1, 3); (D, 1)\}$, où G_1 est le centre de gravité de la face ABC : $\vec{DG} = \frac{3}{4}\vec{DG}_1$; les quatre segments qui joignent un sommet au centre de gravité de la face opposée sont concourants en G ;
- G est le milieu des trois segments qui joignent les milieux de deux arêtes opposées (par exemple $[AB]$ et $[CD]$).

C'est le **centre de gravité d'un tétraèdre plein homogène** : en physique, il est **aux trois quarts** de chaque segment sommet-centre de la face opposée, en partant du sommet.



7

Alignement et concours

Les deux outils

1. Alignement : si $M = \text{Bar}\{(P, a); (Q, b)\}$, alors $M \in (PQ)$; réciproquement, si $P \neq Q$, tout point de (PQ) est un barycentre de P et Q (section 2).

2. Concours : si un même point G s'écrit, par associativité, $G = \text{Bar}\{(H, \cdot); (C, \cdot)\} = \text{Bar}\{(K, \cdot); (A, \cdot)\} = \text{Bar}\{(L, \cdot); (B, \cdot)\}$, alors G est sur les trois droites (HC) , (KA) , (LB) : elles sont **concourantes** en G .

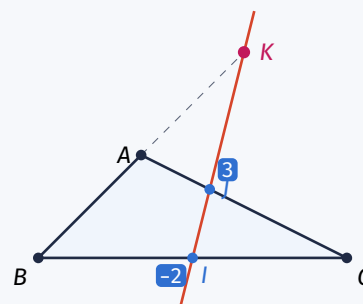
Méthode : Comment démontrer un alignement avec les barycentres

1. Écrire chaque point de l'énoncé comme barycentre des points de base (A, B, C) . **2.** Fabriquer **un** système de points pondérés dont le barycentre se calcule de deux façons : en groupant pour obtenir deux des points (P et Q), et en groupant autrement pour obtenir le troisième (R) ; on peut **dédoubler** un point $((C, 0) = (C, 1) + (C, -1))$. **3.** Conclure : $R = \text{Bar}\{(P, \cdot); (Q, \cdot)\}$, donc $R \in (PQ)$. **Autres voies** : vecteurs colinéaires, ou déterminant en coordonnées (section 3).

Exemple : trois points alignés

ABC est un triangle, I le milieu de $[BC]$, J le point tel que $\vec{AJ} = \frac{1}{3}\vec{AC}$, K le symétrique de B par rapport à A . Montrons que I, J, K sont alignés.

Rédaction. « $I = \text{Bar}\{(B, 1); (C, 1)\} = \text{Bar}\{(B, -1); (C, -1)\}$ (homogénéité) ; $J = \text{Bar}\{(A, 2); (C, 1)\}$ (car $\frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$) ; $\vec{AK} = -\vec{AB}$, donc $K = \text{Bar}\{(A, 2); (B, -1)\}$ ($t = -1$, section 2). Considérons le système $\{(A, 2); (C, 1); (B, -1); (C, -1)\}$, de somme 1. En groupant $(A, 2), (B, -1)$ d'une part, $(C, 1), (C, -1)$ d'autre part (coefficient total de C nul), son barycentre est K . En groupant $(A, 2), (C, 1)$ en $(J, 3)$ et $(B, -1), (C, -1)$ en $(I, -2)$: c'est $\text{Bar}\{(J, 3); (I, -2)\}$. Donc $K = \text{Bar}\{(J, 3); (I, -2)\}$: I, J, K **sont alignés**, et $\vec{JK} = \frac{-2}{1}\vec{JI} = -2\vec{JI}$. »



Méthode : Comment démontrer que trois droites sont concourantes

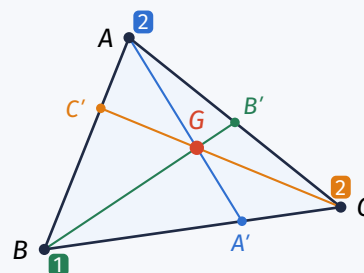
1. Traduire chaque point de l'énoncé en barycentre (souvent : « $\vec{BA'} = k\vec{BC}$ » donne $A' = \text{Bar}\{(B, 1-k); (C, k)\}$). **2.** Choisir les coefficients a, b, c de A, B, C pour que **les trois** barycentres partiels soient les points donnés (on rend les coefficients compatibles par homogénéité). **3.** Poser $G = \text{Bar}\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$ et appliquer trois fois l'associativité.

Exemple : trois céviennes concourantes (fil rouge)

Soit A', B', C' tels que $\vec{BA'} = \frac{2}{3}\vec{BC}$, B' milieu de $[AC]$, $\vec{AC'} = \frac{1}{3}\vec{AB}$.

Coefficients : $A' = \text{Bar}\{(B, 1); (C, 2)\}$ impose 2 pour C ; d'où $B' = \text{Bar}\{(A, 2); (C, 2)\}$, et $C' = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 1)\}$ convient ($\frac{1}{3}$ ✓).

Concours : $G = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 1); (C, 2)\} = \text{Bar}\{(A, 2); (A', 3)\} = \text{Bar}\{(B, 1); (B', 4)\} = \text{Bar}\{(C, 2); (C', 3)\}$ (associativité) : (AA') , (BB') , (CC') sont **concourantes** en G ; $\vec{AG} = \frac{3}{5}\vec{AA'}$, $\vec{BG} = \frac{4}{5}\vec{BB'}$, $\vec{CG} = \frac{3}{5}\vec{CC'}$; ici $G(\frac{18}{5}, \frac{12}{5})$.



8

Réduire une somme vectorielle**Théorème (réduction, pour deux, trois ou quatre points)**

Soit $\vec{V}(M) = \alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} + \gamma\vec{MC}$ et $s = \alpha + \beta + \gamma$.

- Si $s \neq 0$ et $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$: pour tout point M, $\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} + \gamma\vec{MC} = s\vec{MG}$.
- Si $s = 0$: $\vec{V}(M)$ ne dépend pas de M : $\vec{V}(M) = \vec{V}(A) = \beta\vec{AB} + \gamma\vec{AC}$ pour tout point M.

Démonstration. Pour deux points M et P, on insère P (Chasles) : $\vec{V}(M) = \alpha(\vec{MP} + \vec{PA}) + \beta(\vec{MP} + \vec{PB}) + \gamma(\vec{MP} + \vec{PC}) = s\vec{MP} + \vec{V}(P)$. Si $s \neq 0$, on prend $P = G$, pour lequel $\vec{V}(G) = \vec{0}$: $\vec{V}(M) = s\vec{MG}$. Si $s = 0$: $\vec{V}(M) = \vec{V}(P)$ pour tous points M et P ; avec $P = A$: $\vec{V}(A) = \beta\vec{AB} + \gamma\vec{AC}$. □

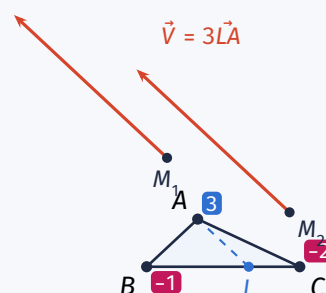
Méthode : Comment réduire une somme vectorielle

1. Calculer la somme s des coefficients. 2. Si $s \neq 0$: introduire G, barycentre du système, et écrire $\vec{V}(M) = s\vec{MG}$ (puis construire G, souvent par associativité). 3. Si $s = 0$: le vecteur est **constant** ; on le calcule en remplaçant M par **le point qui simplifie le plus** (celui de plus gros coefficient), puis on le simplifie (milieu, barycentre partiel).

Exemple : quatre réductions dans un triangle ABC

1. $\vec{MA} + 3\vec{MB} - 2\vec{MC}$: $s = 2 \neq 0$, donc $\vec{MA} + 3\vec{MB} - 2\vec{MC} = 2\vec{MG}$ pour tout M, avec $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 3); (C, -2)\}$.

2. $\vec{V}(M) = 3\vec{MA} - \vec{MB} - 2\vec{MC}$: $s = 0$, vecteur constant. Avec $M = A$: $\vec{V} = -\vec{AB} - 2\vec{AC}$. Or, si $L = \text{Bar}\{(B, 1); (C, 2)\}$ ($\vec{BL} = \frac{2}{3}\vec{BC}$), la réduction en A donne $\vec{AB} + 2\vec{AC} = 3\vec{AL}$. Donc $\vec{V}(M) = 3\vec{LA}$ pour **tout** point M (figure : la même flèche partout).



3. **Reconnaître un barycentre** : si $2\vec{EA} + 3\vec{EB} = 4\vec{EC}$, alors $2\vec{EA} + 3\vec{EB} - 4\vec{EC} = \vec{0}$ et $2 + 3 - 4 = 1 \neq 0$: $E = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 3); (C, -4)\}$ et $\vec{AE} = 3\vec{AB} - 4\vec{AC}$.

4. **Un point défini par une égalité** : $\vec{PA} + \vec{PB} + 2\vec{PC} = \vec{AB}$. $K = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, 2)\} = \text{Bar}\{(I, 2); (C, 2)\}$ est le milieu de $[IC]$ (I milieu de $[AB]$). L'égalité s'écrit $4\vec{PK} = \vec{AB}$, soit $\vec{KP} = -\frac{1}{4}\vec{AB}$: un seul point P convient.

9

Ensembles de points

Théorème (ensembles définis par des normes ; $k \geq 0$)

- Si $\alpha + \beta \neq 0$ et $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$: $\|\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB}\| = k \iff |\alpha + \beta| MG = k \iff MG = \frac{k}{|\alpha + \beta|}$: le **cercle** de centre G et de rayon $\frac{k}{|\alpha + \beta|}$ (réduit au point G si $k = 0$).
- Si $\alpha + \beta = 0$: $\|\alpha\vec{MA} - \alpha\vec{MB}\| = |\alpha| AB$ est constant : l'ensemble est le **plan** si $k = |\alpha| AB$, **vide** sinon.
- Si de plus $H = \text{Bar}\{(C, \gamma); (D, \delta)\}$ avec $|\gamma + \delta| = |\alpha + \beta|$: $\|\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB}\| = \|\gamma\vec{MC} + \delta\vec{MD}\| \iff MG = MH$: la **médiatrice** de $[GH]$ (si $G \neq H$). Si $\gamma + \delta = 0$, le membre de droite est la constante $|\gamma| CD$: on retrouve un **cercle** de centre G .
- $\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB}$ **colinéaire** à un vecteur $\vec{u} \neq \vec{0} \iff \vec{MG}$ colinéaire à $\vec{u}$: la **droite** passant par G et dirigée par $\vec{u}$.

Même chose avec trois ou quatre points (on réduit avec leur barycentre).

Démonstration. On réduit (section 8), puis $\|s\vec{MG}\| = |s| MG$; on reconnaît la définition du cercle, de la médiatrice ($MG = MH$) et de la droite $(G, \vec{u})$. Si une somme est nulle, le vecteur est constant (section 8). $\square$

Hors de ce chapitre : si $|\gamma + \delta| \neq |\alpha + \beta|$ (tous deux non nuls), on obtient $MG = c MH$ avec $c \neq 1$: ni cercle de centre G , ni médiatrice ; cet ensemble sera étudié au chapitre suivant.

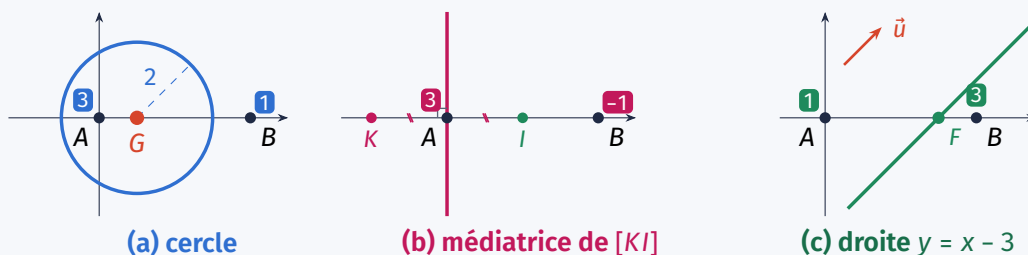
Méthode : Comment déterminer un ensemble de points

- 1. Réduire** chaque somme vectorielle (introduire les barycentres G, H ; repérer les sommes nulles).
- 2. Traduire en distances :** $\|s\vec{MG}\| = |s| MG$ (**valeur absolue !**).
- 3. Reconnaître :** $MG = r$ (cercle), $MG = MH$ (médiatrice), colinéarité (droite), constante (plan ou vide).
- 4. Conclure** par une phrase complète, et **contrôler** avec un point particulier.

Modèle de rédaction ($AB = 4$ cm ; ensemble $\mathcal{E}_1$ des points M tels que $\|3\vec{MA} + \vec{MB}\| = 8$).
 « Comme $3 + 1 = 4 \neq 0$, soit $G = \text{Bar}\{(A, 3); (B, 1)\}$: $\vec{AG} = \frac{1}{4}\vec{AB}$, donc $AG = 1$ cm. Pour tout point M , $3\vec{MA} + \vec{MB} = 4\vec{MG}$. Alors $M \in \mathcal{E}_1 \iff \|4\vec{MG}\| = 8 \iff 4 MG = 8 \iff MG = 2$. $\mathcal{E}_1$ **est le cercle de centre G et de rayon 2 cm.** » Contrôle : le point P de $[GB]$ tel que $GP = 2$ vérifie $3\vec{PA} + \vec{PB} = 4\vec{PG}$, de norme 8 $\checkmark$.

Exemple : trois ensembles avec $AB = 4$ (repère orthonormé : $A(0, 0)$, $B(4, 0)$)

- (a) $\mathcal{E}_1$: cercle de centre $G(1, 0)$, rayon 2. **Par l'équation :** $3\vec{MA} + \vec{MB}$ a pour coordonnées $(4 - 4x, -4y)$, de norme $4\sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$; donc $M \in \mathcal{E}_1 \iff \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = 2$, soit $MG = 2$ $\checkmark$.
- (b) $\|3\vec{MA} - \vec{MB}\| = \|\vec{MA} + \vec{MB}\|$: les sommes valent 2 et 2. Avec $K = \text{Bar}\{(A, 3); (B, -1)\}$ ($\vec{AK} = -\frac{1}{2}\vec{AB}$, $K(-2, 0)$) et I milieu de $[AB]$ ($I(2, 0)$) : $2MK = 2MI$, soit $MK = MI$: la **médiatrice de $[KI]$** . Comme A est le milieu de $[KI]$, c'est la **perpendiculaire à (AB) en A** (l'axe des ordonnées). Contrôle avec $M = A$: $\|-\vec{AB}\| = 4 = \|\vec{AB}\|$ $\checkmark$.
- (c) $\vec{MA} + 3\vec{MB}$ colinéaire à $\vec{u}(1, 1)$: avec $F = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 3)\}$, $F(3, 0)$, c'est $4\vec{MF}$: la **droite passant par F dirigée par $\vec{u}$** , d'équation $y = x - 3$. Contrôle en coordonnées : $\vec{MF}(3 - x, -y)$ et $\det(\vec{MF}, \vec{u}) = (3 - x) \times 1 - (-y) \times 1 = 3 - x + y$, nul si et seulement si $y = x - 3$ $\checkmark$.



Exemple : avec trois points (ABC triangle, G centre de gravité, A' milieu de $[BC]$)

1. $\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MB} - \vec{MC}\|$: à gauche $3\vec{MG}$, à droite le vecteur constant $\vec{CB}$: $3MG = BC$, soit $MG = \frac{BC}{3}$: **le cercle de centre G et de rayon $\frac{BC}{3}$** .
2. $\|2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\| = 6$: somme nulle ; avec $M = A$, le vecteur vaut $-\vec{AB} - \vec{AC} = -2\vec{AA'}$, de norme $2AA'$. L'ensemble est **le plan** si $AA' = 3$, et **l'ensemble vide** sinon.

10

Barycentre et physique

Définition : centre d'inertie (ou centre de masse)

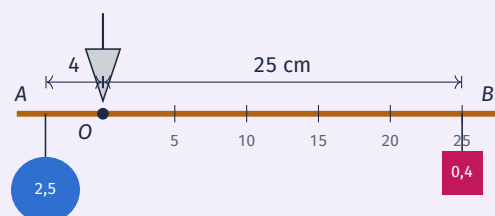
Le **centre d'inertie** d'un système de points matériels $A_1, \dots, A_n$ de masses $m_1, \dots, m_n$ est le barycentre $G = \text{Bar}\{(A_1, m_1); \dots; (A_n, m_n)\}$: $m_1 \vec{GA}_1 + \dots + m_n \vec{GA}_n = \vec{0}$ et $x_G = \frac{m_1 x_1 + \dots + m_n x_n}{m_1 + \dots + m_n}$. Pour un solide **homogène** ayant un centre de symétrie (tige, rectangle, disque, boule), G est ce centre ; pour une **plaque triangulaire** homogène, c'est le centre de gravité du triangle.

Exemple : deux systèmes célèbres

La Terre et la Lune. $M_T \approx 81 M_L$ et $TL \approx 384\,400$ km. Leur centre d'inertie $G = \text{Bar}\{(T, 81); (L, 1)\}$ vérifie $\vec{TG} = \frac{1}{82} \vec{TL}$: $TG \approx 4\,688$ km, moins que le rayon terrestre (6 371 km) : **G est à l'intérieur de la Terre**, et c'est autour de lui que la Terre et la Lune tournent chaque mois.

La molécule de monoxyde de carbone CO. Masses atomiques 12 (C) et 16 (O), distance $CO = 113$ pm : $\vec{CG} = \frac{16}{28} \vec{CO}$, $CG = \frac{4}{7} \times 113 \approx 64,6$ pm : G est plus proche de l'atome d'oxygène.

Le levier et la balance romaine. Une tige rigide de masse négligeable, posée sur un pivot O et portant m_A en A et m_B en B , est en équilibre si et seulement si $O = \text{Bar}\{(A, m_A); (B, m_B)\}$, c'est-à-dire $m_A \times OA = m_B \times OB$ (O entre A et B). **La balance romaine** (le *qarastūn* des savants arabes) : un crochet A à 4 cm du pivot porte un poisson de 2,5 kg ; où placer le contrepois B de 0,4 kg ? $2,5 \times 4 = 0,4 \times OB$, donc $OB = 25$ cm. Une masse m (en kg) s'équilibre à $OB = 10m$ cm : **la graduation est régulière**, 1 cm pour 100 g.



Une tige qui a une masse. Une tige homogène $[AB]$ de 1 m et de 2 kg porte 3 kg en A et 1 kg en B . Sa masse se place en son milieu I : le point d'équilibre est $G = \text{Bar}\{(A, 3); (I, 2); (B, 1)\}$, $AG = \frac{3 \times 0 + 2 \times 50 + 1 \times 100}{6} = \frac{100}{3} \approx 33,3$ cm de A (trois points alignés).

Deux patineurs. Deux patineurs immobiles sur la glace, de 60 kg (A) et 40 kg (B), se repoussent.

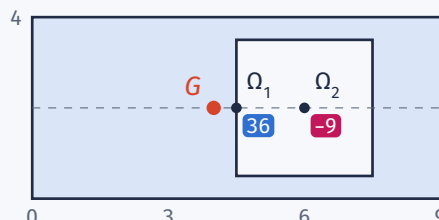
Le système est isolé : son centre d'inertie G **reste immobile**. De $60\vec{GA} + 40\vec{GB} = \vec{0}$ (avant) et $60\vec{GA}_1 + 40\vec{GB}_1 = \vec{0}$ (après), on tire $60\vec{AA}_1 + 40\vec{BB}_1 = \vec{0}$: quand le premier a reculé de 2 m, le second a reculé de 3 m dans l'autre sens.

Exemple : une plaque percée : un coefficient négatif

On découpe un trou carré de 3 cm de côté, de centre $\Omega_2(6, 2)$, dans une plaque rectangulaire homogène $[0, 9] \times [0, 4]$ (en cm), de centre $\Omega_1(\frac{9}{2}, 2)$. La masse étant proportionnelle à l'aire, la plaque pleine (36 cm^2) est la réunion de la plaque percée (centre G , aire 27) et du carré (aire 9) : $\Omega_1 = \text{Bar}\{(\Omega_1, 27); (\Omega_2, 9)\}$, donc

$$G = \text{Bar}\{(\Omega_1, 36); (\Omega_2, -9)\} = \text{Bar}\{(\Omega_1, 4); (\Omega_2, -1)\} :$$

le trou compte avec un coefficient négatif. $x_G = \frac{4 \times \frac{9}{2} - 6}{3} = 4$ et $y_G = 2$: $G(4, 2)$, à $\frac{1}{2}$ cm de Ω_1 , du côté opposé au trou, comme prévu.



11

Pour aller plus loin

Segment et demi-droite (avec $A \neq B$)

$M \in [AB] \iff M = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ avec $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ et $\alpha + \beta > 0 \iff M = \text{Bar}\{(A, 1-t); (B, t)\}$ avec $t \in [0, 1]$. De même, $M \in [AB) \iff M = \text{Bar}\{(A, 1-t); (B, t)\}$ avec $t \geq 0$.

Démonstration. $M = \text{Bar}\{(A, 1-t); (B, t)\} \iff \vec{AM} = t\vec{AB}$, et $M \in [AB] \iff t \in [0, 1]$. Si $\alpha, \beta \geq 0$, alors $t = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \in [0, 1]$; réciproquement, si $t \in [0, 1]$, les coefficients $1-t$ et t sont positifs. $\square$

Tout point du plan est un barycentre de A, B, C (triangle)

Soit (x, y) les coordonnées de M dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$, c'est-à-dire $\vec{AM} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$. Alors

$$M = \text{Bar}\{(A, 1-x-y); (B, x); (C, y)\}.$$

M est à l'intérieur du triangle si et seulement si ces trois coefficients sont **strictement positifs** (résultat à citer).

Démonstration de la formule. La somme vaut 1, et le barycentre est défini par $\vec{AG} = \frac{x}{1}\vec{AB} + \frac{y}{1}\vec{AC} = \vec{AM}$: $G = M$. $\square$

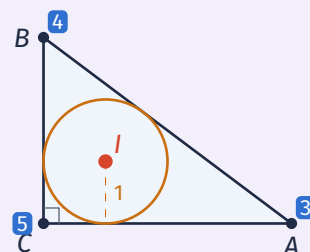
Exemples :

- $\vec{AP} = \frac{1}{5}\vec{AB} + \frac{2}{5}\vec{AC}$ donne $P = \text{Bar}\{(A, \frac{2}{5}); (B, \frac{1}{5}); (C, \frac{2}{5})\} = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 1); (C, 2)\}$: P est à l'intérieur ; c'est le point de concours des céviennes de la section 7 ;
- $\vec{AQ} = \frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$ donne $Q = \text{Bar}\{(A, -\frac{1}{4}); (B, \frac{3}{4}); (C, \frac{1}{2})\} = \text{Bar}\{(A, -1); (B, 3); (C, 2)\}$: le coefficient de A est négatif, Q est à l'extérieur, de l'autre côté de (BC) par rapport à A .

Les centres du triangle (à citer). Notons $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.

- Le centre de gravité : $\text{Bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, 1)\}$ (section 4).
- Le centre du cercle inscrit (point de concours des bissectrices) : $I = \text{Bar}\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$.
- Le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre sont aussi des barycentres de A, B, C , avec des coefficients trigonométriques (hors programme).

Contrôle sur un triangle rectangle : $C(0, 0)$, $A(4, 0)$, $B(0, 3)$, d'où $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$: $I\left(\frac{3 \times 4 + 4 \times 0 + 5 \times 0}{12}, \frac{3 \times 0 + 4 \times 3 + 5 \times 0}{12}\right) = (1, 1)$, à la distance 1 des deux côtés de l'angle droit : le cercle inscrit a pour rayon 1 ✓ (et l'on sait que $r = \frac{3+4-5}{2} = 1$).



12

Les pièges classiques

X Faux	✓ Vrai
« $\text{Bar}\{(A, 2); (B, -2)\}$ est le milieu de $[AB]$ »	la somme des coefficients est nulle : ce barycentre n'existe pas
« $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 3)\}$, donc $\vec{AG} = \frac{1}{4}\vec{AB}$ »	$\vec{AG} = \frac{3}{4}\vec{AB}$: au numérateur, le coefficient de l'autre point ; G est plus près de B
« $\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} = \vec{0}$ donne $\vec{GA} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\vec{AB}$ »	l'ordre des lettres compte : $\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\vec{AB}$, donc $\vec{GA} = -\frac{\beta}{\alpha+\beta}\vec{AB}$
« $\text{Bar}\{(A, 2); (B, -1)\}$ est sur le segment $[AB]$ »	signes contraires : hors de $[AB]$ ($\vec{AG} = -\vec{AB}$, du côté de A)
« on peut ajouter 1 à tous les coefficients »	on peut seulement multiplier : $\text{Bar}\{(A, 1); (B, 2)\} \left(\frac{2}{3}\right) \neq \text{Bar}\{(A, 2); (B, 3)\} \left(\frac{3}{5}\right)$
« $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AA'}$, donc $G = \text{Bar}\{(A, 2); (A', 3)\}$ »	$t = \frac{2}{3}$ donne $(1-t, t) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$: $G = \text{Bar}\{(A, 1); (A', 2)\}$
« $x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{2}$ »	on divise par la somme des coefficients $\alpha + \beta$, pas par le nombre de points
« $\text{Bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, 2)\} = \text{Bar}\{(I, 1); (C, 2)\}$, I milieu de $[AB]$ »	le point partiel porte la somme : $\text{Bar}\{(I, 2); (C, 2)\}$, le milieu de $[IC]$
« dans $\{(A, 1); (B, -1); (C, 3)\}$, je groupe A et B »	somme partielle nulle : on groupe $(A, 1)$, $(C, 3)$, ou $(B, -1)$, $(C, 3)$
« $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ est sur (AB) »	seulement si $\gamma = 0$; en général $G \in (HC)$, H barycentre partiel de A et B
« $\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} = (\alpha + \beta)\vec{GM}$ »	$(\alpha + \beta)\vec{MG}$: le vecteur part de M (contrôle : $M = A$)
« $\ -2\vec{MG} \ = 8$, donc $MG = -4$ »	une norme est positive : $\ -2\vec{MG} \ = 2MG$, donc $MG = 4$
« $\ \vec{MA} - \vec{MB}\ = 3$ est un cercle »	$\vec{MA} - \vec{MB} = \vec{BA}$: plan si $AB = 3$, vide sinon
« $\ \vec{MA} + \vec{MB}\ = \ 2\vec{MA} + \vec{MB}\ $ est une médiatrice »	sommes 2 et 3 : $2MI = 3MG$, ce n'est pas une médiatrice

« le trou d'une plaque percée compte avec son aire »

avec **moins** son aire :

$$G = \text{Bar}\{(\Omega_1, \mathcal{A}_1); (\Omega_2, -\mathcal{A}_2)\}$$

13

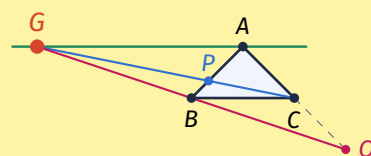
Les astuces des concours

★ Astuce de concours : multiplier, dissocier

Multiplier : $\text{Bar}\{(A, \frac{2}{3}); (B, -\frac{1}{4}); (C, \frac{1}{2})\} = \text{Bar}\{(A, 8); (B, -3); (C, 6)\}$ ($\times 12$, le PPCM des dénominateurs). **Dissocier** un point lourd en deux : $(C, 5) = (C, 2) + (C, 3)$. Ainsi $G = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 2); (C, 5)\} = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 2); (C, 2); (C, 3)\} = \text{Bar}\{(G_0, 6); (C, 3)\}$, où G_0 est le centre de gravité de ABC : G est sur la médiane issue de C , avec $\vec{G_0G} = \frac{1}{3}\vec{G_0C}$.

★ Astuce de concours : une somme partielle nulle donne une parallèle

$G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 2); (C, -2)\}$ (somme 1). $P = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$ ($\vec{AP} = \frac{2}{3}\vec{AB}$) donne $G \in (CP)$; $Q = \text{Bar}\{(A, 1); (C, -2)\}$ ($\vec{AQ} = 2\vec{AC}$) donne $G \in (BQ)$. Mais B et C ne se groupent pas (somme nulle) : la réduction donne $\vec{AG} = 2\vec{AB} - 2\vec{AC} = 2\vec{CB}$: G est sur la parallèle à (BC) passant par A . Conclusion : (CP) , (BQ) et cette parallèle sont **concurrentes**.



★ Astuce de concours : lire les coefficients sur une figure

Si $M \in [AB]$ avec $\frac{MA}{MB} = \frac{p}{q}$, alors $M = \text{Bar}\{(A, q); (B, p)\}$: **on croise** (le coefficient de A est proportionnel à la distance MB). Par exemple, $\vec{AM} = \frac{2}{7}\vec{AB}$ donne $MA = 2$ et $MB = 5$ (en septièmes), donc $M = \text{Bar}\{(A, 5); (B, 2)\}$. Si M est **hors** de $[AB]$, les coefficients sont de signes contraires : $\frac{MA}{MB} = \frac{p}{q}$ donne $M = \text{Bar}\{(A, q); (B, -p)\}$.

★ Astuce de concours : réduire avant de calculer une norme

Repère orthonormé, $A(2, 1)$, $B(6, -3)$; M parcourt l'axe des ordonnées. Minimum de $\|\vec{MA} + 3\vec{MB}\|$? Sans réduire : un calcul pénible. En réduisant : $\vec{MA} + 3\vec{MB} = 4\vec{MG}$ avec $G(\frac{2+18}{4}, \frac{1-9}{4}) = (5, -2)$. Pour $M(0, y)$, $MG \geq 5$ (distance de G à l'axe), avec égalité si et seulement si $M = (0, -2)$: **minimum** $4 \times 5 = 20$, **atteint en** $M(0, -2)$.

★ Astuce de concours : un QCM de concours : tester dans un repère bien choisi

Soit ABC un triangle, A' le milieu de $[BC]$ et $G = \text{Bar}\{(A, -2); (B, 1); (C, 3)\}$. Alors : (a) $G \in (BC)$; (b) $\vec{CG} = \vec{AA'}$; (c) G est le milieu de $[AC]$; (d) $\vec{AG} = 2\vec{AA'}$.

Astuce : on travaille dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$, où $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$ (les propriétés de barycentre et de milieu ne dépendent pas du repère). Alors $G(\frac{0+1+0}{-2+1+3}, \frac{0+0+3}{-2+1+3}) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ et $A'(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. (a) : (BC) a pour équation $x + y = 1$, or $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$: faux. (b) : $\vec{CG}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et $\vec{AA'}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$: **vrai**. (c) : le milieu de $[AC]$ est $(0, \frac{1}{2})$: faux. (d) : $2\vec{AA'}(1, 1)$: faux. **Réponse (b)**; en 30 secondes, sans figure.

★ **Astuce de concours : le barycentre est une moyenne pondérée**

Au bac, une moyenne avec coefficients **est** un barycentre : des notes 12 (coefficient 7), 15 (coefficient 5) et 9 (coefficient 2) donnent $\frac{7 \times 12 + 5 \times 15 + 2 \times 9}{14} = \frac{177}{14} \approx 12,64$, l'abscisse de $\text{Bar}\{(N_1, 7); (N_2, 5); (N_3, 2)\}$ sur l'axe des notes. Avec des coefficients **positifs**, le barycentre est toujours **entre** les points extrêmes (section 11) : une moyenne est entre la plus petite et la plus grande note. C'est un contrôle immédiat de vos calculs de coordonnées.

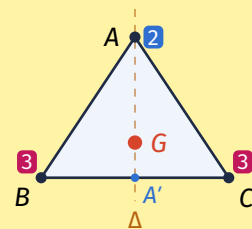
★ **Astuce de concours : calculer « avec des points »**

Avec une origine O quelconque, $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ s'écrit $s\vec{OG} = \alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB} + \gamma\vec{OC}$, abrégé en $sG = \alpha A + \beta B + \gamma C$ (c'est exactement le calcul des coordonnées). Cette écriture rend les preuves très rapides : dans l'exemple d'alignement de la section 7, $3J = 2A + C$ et $2I = B + C$, donc $3J - 2I = 2A - B = K$: $K = \text{Bar}\{(J, 3); (I, -2)\}$ en une ligne. Sur une copie, on rédige ensuite avec les vecteurs.

★ **Astuce de concours : penser à la symétrie**

Si deux points de **même coefficient** sont symétriques par rapport à une droite Δ , leur barycentre partiel est leur milieu, qui est sur Δ : si tout le système est symétrique, son barycentre est **sur l'axe de symétrie**, sans aucun calcul (de même avec un centre de symétrie).

Exemples : la molécule de dioxyde de carbone $O=C=O$ est linéaire, avec deux atomes d'oxygène de même masse, à 116 pm de part et d'autre du carbone : son centre d'inertie est **l'atome de carbone**. Dans un triangle ABC isocèle en A , $G = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 3); (C, 3)\} = \text{Bar}\{(A, 2); (A', 6)\}$ est sur l'axe (AA') , avec $\vec{AG} = \frac{3}{4}\vec{AA'}$.



★ **Astuce de concours : un QCM de physique : regrouper les masses égales**

Une tige homogène $[AB]$, de longueur L et de masse m , porte en B une bille de masse m . Le centre d'inertie G du système vérifie : (a) $AG = \frac{L}{2}$; (b) $AG = \frac{2L}{3}$; (c) $AG = \frac{3L}{4}$; (d) $AG = L$.

Solution. La masse de la tige se place en son milieu I : $G = \text{Bar}\{(I, m); (B, m)\}$. Deux masses **égales** : G est le milieu de $[IB]$, donc $AG = \frac{L}{2} + \frac{L}{4} = \frac{3L}{4}$: **réponse (c)**. **Le réflexe** : des masses égales se regroupent en leur milieu (ou en leur isobarycentre) ; le calcul se fait de tête.

14

L'essentiel du chapitre en une page

Barycentre de deux points ($\alpha + \beta \neq 0$)

$$G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\} \iff \alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} = \vec{0}.$$

$$\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \vec{AB} \quad (\text{coefficient de l'autre point sur la somme}); \quad \vec{BG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \vec{BA}.$$

Levier : $|\alpha| GA = |\beta| GB$. Si $\alpha + \beta = 0$: **pas** de barycentre.

Milieu : $I = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 1)\}$ (isobarycentre).

$$\vec{AM} = t \vec{AB} \iff M = \text{Bar}\{(A, 1-t); (B, t)\}.$$

Propriétés

Homogénéité : on multiplie tous les coefficients par $k \neq 0$.

Même signe : $G \in [AB]$; signes contraires : $G \notin [AB]$, du côté du plus grand |coefficient| ; G est plus près du point le plus « lourd ».

$[AB]$: coefficients positifs ; intérieur d'un triangle : trois coefficients de même signe.

Coordonnées ($s = \alpha + \beta + \gamma \neq 0$)

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{s}, \quad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{s}.$$

Contrôle : avec des coefficients positifs, x_G est une moyenne pondérée.

Trois et quatre points

$$\vec{AG} = \frac{\beta}{s} \vec{AB} + \frac{\gamma}{s} \vec{AC} \quad (\text{parallélogramme AUGV}).$$

Centre de gravité : $\text{Bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, 1)\}$,

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}, \quad \vec{AG} = \frac{2}{3} \vec{AA'}.$$

Quadrilatère : isobarycentre = milieu commun de $[IK]$, $[JL]$ (Varignon) et du segment des milieux des diagonales ; $\vec{DG} = \frac{3}{4} \vec{D\vec{G}_1}$.

Associativité

$$\alpha + \beta \neq 0, H = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\} :$$

$$G = \text{Bar}\{(H, \alpha + \beta); (C, \gamma)\}, \quad G \in (HC), \quad \vec{HG} = \frac{\gamma}{s} \vec{HC}.$$

Jamais de regroupement de somme nulle ; on peut dissocier : $(A, 3) = (A, 1) + (A, 2)$.

Réduction

$$s \neq 0 : \alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} + \gamma \vec{MC} = s \vec{MG} \text{ pour tout } M.$$

$s = 0$: vecteur **constant**, égal à $\beta \vec{AB} + \gamma \vec{AC}$ (on prend $M = A$).

Alignement et concours

$$R = \text{Bar}\{(P, a); (Q, b)\} \Rightarrow R \in (PQ).$$

Si, par associativité, $G \in (HC)$, $G \in (KA)$ et $G \in (LB)$: ces trois droites sont **concurrentes** en G .

Ensembles de points

$$\|\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB}\| = k \iff MG = \frac{k}{|\alpha + \beta|} : \text{cercle de centre } G.$$

Somme nulle : norme constante : plan ou vide.

$\|\dots\| = \|\dots\|$ avec des sommes de même valeur absolue : $MG = MH$, médiatrice de $[GH]$.

$\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB}$ colinéaire à $\vec{u}$: droite passant par G , dirigée par $\vec{u}$.

Physique

Centre d'inertie : $\text{Bar}\{(A_1, m_1); \dots; (A_n, m_n)\}$;

$$\text{levier : } m_A OA = m_B OB.$$

Plaque : barycentre des centres des morceaux, pondérés par les aires ; un trou compte pour $-(\text{son aire})$.

À retenir pour les concours

$$sG = \alpha A + \beta B + \gamma C \quad (\text{calcul « avec des points »}) ;$$

centre du cercle inscrit $\text{Bar}\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$;

QCM : repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$.

Bon courage ! La régularité bat le talent.

Maths Olympiad

Partie B • Le parcours

30 exercices sur 4 niveaux, du plus simple au niveau concours

15 Niveau 1 • Bases

Exercice 1 Construire le barycentre de deux points ★

corrigé p. 39

A et B sont deux points tels que $AB = 6$ cm.

1. Soit $G_1 = \text{Bar}\{(A, 5); (B, 1)\}$. Montrer (Chasles) que $5\vec{G_1A} + \vec{G_1B} = \vec{0}$ équivaut à $\vec{AG_1} = \frac{1}{6}\vec{AB}$.
2. Exprimer $\vec{AG}$ en fonction de $\vec{AB}$ pour $G_2 = \text{Bar}\{(A, 1); (B, -7)\}$, $G_3 = \text{Bar}\{(A, -2); (B, 1)\}$, $G_4 = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$ et le milieu I de $[AB]$; placer ces points. Lesquels sont sur $[AB]$? Reconnaitre, sans calcul, $\text{Bar}\{(A, 10); (B, 2)\}$, $\text{Bar}\{(A, -\frac{1}{7}); (B, 1)\}$ et $\text{Bar}\{(A, -3); (B, -3)\}$.
3. Pour quel m le point $\text{Bar}\{(A, m); (B, 4)\}$ n'existe-t-il pas ? est-il le milieu de $[AB]$? Pour quels m est-il sur $[AB]$?

Exercice 2 Retrouver les coefficients ★

corrigé p. 39

1. Écrire G comme barycentre de A et B (coefficients entiers) et exprimer $\vec{AG}$ en fonction de $\vec{AB}$: a) $2\vec{GA} + 5\vec{GB} = \vec{0}$; b) $3\vec{GA} = 2\vec{GB}$; c) $\vec{AG} = \frac{4}{9}\vec{AB}$; d) $\vec{BG} = \frac{1}{4}\vec{BA}$; e) $4\vec{GA} - \vec{GB} = \vec{AB}$ (Chasles).
2. Sur une droite graduée, A et B ont pour abscisses 0 et 5 : écrire comme barycentres de A et B les points d'abscisses 1, 3, 7 et -3.

Exercice 3 Réduire une somme de deux vecteurs ★

corrigé p. 39

$AB = 9$ cm, $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 8)\}$, $K = \text{Bar}\{(A, -1); (B, 10)\}$.

1. Placer G et K. Montrer (Chasles) que $\vec{MA} + 8\vec{MB} = 9\vec{MG}$ pour tout point M ; réduire $-\vec{MA} + 10\vec{MB}$. Montrer que $3\vec{MA} - 3\vec{MB}$ ne dépend pas de M.
2. Construire le point M tel que $\vec{MA} + 8\vec{MB} = 3\vec{AB}$. Existe-t-il P tel que $3\vec{PA} - 3\vec{PB} = 6\vec{AB}$?

Exercice 4 Coordonnées du barycentre de deux points ★

corrigé p. 40

Dans un repère, on donne $A(-1, 3)$ et $B(5, 0)$.

1. Coordonnées de $G = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 1)\}$, de $H = \text{Bar}\{(A, 1); (B, -2)\}$ et du milieu I de $[AB]$? 2. a) Montrer que $C(3, 1)$ vérifie $\vec{AC} = \frac{2}{3}\vec{AB}$; en déduire que C est un barycentre de A et B. b) $D(0, 2)$ est-il un barycentre de A et B ? (Calculer $\det(\vec{AD}, \vec{AB})$.)
3. Pour $\alpha \neq -1$, calculer les coordonnées de $E_\alpha = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, 1)\}$. Pour quel α ce point est-il sur la droite $y = x$?

Exercice 5 Barycentre de trois points : construire ★

corrigé p. 40

1. ABC est un triangle, A' le milieu de $[BC]$ et $G = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 1); (C, 1)\}$. a) Pourquoi G existe-t-il ? b) En insérant A dans $2\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$, montrer que $\vec{AG} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC}$. c) En déduire que G est le milieu de $[AA']$.

2. Montrer que $H = \text{Bar}\{(A, 3); (B, 1); (C, -2)\}$ vérifie $\vec{AH} = \frac{1}{2}\vec{AB} - \vec{AC}$; construire G et H . 3. Pour quel m le point $\text{Bar}\{(A, m); (B, 2); (C, -5)\}$ n'existe-t-il pas ? Montrer qu'alors $m\vec{MA} + 2\vec{MB} - 5\vec{MC}$ ne dépend pas de M .

Exercice 6 Centre de gravité et coordonnées ★

corrigé p. 40

Dans un repère, on donne $A(-1, 1)$, $B(5, -1)$ et $C(2, 6)$.

- Vérifier que A, B, C ne sont pas alignés. Calculer les coordonnées du centre de gravité G de ABC et du milieu A' de $[BC]$; vérifier que $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AA'}$ et que $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.
- Coordonnées de $K = \text{Bar}\{(A, -1); (B, 2); (C, 2)\}$? Vérifier que G est le milieu de $[AK]$ et l'expliquer avec $\vec{AK}$.

Exercice 7 Réduire une somme de trois vecteurs ★

corrigé p. 40

ABC est un triangle de centre de gravité G , I le milieu de $[AB]$; pour tout point M : $\vec{u} = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$, $\vec{v} = \vec{MA} + \vec{MB} - 4\vec{MC}$, $\vec{w} = \vec{MA} - 3\vec{MB} + 2\vec{MC}$.

- a) Montrer que $\vec{u} = 3\vec{MG}$. b) Soit $K = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, -4)\}$: montrer que $\vec{v} = -2\vec{MK}$ et que C est le milieu de $[IK]$. c) Montrer que $\vec{w} = \vec{BA} + 2\vec{BC}$.
- Montrer que $\vec{u} - \vec{v} = 5\vec{MC}$; quel est le seul point M tel que $\vec{u} = \vec{v}$?

Exercice 8 Physique : le barycentre de deux astres ★

corrigé p. 41

Deux astres de centres A, B et de masses m_A, m_B tournent autour de leur centre d'inertie $G = \text{Bar}\{(A, m_A); (B, m_B)\}$; $d = AB$, $k = \frac{m_A}{m_B}$, R est le rayon de l'astre A .

- Montrer que $AG = \frac{d}{k+1}$ et $\frac{GA}{GB} = \frac{m_B}{m_A}$ (règle du levier), puis que G est hors de l'astre A si et seulement si $k < \frac{d}{R} - 1$.
- Calculer AG ; G est-il dans l'astre A ? a) Soleil-Terre : $k \approx 333\,000$, $d \approx 150$ millions de km, $R \approx 696\,000$ km ; b) Pluton-Charon : $k \approx 8$, $d \approx 19\,600$ km, $R \approx 1\,190$ km.

16

Niveau 2 • Bac**Exercice 9 Type devoir surveillé (1) : deux points, puis trois points** ★★

corrigé p. 41

- ABC est un triangle. a) Justifier l'existence de $P = \text{Bar}\{(B, 2); (C, 3)\}$, montrer que $\vec{BP} = \frac{3}{5}\vec{BC}$ et construire P . b) Montrer que $2\vec{MB} + 3\vec{MC} = 5\vec{MP}$ pour tout point M .
- Soit $G = \text{Bar}\{(A, -1); (B, 2); (C, 3)\}$. a) Pourquoi G existe-t-il ? b) Montrer que $\vec{AG} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AC}$; construire G . c) Avec 1.b) pour $M = G$, montrer que $-\vec{GA} + 5\vec{GP} = \vec{0}$, puis que $\vec{AG} = \frac{5}{4}\vec{AP}$.
- Pour tout M : $\vec{u} = -\vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC}$, $\vec{v} = -5\vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC}$. Montrer que $\vec{u} = 4\vec{MG}$ et $\vec{v} = 5\vec{AP}$.
- a) Construire le point N tel que $-\vec{NA} + 2\vec{NB} + 3\vec{NC} = 2\vec{AB}$. b) Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.

Exercice 10 Type devoir surveillé (2) : associativité et alignement ★★

corrigé p. 41

ABC est un triangle ; $\vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{AB}$, $\vec{BQ} = \frac{4}{5}\vec{BC}$, $\vec{AR} = \frac{2}{3}\vec{AC}$.

- Montrer que $P = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 1)\}$, $Q = \text{Bar}\{(B, 1); (C, 4)\}$ et $R = \text{Bar}\{(A, 2); (C, 4)\}$.
- Soit $G = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 1); (C, 4)\}$. a) Par associativité, montrer que G est sur (CP) , (AQ) et (BR) . Conclure. b) Exprimer $\vec{CG}$, $\vec{AG}$, $\vec{BG}$ en fonction de $\vec{CP}$, $\vec{AQ}$, $\vec{BR}$.
- Soit X tel que $\vec{CX} = \frac{1}{3}\vec{BC}$. a) Montrer que $X = \text{Bar}\{(B, -1); (C, 4)\}$. b) Avec le système $(A, 2), (B, 1), (B, -1), (C, 4)$, montrer que $R = \text{Bar}\{(P, 3); (X, 3)\}$. c) En déduire que P, R, X sont alignés et que R est le milieu de $[PX]$.

Exercice 11 Type devoir surveillé (3) : dans un repère ★★

corrigé p. 42

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne $A(1, 3)$, $B(5, -1)$ et $C(-1, 1)$.

- Vérifier que A , B , C ne sont pas alignés. Calculer les coordonnées de $I = \text{Bar}\{(A, 3); (B, 1)\}$, $J = \text{Bar}\{(B, 1); (C, -2)\}$ et $G = \text{Bar}\{(A, 3); (B, 1); (C, -2)\}$.
- a) Équations cartésiennes de (CI) et de (AJ) ? b) Résoudre le système formé par ces deux équations ; que remarque-t-on ? c) L'expliquer par l'associativité.
- Pour $m \neq 1$, soit $G_m = \text{Bar}\{(A, m); (B, 1); (C, -2)\}$. a) Calculer ses coordonnées ; en déduire que $G_m \in (AJ)$ et l'expliquer sans calcul. b) Pour quel m a-t-on $G_m \in (CI)$? c) Montrer que $AG_m = \frac{1}{1-m} \vec{AJ}$; ensemble des points G_m ($m \neq 1$) ?

Exercice 12 Type devoir surveillé (4) : ensembles de points ★★

corrigé p. 42

$AB = 5$ cm, $G = \text{Bar}\{(A, 3); (B, 2)\}$ et $K = \text{Bar}\{(A, -1); (B, 2)\}$.

- Construire G et K (B est le milieu de $[AK]$). Réduire $\vec{u} = 3\vec{MA} + 2\vec{MB}$, $\vec{v} = -\vec{MA} + 2\vec{MB}$ et $\vec{w} = \vec{MA} - \vec{MB}$.
- Déterminer et construire : $\mathcal{E}_1 = \{M / \|\vec{u}\| = 25\}$; $\mathcal{E}_2 = \{M / \|\vec{u}\| = \|5\vec{MA} - 10\vec{MB}\|\}$; $\mathcal{E}_3 = \{M / \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\|\}$ (vérifier que $B \in \mathcal{E}_3$) ; $\mathcal{E}_4 = \{M / \|2\vec{w}\| = 10\}$, puis $\|2\vec{w}\| = 8$.
- Repère orthonormé $A(0, 0)$, $B(5, 0)$ (en cm) : équations de $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$? Montrer qu'ils ont exactement deux points communs.

Exercice 13 Quatre points pondérés ★★

corrigé p. 42

$ABCD$ est un quadrilatère, I et J les milieux de $[BC]$ et $[AD]$; $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 3); (C, 3); (D, 1)\}$, $P = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 3)\}$, $Q = \text{Bar}\{(C, 3); (D, 1)\}$, $R = \text{Bar}\{(A, 1); (C, 3)\}$ et $S = \text{Bar}\{(B, 3); (D, 1)\}$.

- Exprimer $\vec{AP}$, $\vec{DQ}$, $\vec{AR}$, $\vec{DS}$ en fonction de $\vec{AB}$, $\vec{DC}$, $\vec{AC}$, $\vec{DB}$. 2. Montrer que G est le milieu de $[PQ]$ et de $[RS]$; nature de $PRQS$?
- Montrer que $G = \text{Bar}\{(J, 2); (I, 6)\}$; exprimer $\vec{JG}$ à l'aide de $\vec{JI}$.

Exercice 14 Ensembles de points dans un repère ★★

corrigé p. 43

Repère orthonormé ; $A(1, 2)$, $B(3, 0)$, $C(-1, -2)$, $K = \text{Bar}\{(A, 2); (B, -1)\}$, $L = \text{Bar}\{(B, 1); (C, -2)\}$.

- Coordonnées de K et L ? Montrer que $2\vec{MA} - \vec{MB} = \vec{MK}$ et $\vec{MB} - 2\vec{MC} = -\vec{ML}$ pour tout point M .
- Pour $M(x, y)$, calculer les coordonnées de $2\vec{MA} - \vec{MB}$; en déduire une équation et la nature de $\Gamma_1 = \{M / \|2\vec{MA} - \vec{MB}\| = 5\}$.
- $\Gamma_2 = \{M / \|2\vec{MA} - \vec{MB}\| = \|\vec{MB} - 2\vec{MC}\|\}$ (sommes des coefficients 1 et -1) : montrer que c'est la médiatrice de $[KL]$; en trouver une équation par le calcul. 4. Points communs à Γ_1 et Γ_2 ?

Exercice 15 Construire un barycentre de trois façons ★★

corrigé p. 43

ABC est un triangle, B' le milieu de $[AC]$ et $G = \text{Bar}\{(A, 3); (B, -4); (C, 3)\}$.

- Montrer que $\vec{AG} = -2\vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{AC}$.
- Trois regroupements. a) Montrer que $\vec{B'G} = -2\vec{B'B}$. b) Avec $H = \text{Bar}\{(A, 3); (B, -4)\}$: exprimer $\vec{AH}$ à l'aide de $\vec{AB}$, puis $\vec{HG}$ à l'aide de $\vec{HC}$. c) Avec $L = \text{Bar}\{(B, -4); (C, 3)\}$: exprimer $\vec{BL}$ à l'aide de $\vec{BC}$, puis $\vec{AG}$ à l'aide de $\vec{AL}$.
- Construire G des trois façons ; que dire des droites (BB') , (HC) , (AL) ?

Exercice 16 Vrai ou faux ? ★★

corrigé p. 43

Justifier (ABC est un triangle de centre de gravité G , A' le milieu de $[BC]$). a) Si $G_1 = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 3)\}$, alors $\vec{AG}_1 = \frac{2}{5}\vec{AB}$. b) Le point $\text{Bar}\{(A, 3); (B, -3)\}$ existe. c) $G = \text{Bar}\{(A, 1); (A', 2)\}$. d) Si $H = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 1)\}$, alors $\text{Bar}\{(A, 2); (B, 1); (C, 4)\} = \text{Bar}\{(H, 1); (C, 4)\}$. e) L'ensemble des points M tels que $\|\vec{MA} + \vec{MB}\| = AB$ est la médiatrice de $[AB]$.

17

Niveau 3 · Approfondissement

Exercice 17 La méthode des masses ★★★

corrigé p. 44

ABC est un triangle ; $\vec{AP} = \frac{3}{4}\vec{AB}$, $\vec{AQ} = \frac{1}{3}\vec{AC}$; (BQ) et (CP) se coupent en K .

1. Écrire P comme barycentre de A et B , et Q comme barycentre de A et C , en donnant à A le même coefficient.
2. En déduire que $K = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 6); (C, 1)\}$, puis $\frac{BK}{KQ}$ et $\frac{CK}{KP}$.
3. (AK) coupe (BC) en R : écrire R comme barycentre de B et C ; calculer $\frac{BR}{RC}$ et $\frac{AK}{KR}$.

Exercice 18 Ensembles de points dans un triangle ★★★

corrigé p. 44

ABC est un triangle de centre de gravité G ; A' , C' sont les milieux de $[BC]$, $[AB]$. Déterminer et construire :

1. $\Gamma_1 = \{M / \|2\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MB} + \vec{MC} - 2\vec{MA}\|\}$ (le cercle de diamètre $[AA']$) ;
2. $\Gamma_2 = \{M / \|2\vec{MA} + \vec{MB}\| = \|\vec{MB} + 2\vec{MC}\|\}$ (la perpendiculaire à (AC) passant par G) ;
3. $\Gamma_3 = \{M / \|\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = \|\vec{MA} - \vec{MB}\|\}$; montrer que $C' \in \Gamma_3$ si et seulement si ABC est rectangle en C (c'est-à-dire si C est sur le cercle de diamètre $[AB]$).

Exercice 19 Barycentres et courbes de Bézier ★★★

corrigé p. 44

(Algorithme de De Casteljau.) ABC est un triangle ; pour $t \in [0, 1]$, $Q_0 = \text{Bar}\{(A, 1-t); (B, t)\}$, $Q_1 = \text{Bar}\{(B, 1-t); (C, t)\}$, $P_t = \text{Bar}\{(Q_0, 1-t); (Q_1, t)\}$.

1. Exprimer $\vec{AQ_0}$, $\vec{BQ_1}$, $\vec{Q_0P_t}$ en fonction de $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{Q_0Q_1}$.
2. En réduisant $\vec{MP_t}$, montrer que $P_t = \text{Bar}\{(A, (1-t)^2); (B, 2t(1-t)); (C, t^2)\}$; en déduire que P_t est dans le triangle ABC (bords compris).
3. $A(0, 0)$, $B(2, 4)$, $C(4, 0)$. a) Montrer que $P_t(4t, 8t(1-t))$: P_t décrit l'arc de parabole $\mathcal{P} : y = 2x - \frac{x^2}{2}$, $0 \leq x \leq 4$. b) Placer P_t pour $t = \frac{1}{4}$ et $t = \frac{1}{2}$. c) Montrer que la droite (Q_0Q_1) n'a qu'un point commun avec $\mathcal{P}$: elle lui est tangente en P_t .

Exercice 20 Masses négatives : hors du triangle ★★★

corrigé p. 45

ABC est un triangle ; $\vec{BE} = \frac{3}{2}\vec{BC}$ et F est le symétrique de C par rapport à A .

1. Montrer que $E = \text{Bar}\{(B, -1); (C, 3)\}$ et $F = \text{Bar}\{(A, 2); (C, -1)\} = \text{Bar}\{(A, -6); (C, 3)\}$.
2. Soit $K = \text{Bar}\{(A, -6); (B, -1); (C, 3)\}$. Montrer que $K = (AE) \cap (BF)$, $\vec{AK} = -\frac{1}{2}\vec{AE}$ et $\vec{BK} = \frac{3}{4}\vec{BF}$.
3. Soit F' tel que $\vec{AF'} = 3\vec{AC}$. Montrer que $F' = \text{Bar}\{(A, -2); (C, 3)\}$, puis, en réduisant de deux façons $-2\vec{MA} - \vec{MB} + 3\vec{MC}$, que $\vec{BF'} = 2\vec{AE}$. Conséquence ?

Exercice 21 Un coefficient qui varie ★★★

corrigé p. 45

ABC est un triangle, A' et C' les milieux de $[BC]$ et $[AB]$; pour $m \in \mathbb{R}$, $G_m = \text{Bar}\{(A, m); (B, m+1); (C, 2-2m)\}$; $K = \text{Bar}\{(B, 1); (C, 2)\}$.

1. Justifier que G_m existe. Montrer que $K\vec{G}_m = \frac{m}{3}(\vec{AB} - 2\vec{AC}) = \frac{2m}{3}\vec{CC'}$.
2. En déduire l'ensemble $\mathcal{L}$ des points G_m ($m \in \mathbb{R}$).
3. Pour quels m le point G_m est-il sur (AB) ? sur (AC) ? sur la médiane (AA') ? Placer ces points.
4. Pour quels m le point G_m est-il strictement intérieur au triangle (coefficients de même signe) ?

Exercice 22 Ensembles de points avec quatre points ★★★

corrigé p. 45

Repère orthonormé ; $A(0, 0)$, $B(6, 0)$, $C(6, 4)$, $D(0, 4)$ forment un rectangle de centre O .

1. Déterminer $\mathcal{E}_1 = \{M / \|\vec{MA} + 2\vec{MB}\| = \|\vec{2MC} + \vec{MD}\|\}$ (introduire $P = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$ et $Q = \text{Bar}\{(C, 2); (D, 1)\}$) et son équation.

2. Montrer que $\vec{MA} + \vec{MC} = 2\vec{MO}$ et $\vec{MB} - \vec{MD} = \vec{DB}$; en déduire $\mathcal{E}_2 = \{M / \|\vec{MA} + \vec{MC}\| = \|\vec{MB} - \vec{MD}\|\}$ et son équation.

Exercice 23 Le théorème de Varignon généralisé ★★★

corrigé p. 46

$ABCD$ est un quadrilatère, $k \in]0, 1[$; $P = \text{Bar}\{(A, 1-k); (B, k)\}$, $Q = \text{Bar}\{(B, 1-k); (C, k)\}$, $R = \text{Bar}\{(C, 1-k); (D, k)\}$, $S = \text{Bar}\{(D, 1-k); (A, k)\}$; I, J sont les milieux des diagonales $[AC]$, $[BD]$, O l'isobarycentre de A, B, C, D .

- Montrer que O est aussi l'isobarycentre de P, Q, R, S .
- U et V sont les milieux de $[PR]$ et $[QS]$. Montrer que $U = \text{Bar}\{(I, 1-k); (J, k)\}$, $V = \text{Bar}\{(I, k); (J, 1-k)\}$ et $\vec{VU} = (1-2k)\vec{JI}$.
- En déduire que $PQRS$ est un parallélogramme si et seulement si $k = \frac{1}{2}$ ou $ABCD$ est un parallélogramme. Que dit le cas $k = \frac{1}{2}$?

18

Niveau 4 • Concours

Exercice 24 QCM des concours ENSA et ENSAM ★★★

corrigé p. 46

Une seule proposition est exacte : la trouver et la justifier.

- $AB = 6$, $G = \text{Bar}\{(A, 2); (B, -5)\}$: $AG =$ (a) 4 (b) 6 (c) 10 (d) 15. 2. $A(1, -2)$, $B(4, 7)$, $C(-2, 1)$: $\text{Bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, -3)\}$ est le point (a) $(11, 2)$ (b) $(-11, -2)$ (c) $(-11, 2)$ (d) $(1, 0)$.
- $AB = 8$; $\{M / \|\vec{MA} + 3\vec{MB}\| = \|\vec{MA} + 2\vec{MB}\|\}$ est (a) la médiatrice de $[AB]$ (b) la perpendiculaire à (AB) en $K \in [AB]$, $AK = 5$ (c) un cercle (d) vide.
- Pour tout M , $3\vec{MA} - 2\vec{MB} - \vec{MC} =$ (a) $\vec{0}$ (b) $2\vec{AB} + \vec{AC}$ (c) $2\vec{BA} + \vec{CA}$ (d) $\vec{MA}$. 5. $ABCD$ est un parallélogramme de centre O ; $\text{Bar}\{(A, 1); (B, -1); (C, 1); (D, 1)\}$ est (a) O (b) D (c) le milieu de $[CD]$ (d) le symétrique de B par rapport à D .
- ABC est un triangle, $a + b + c \neq 0$; $\text{Bar}\{(A, a); (B, b); (C, c)\} \in (BC)$ si et seulement si (a) $b = c$ (b) $a = 0$ (c) $a = b + c$ (d) $b + c = 0$.

Exercice 25 Le théorème de Ménélaüs (concours ENSA) ★★★

corrigé p. 46

ABC est un triangle ; $x, y, z \notin \{0, -1\}$; $P = \text{Bar}\{(B, 1); (C, x)\}$, $Q = \text{Bar}\{(C, 1); (A, y)\}$, $R = \text{Bar}\{(A, 1); (B, z)\}$.

- On suppose $xyz = -1$. a) Montrer que $R = \text{Bar}\{(A, -xy); (B, 1)\}$ et $1 - xy \neq 0$. b) Avec le système $(B, 1), (C, x), (C, -x), (A, -xy)$, montrer que $R = \text{Bar}\{(P, 1+x); (Q, -x(1+y))\}$; conclure.
- Réciproque : P, Q, R sont alignés. a) Si $xy = 1$, montrer que $(1+x)\vec{QP} = \vec{AB}$ (réduire $\vec{MB} + x\vec{MC} - x\vec{MC} - xy\vec{MA}$) ; contradiction ? b) Si $xy \neq 1$, soit $R' = \text{Bar}\{(A, 1); (B, -\frac{1}{xy})\}$: montrer que $R' = R$. Conclure : P, Q, R alignés $\iff xyz = -1$.
- Application : P symétrique de C par rapport à B , Q milieu de $[AC]$: où (PQ) coupe-t-elle (AB) ?

Exercice 26 Ceva et le point de Gergonne (concours ENSAM) ★★★

corrigé p. 47

Notations P, Q, R, x, y, z de l'exercice 25.

- Si $xyz = 1$ et $1 + z + zx \neq 0$, montrer que $K = \text{Bar}\{(A, 1); (B, z); (C, zx)\}$ est sur (AP) , (BQ) et (CR) .
- Si (AP) , (BQ) , (CR) concourent en $K = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ ($\alpha\beta\gamma \neq 0$), montrer que $P = \text{Bar}\{(B, \beta); (C, \gamma)\}$ et que $xyz = 1$ (Ceva).
- Point de Gergonne. Le cercle inscrit touche $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ en P, Q, R ; $AQ = AR = u$, $BR = BP = v$, $CP = CQ = w$ (segments de tangente). Montrer que $P = \text{Bar}\{(B, w); (C, v)\}$, puis que (AP) , (BQ) , (CR) concourent en $\Gamma = \text{Bar}\{(A, \frac{1}{u}); (B, \frac{1}{v}); (C, \frac{1}{w})\}$.
- Exemple : $C(0, 0)$, $A(12, 0)$, $B(0, 5)$, cercle inscrit de centre $(2, 2)$, de rayon 2 : calculer u, v, w et Γ .

Exercice 27 La droite d'Euler (classes préparatoires) ★★★★★

corrigé p. 47

ABC est un triangle, A' le milieu de $[BC]$, O le centre du cercle circonscrit (concours des médiatrices), G le centre de gravité ; $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$.

1. Montrer que $\vec{AH} = 2\vec{OA}'$; en déduire que H est sur la hauteur issue de A (cas $O = A'$ compris), puis que H est l'orthocentre.
2. Montrer que $\vec{OG} = \frac{1}{3}\vec{OH}$ et $G = \text{Bar}\{(O, 2); (H, 1)\}$. Conclure : si $O \neq G$, O, G, H sont alignés (droite d'Euler) et $GH = 2GO$.
3. Exemple : $A(0, 6)$, $B(-4, 0)$, $C(6, 0)$: montrer que $O(1, 1)$, calculer H et G .

Exercice 28 Les briques empilées (mécanique, classes préparatoires) ★★★★★

corrigé p. 48

On empile au bord d'une table n briques homogènes de longueur L (brique 1 en haut) ; axe horizontal vers le vide, d'origine le bord de la table. Pour le plus grand débord, le centre de gravité G_k des k briques du haut est à la verticale du bord droit de la brique $k + 1$ (ou de la table).

1. g_k est l'abscisse de G_k , d_k celle du bord droit de la brique k , $g_0 = d_1$. a) Justifier que $G_k = \text{Bar}\{(G_{k-1}, k-1); (C_k, 1)\}$, où C_k , d'abscisse $d_k - \frac{L}{2}$, est le centre de la brique k . b) Avec $d_k = g_{k-1}$, montrer que $g_k = g_{k-1} - \frac{L}{2k}$.
2. En déduire que $d_1 = \frac{L}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$. Avec 4 briques, montrer que celle du haut est tout entière au-dessus du vide.
3. En regroupant les termes $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{2}, \dots\right)$, montrer que $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^p} \geq 1 + \frac{p}{2}$ ($p \in \mathbb{N}$). Le débord peut-il dépasser $10L$?

Exercice 29 Le centre de gravité du corps humain (concours de médecine) ★★★★★

corrigé p. 48

Un corps posé sur le sol est en équilibre si son centre de gravité G est à la verticale de sa base d'appui. Jambes (30 kg) en J , tronc, tête et bras (40 kg) en T ; axe horizontal d'origine les talons ; pieds sur $[0; 0,25]$ (m).

1. Debout, $x_J = x_T = 0,10$: abscisse de G ? 2. Talons et fesses contre un mur, elle se penche pour toucher ses orteils : $x_J = 0,10$, $x_T = 0,45$. Montrer qu'elle tombe ; jusqu'où peut-elle avancer le tronc ? 3. Sans mur, le bassin recule : $x_J = -0,05$, $x_T = 0,30$; tombe-t-elle ?
4. Fosbury : au-dessus de la barre (2,00 m, sur l'axe vertical), tronc 40 kg en $T(-0,35; 1,75)$, bassin 10 kg en $B(0; 2,10)$, jambes 20 kg en $J(0,70; 1,75)$ (en m) : G passe-t-il au-dessus ?

Exercice 30 Le défi de la couverture ★★★★★

corrigé p. 48

On admet que le centre de gravité d'une plaque homogène est son centre (rectangle), le centre de gravité du triangle (triangle), le barycentre des centres de gravité des morceaux affectés de leurs aires (plaque en deux morceaux). Unité : le dm.

1. La plaque en L $\mathcal{L} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_1 = [0, 1] \times [0, 4]$, $\mathcal{R}_2 = [1, 5] \times [0, 1]$. a) Centres G_1, G_2 et aires de $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$? En déduire le centre de gravité G de $\mathcal{L}$. b) Montrer que G n'est pas sur la plaque ! c) Retrouver G en découpant $\mathcal{L}$ en $[0, 5] \times [0, 1]$ et $[0, 1] \times [1, 4]$. d) Pour $a > 1$, $\mathcal{L}_a = ([0, 1] \times [0, a]) \cup ([1, a] \times [0, 1])$: montrer que son centre de gravité est $G_a(g, g)$, avec $g = \frac{a^2+a-1}{2(2a-1)}$, et que G_a est hors de la plaque si et seulement si $a > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ($\approx 2,62$).
2. Un carré et un triangle. La plaque $\mathcal{T}$ est formée du carré $[0, 4] \times [0, 4]$ et du triangle de sommets $(4, 0)$, $(8, 0)$, $(4, 4)$: centre de gravité G' ? Comparer à l'isobarycentre Ω des sommets.
3. Plaque quadrilatère et isobarycentre. a) Parallélogramme $ABCD$ de centre O : en découpant selon $[AC]$, montrer que le centre de gravité de la plaque est O , isobarycentre des sommets. b) Trapèze $ABCD$ de bases $[AB]$, $[DC]$ (longueurs p, q , hauteur h) : en découpant selon $[BD]$, montrer que le centre de gravité est à la distance $\frac{h(p+2q)}{3(p+q)}$ de (AB) , l'isobarycentre à $\frac{h}{2}$. Conclure ; contrôler avec 2.

Partie C • La banque

36 exercices supplémentaires classés par thème, du niveau Bases au niveau Concours

19 Barycentre de deux points

Exercice 31 Relier chaque égalité à sa figure ★

corrigé p. 49

Sur la droite graduée ci-dessous, A et B ont pour abscisses 0 et 7.



- Voici quatre égalités vérifiées par un point M : (a) $2\vec{MA} = 9\vec{MB}$; (b) $\vec{MA} + 6\vec{MB} = \vec{0}$; (c) $9\vec{MA} = 2\vec{MB}$; (d) $4\vec{MA} + 3\vec{MB} = \vec{0}$. Pour chacune, écrire M comme barycentre de A et B, exprimer $\vec{AM}$ en fonction de $\vec{AB}$, puis dire lequel des points P, Q, R, S convient.
- Sans calcul, pourquoi deux de ces points sont-ils sur $[AB]$? Existe-t-il V tel que $2\vec{VA} - 2\vec{VB} = \vec{0}$?
- Quels points de la figure sont $\text{Bar}\{(A, -8); (B, -6)\}$, $\text{Bar}\{(A, \frac{9}{10}); (B, -\frac{1}{5})\}$ et $\text{Bar}\{(A, -\frac{1}{3}); (B, -2)\}$?
- Pour tout point M , réduire $4\vec{MA} + 3\vec{MB}$. En déduire que le point N tel que $4\vec{NA} + 3\vec{NB} = 5\vec{AB}$ est l'un des points de la figure.

Exercice 32 Mélanger deux solutions ★

corrigé p. 50

On mélange un volume V_A d'une solution S_A de sulfate de cuivre ($c_A = 0,10$ mol/L) et un volume V_B d'une solution S_B ($c_B = 0,40$ mol/L) ; le mélange a pour concentration $c = \frac{V_A c_A + V_B c_B}{V_A + V_B}$. Sur un axe gradué en mol/L, A, B, C ont pour abscisses c_A , c_B , c .

- Montrer que $V_A(c_A - c) + V_B(c_B - c) = 0$, puis que $C = \text{Bar}\{(A, V_A); (B, V_B)\}$. En déduire $\vec{AC} = \frac{V_B}{V_A + V_B} \vec{AB}$ et $C \in [AB]$.
- On mélange 300 mL de S_A et 200 mL de S_B . Calculer c , vérifier que $\vec{AC} = \frac{2}{5} \vec{AB}$ et la « règle du levier » $V_A \times AC = V_B \times CB$.
- Quels volumes de S_A et de S_B mélanger pour obtenir 600 mL à 0,30 mol/L ? 600 mL à 0,16 mol/L ?
- Peut-on obtenir 0,05 mol/L avec S_A et S_B ? Avec de l'eau pure (point E d'abscisse 0) et S_A ?

Exercice 33 Deux systèmes, un même barycentre ? ★★

corrigé p. 50

Soient $A \neq B$, $\alpha + \beta \neq 0$, $\alpha' + \beta' \neq 0$, $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ et $G' = \text{Bar}\{(A, \alpha'); (B, \beta')\}$.

1. En comparant $\vec{AG}$ et $\vec{AG'}$, montrer que $G = G' \iff \alpha\beta' = \alpha'\beta$ (coefficients proportionnels).
2. Déterminer le réel m tel que $\text{Bar}\{(A, m+1); (B, 2m)\} = \text{Bar}\{(A, 3); (B, 4)\}$.
3. Montrer qu'aucun réel m ne vérifie $\text{Bar}\{(A, m); (B, m-3)\} = \text{Bar}\{(A, 2); (B, m)\}$.
4. Trouver les réels m tels que $\text{Bar}\{(A, m); (B, 8)\} = \text{Bar}\{(A, 2); (B, m)\}$, et placer les points obtenus ($AB = 3$ cm).

Exercice 34 Inverser les rôles ★★

corrigé p. 50

Soient A et B deux points distincts, $G = \text{Bar}\{(A, 7); (B, 1)\}$ et $H = \text{Bar}\{(A, -1); (B, 9)\}$.

1. Exprimer $\vec{AG}$ et $\vec{AH}$ en fonction de $\vec{AB}$. En déduire que $\vec{GH} = \vec{AB}$.
2. Exprimer $\vec{GA}$ et $\vec{GB}$ en fonction de $\vec{GH}$, puis écrire A et B comme barycentres de G et H .
3. On ne connaît plus que G et H ($GH = 8$ cm) : construire A et B ; ordre des quatre points ?
4. *Cas général.* Si $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ avec $\alpha + \beta \neq 0$ et $\beta \neq 0$, montrer que $B = \text{Bar}\{(A, -\alpha); (G, \alpha + \beta)\}$.
Application : on ne connaît que A et $G = \text{Bar}\{(A, 5); (B, -3)\}$ ($AG = 6$ cm) ; exprimer $\vec{AB}$ en fonction de $\vec{AG}$ et construire B .

Exercice 35 Un coefficient au carré ★★★

corrigé p. 51

Soient $A \neq B$, I le milieu de $[AB]$ et, pour tout réel m (quand il existe), $G_m = \text{Bar}\{(A, m^2 + 1); (B, 2m)\}$.

1. Pour quels m le point G_m existe-t-il ? Montrer qu'alors $\vec{AG}_m = t(m)\vec{AB}$, avec $t(m) = \frac{2m}{(m+1)^2}$.
2. On prend $AB = 4$ cm. Placer G_0 , G_1 , G_3 et G_{-3} , puis calculer $t(\frac{1}{3})$. Montrer que $G_{1/m} = G_m$ pour tout $m \notin \{-1, 0\}$.
3. Montrer que $\frac{1}{2} - t(m) = \frac{(m-1)^2}{2(m+1)^2}$. En déduire que G_m n'appartient jamais au segment $]IB]$.
4. Résoudre $t(m) = \frac{1}{4}$, puis $t(m) = -\frac{1}{2}$; placer les points correspondants et vérifier le résultat de la question 2. Existe-t-il m tel que $G_m = B$?
5. Pour quels réels m a-t-on $G_m \in [AB]$?

Exercice 36 La balance aux bras inégaux ★★★

corrigé p. 52

Le fléau $[AB]$ d'une balance (masse négligeable) pivote autour de $O \in]AB[$; $a = OA$, $b = OB$. On admet qu'il reste horizontal, avec m_A en A et m_B en B , si et seulement si $O = \text{Bar}\{(A, m_A); (B, m_B)\}$.

1. Montrer, par double implication, que $O = \text{Bar}\{(A, m_A); (B, m_B)\} \iff m_A a = m_B b$ (règle du levier).
2. *Double pesée.* Un objet de masse m placé en A est équilibré par m_1 placée en B ; placé en B , il est équilibré par m_2 placée en A . Montrer que $m^2 = m_1 m_2$ et $\frac{a}{b} = \frac{m_1}{m_2}$.
3. Application : $m_1 = 361$ g et $m_2 = 400$ g. Calculer m , puis a et b sachant que $AB = 39$ cm.
4. Un marchand prend pour masse $\frac{m_1 + m_2}{2}$. Montrer que $\frac{m_1 + m_2}{2} - \sqrt{m_1 m_2} = \frac{1}{2}(\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2})^2$; quand se trompe-t-il, et de combien ici ? S'il pose la marchandise en B et 400 g en A , quelle masse donne-t-il ?

20

Barycentre de trois points

Exercice 37 Deux constructions dans un triangle ★

corrigé p. 52

Soit ABC un triangle, $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 3); (C, 2)\}$ et $H = \text{Bar}\{(A, 3); (B, -1); (C, 1)\}$.

- Justifier l'existence de G et de H . Montrer que $\vec{AG} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$ et que $\vec{AH} = -\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} = \frac{1}{3}\vec{BC}$. Construire G (méthode du parallélogramme) et H .
- Montrer que $\vec{GH} = -\frac{5}{6}\vec{AB}$. Que peut-on dire des droites (GH) et (AB) ?
- Pour tout point M , réduire $\vec{MA} + 3\vec{MB} + 2\vec{MC}$ et $3\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}$. En déduire, puis construire, le point N tel que $3\vec{NA} - \vec{NB} + \vec{NC} = 3\vec{CA}$.

Exercice 38 Le centre d'inertie de la molécule d'eau ★

corrigé p. 53

Dans H_2O , l'oxygène O et les hydrogènes H_1, H_2 forment un triangle isocèle en O ; I est le milieu de $[H_1H_2]$, $OI = 59 \text{ pm}$ ($1 \text{ pm} = 10^{-12} \text{ m}$). Masses: 16 u (O), 1 u (H); le centre d'inertie est $G = \text{Bar}\{(O, 16); (H_1, 1); (H_2, 1)\}$.

- Montrer que $\vec{OG} = \frac{1}{18}(\vec{OH}_1 + \vec{OH}_2)$, puis que $\vec{OG} = \frac{1}{9}\vec{OI}$. Calculer OG à $0,1 \text{ pm}$ près et placer G .
- Le centre de gravité K du triangle OH_1H_2 vérifie $\vec{OK} = \frac{2}{3}\vec{OI}$: calculer OK . Pourquoi G et K sont-ils si éloignés ?
- Dans l'eau lourde D_2O , chaque hydrogène est remplacé par un deutérium de masse 2 u (même géométrie). Déterminer son centre d'inertie G' et calculer GG' .

Exercice 39 Un anneau retenu par trois ressorts ★★

corrigé p. 53

Sur une table horizontale, un anneau M est relié à trois ressorts fixés en A, B, C non alignés, de raideurs $k_A = 20, k_B = 30, k_C = 50 \text{ N/m}$. Un ressort de raideur k fixé en P exerce sur M la force $\vec{F} = k\vec{MP}$ (admis).

- Montrer que la résultante des forces est $\vec{R} = 100\vec{ME}$, où $E = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 3); (C, 5)\}$. En déduire l'unique position d'équilibre, et un ressort unique équivalent aux trois.
- Montrer que $\vec{AE} = \frac{3}{10}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$ et construire E .
- Le triangle ABC est rectangle en A , $AB = 60 \text{ cm}$ et $AC = 40 \text{ cm}$. Calculer AE . Quelle force (direction, sens, valeur) faut-il exercer pour maintenir l'anneau en A ?
- On remplace le ressort fixé en C par un ressort de raideur k . Pour quelle valeur de k la position d'équilibre est-elle sur la médiane issue de A ?

Exercice 40 Symétries et centre de gravité ★★

corrigé p. 54

Soit ABC un triangle de centre de gravité G , M un point quelconque, et P, Q, R les symétriques de M par rapport à A, B, C .

- Montrer que $P = \text{Bar}\{(A, 2); (M, -1)\}$ et écrire de même Q et R . Montrer que $\vec{PQ} = 2\vec{AB}$ et $\vec{PR} = 2\vec{AC}$; en déduire que PQR est un triangle.
- Montrer que, pour tout point N : $\vec{NP} + \vec{NQ} + \vec{NR} = 6\vec{NG} - 3\vec{NM}$. En déduire que le centre de gravité K de PQR est le symétrique de M par rapport à G . Cas où $M = G$?

3. Soient A_1, B_1, C_1 les symétriques de A, B, C par rapport à M . Montrer que le centre de gravité G_1 de $A_1B_1C_1$ est le symétrique de G par rapport à M , puis, si $M \neq G$, que $K, G_1 \in (GM)$ et $KG_1 = 3\vec{GM}$.

Exercice 41 Le triangle des milieux ★★★

corrigé p. 54

Soit ABC un triangle et I, J, K les milieux respectifs de $[BC], [CA]$ et $[AB]$.

1. Soient α, β, γ des réels de somme non nulle. Montrer que, pour tout point M ,

$$\alpha\vec{MI} + \beta\vec{MJ} + \gamma\vec{MK} = \frac{1}{2}[(\beta + \gamma)\vec{MA} + (\gamma + \alpha)\vec{MB} + (\alpha + \beta)\vec{MC}],$$

puis que $\text{Bar}\{(I, \alpha); (J, \beta); (K, \gamma)\} = \text{Bar}\{(A, \beta + \gamma); (B, \gamma + \alpha); (C, \alpha + \beta)\}$.

2. a) En déduire que les triangles IJK et ABC ont le même centre de gravité. b) Écrire $\text{Bar}\{(I, 1); (J, 2); (K, 3)\}$ comme barycentre de A, B, C . c) Montrer que $A = \text{Bar}\{(I, -1); (J, 1); (K, 1)\}$ et en déduire que $IJAK$ est un parallélogramme.
3. a) Montrer que $\text{Bar}\{(A, 3); (B, 1); (C, 4)\} = \text{Bar}\{(I, 1); (J, 3)\}$: ce point est sur (IJ) . b) Plus généralement, montrer que si $c = a + b$ (avec $a + b \neq 0$), le point $\text{Bar}\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$ est sur la droite (IJ) .

Exercice 42 Une correspondance entre points ★★★

corrigé p. 55

Soit ABC un triangle de centre de gravité G . À tout point M , on associe le point M' tel que $\vec{MM'} = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$.

1. Montrer que $\vec{GM'} = -2\vec{GM}$. Pour quels points M a-t-on $M' = M$? Que dire des points M, G, M' ?
2. Montrer que $G = \text{Bar}\{(M, 2); (M', 1)\}$ et que $M' = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, 1); (M, -2)\}$.
3. Soit I le milieu de $[BC]$. Montrer que $I' = A$. Quels points ont pour images B et C ?
4. Soit Δ la parallèle à (BC) passant par A . a) Si $M \in (BC)$, montrer que $\vec{AM'} = \vec{MB} + \vec{MC}$ et $M' \in \Delta$. b) Montrer que tout $N \in \Delta$ est l'image d'un point de (BC) . c) Conclure.

21

Associativité et quatre points

Exercice 43 Regrouper pour construire ★

corrigé p. 55

Soit ABC un triangle, I le milieu de $[AB]$ et A' celui de $[BC]$.

1. Soit $G = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 2); (C, 1)\}$. a) Montrer que $G = \text{Bar}\{(I, 4); (C, 1)\}$ et exprimer $\vec{IG}$ en fonction de $\vec{IC}$. b) Soit $J = \text{Bar}\{(A, 2); (C, 1)\}$: montrer que $G = \text{Bar}\{(J, 3); (B, 2)\}$ et exprimer $\vec{JG}$ en fonction de $\vec{JB}$. c) En déduire que (CI) et (BJ) se coupent en G , et construire G .
2. Construire de même $K = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 2); (C, -1)\}$ (à l'aide de $\vec{IK}$) et $L = \text{Bar}\{(A, -1); (B, 2); (C, 2)\}$ (à l'aide de $\vec{AL}$ et A'). Montrer que G, K, I, C sont alignés et exprimer $\vec{GK}$ en fonction de $\vec{IC}$.

Exercice 44 Où est le barycentre du système solaire ? ★

corrigé p. 56

Le Soleil, Jupiter et Saturne sont assimilés à des points O, J, S de masses proportionnelles à 10 500, 10, 3 ; $OJ = 780$, $OS = 1\,430$ et le rayon du Soleil vaut 0,7 (en millions de km). Le centre d'inertie est $G = \text{Bar}\{(O, 10\,500); (J, 10); (S, 3)\}$.

1. Soit $K = \text{Bar}\{(J, 10); (S, 3)\}$. Montrer que $G = \text{Bar}\{(O, 10\,500); (K, 13)\}$, puis que $\vec{OG} = \frac{13}{10\,513}\vec{OK} = \frac{10\vec{OJ} + 3\vec{OS}}{10\,513}$.

- Les trois astres sont alignés, J et S du même côté de O . Calculer OK et OG (à 0,01 million de km près). Le centre d'inertie est-il dans le Soleil ?
- Même question si J et S sont de part et d'autre de O , puis si $(OJ) \perp (OS)$.

Exercice 45 Une masse négative dans un quadrilatère ★★

corrigé p. 56

Soit $ABCD$ un quadrilatère et $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, 1); (D, -1)\}$.

- Justifier l'existence de G . Peut-on regrouper $(B, 1)$ et $(D, -1)$?
- Soit $E = \text{Bar}\{(B, 1); (C, 1); (D, -1)\}$. Montrer que $\vec{DE} = \vec{DB} + \vec{DC}$; nature de $DBEC$? Montrer que G est le milieu de $[AE]$.
- Soit $F = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 1); (D, -1)\}$. Montrer que G est le milieu de $[CF]$. Nature de $ACEF$?
- Soit G_1 le centre de gravité de ABC . Montrer que $G = \text{Bar}\{(G_1, 3); (D, -1)\}$ et exprimer $\vec{DG}$ en fonction de $\vec{DG}_1$. Construire G de trois façons.

Exercice 46 Deux droites dans un parallélogramme ★★

corrigé p. 57

Soit $ABCD$ un parallélogramme, I le milieu de $[AB]$ et J celui de $[BC]$.

- Montrer que $C = \text{Bar}\{(A, -1); (B, 1); (D, 1)\}$, puis que $J = \text{Bar}\{(A, -1); (B, 2); (D, 1)\}$.
- Soit $P = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 2); (D, 1)\}$. a) Montrer que $P = \text{Bar}\{(I, 4); (D, 1)\}$ et exprimer $\vec{DP}$ en fonction de $\vec{DI}$. b) En remplaçant $(A, 2)$ par $(A, 3)$ et $(A, -1)$, montrer que $P = \text{Bar}\{(A, 3); (J, 2)\}$ et exprimer $\vec{AP}$ en fonction de $\vec{AJ}$. c) En déduire que P est le point d'intersection de (DI) et (AJ) .
- Les droites (AJ) et (BD) se coupent en Q . Montrer que $\text{Bar}\{(A, 1); (J, 2)\} = \text{Bar}\{(B, 2); (D, 1)\}$; en déduire $\vec{AQ}$ en fonction de $\vec{AJ}$ et $\vec{BQ}$ en fonction de $\vec{BD}$. Que représente Q pour le triangle ABC ?

Exercice 47 Peut-on toujours regrouper deux par deux ? ★★★

corrigé p. 57

Soient A, B, C, D distincts, a, b, c, d des réels **non nuls** de somme $s \neq 0$, et $G = \text{Bar}\{(A, a); (B, b); (C, c); (D, d)\}$. Une répartition en deux paires $(\{A, B\}|\{C, D\}, \{A, C\}|\{B, D\})$ ou $\{A, D\}|\{B, C\}$ est utilisable si chaque paire a une somme non nulle.

- Montrer que, dans chaque répartition, une paire au plus a une somme de coefficients nulle.
- On suppose qu'aucune répartition n'est utilisable et (quitte à renommer) que $a + b = 0$. Montrer que : a) si $a + c = 0$, alors $b + c \neq 0$ et $b = c = d = -a$; b) si $b + d = 0$, alors $a = c = d = -b$. c) Conclure : aucune répartition n'est utilisable si et seulement si un coefficient est l'opposé des trois autres, égaux entre eux.
- Montrer qu'alors un regroupement « trois et un » est possible. Exemple : $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, -1); (C, -1); (D, -1)\}$; exprimer $\vec{AG}$ en fonction de $\vec{AK}$, où K est le centre de gravité de BCD .

Exercice 48 Quatre poids pour un point d'un rectangle ★★★

corrigé p. 58

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 8$ cm et $AD = 6$ cm, et $P = \text{Bar}\{(A, 6); (B, 2); (C, 1); (D, 3)\}$.

- Soient $E = \text{Bar}\{(A, 6); (B, 2)\}$ et $F = \text{Bar}\{(D, 3); (C, 1)\}$. Calculer AE et DF , montrer que $P = \text{Bar}\{(E, 8); (F, 4)\}$ et calculer EP .
- Soient $K = \text{Bar}\{(A, 6); (D, 3)\}$ et $L = \text{Bar}\{(B, 2); (C, 1)\}$. Montrer que $P = \text{Bar}\{(K, 9); (L, 3)\}$. En déduire que $P = (EF) \cap (KL)$, construire P et montrer que $\vec{AP} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AD}$.

3. Cas général. Pour $x, y \in [0, 1]$, soient $a = (1-x)(1-y)$, $b = x(1-y)$, $c = xy$, $d = (1-x)y$. Montrer que $a + b + c + d = 1$ et que $P_{x,y} = \text{Bar}\{(A, a); (B, b); (C, c); (D, d)\}$ vérifie $\vec{AP}_{x,y} = x\vec{AB} + y\vec{AD}$; en déduire que tout point du rectangle est barycentre de A, B, C, D à coefficients positifs.
4. a) Montrer que $\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} - \vec{MD} = \vec{0}$ pour tout point M . b) En déduire que $P = \text{Bar}\{(A, 6+t); (B, 2-t); (C, 1+t); (D, 3-t)\}$ ($t \in \mathbb{R}$); écrire P avec trois sommets. Unicité ?

22 Coordonnées du barycentre

On calcule $x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}$ (de même y_G), puis on contrôle (déterminant, équation de droite).

Exercice 49 Le centre d'inertie de trois billes ★

corrigé p. 58

Repère orthonormé d'origine O (unité : le dm); trois billes : 100 g en $A(-4, -2)$, 200 g en $B(5, -5)$, 500 g en $C(2, 4)$. Le centre d'inertie est le barycentre des positions pondérées par les masses.

- Pourquoi le centre d'inertie G_1 des billes A et B est-il $\text{Bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$? Calculer G_1 et vérifier que $\vec{AG}_1 = \frac{2}{3}\vec{AB}$.
- Calculer le centre d'inertie G des trois billes, puis le retrouver en écrivant $G = \text{Bar}\{(G_1, 3); (C, 5)\}$.
- Calculer le centre d'inertie G_2 des billes A et C ; vérifier par un déterminant que B, G, G_2 sont alignés, puis l'expliquer sans calcul.
- Où poser une quatrième bille de 400 g pour que le centre d'inertie des quatre billes soit O ?

Exercice 50 Deux drones ★

corrigé p. 59

Repère orthonormé, unité : le km. Un drone part de $A(-3, 1)$ à $t = 0$ et vole en ligne droite, à vitesse constante, jusqu'à $B(5, 5)$, atteint à $t = 8$ (en min). On note $P(t)$ sa position ($0 \leq t \leq 8$).

- Justifier que $\vec{AP}(t) = \frac{t}{8}\vec{AB}$, puis que $P(t) = \text{Bar}\{(A, 8-t); (B, t)\}$. Calculer $P(2)$, $P(4)$, $P(6)$.
- Montrer que $P(t)$ a pour coordonnées $(-3+t, 1+\frac{t}{2})$ et vérifie l'équation $x - 2y + 5 = 0$ de (AB) .
- À quel instant et en quel point le drone survole-t-il l'autoroute $\Delta : x + y = 7$? Écrire ce point comme barycentre de A et B à coefficients entiers.
- Un second drone va de $C(6, -1)$ à $D(-2, 3)$ de $t = 0$ à $t = 8$, à vitesse constante. Calculer sa position $Q(t)$ et une équation de (CD) . Les trajectoires se coupent-elles? Y a-t-il collision?

Exercice 51 Trois céviennes en coordonnées ★★

corrigé p. 59

$A(3, 6)$, $B(-2, 1)$, $C(6, -3)$; $P = \text{Bar}\{(B, 3); (C, 1)\}$, $Q = \text{Bar}\{(A, 2); (C, 1)\}$, $R = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 3)\}$.

- Calculer P, Q, R . Sur quel côté du triangle ABC se trouve chacun d'eux?
- Donner une équation de (AP) et de (BQ) , puis leur point d'intersection K .
- Calculer $G = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 3); (C, 1)\}$; vérifier que $G = K$. Démontrer par l'associativité que G est sur (AP) , (BQ) , (CR) (contrôler avec une équation de (CR)).
- Exprimer $\vec{AG}, \vec{BG}, \vec{CG}$ en fonction de $\vec{AP}, \vec{BQ}, \vec{CR}$ (contrôler en coordonnées).

Exercice 52 Dedans ou dehors ? ★★

corrigé p. 60

Un champ a la forme du triangle $A(-6, -6)$, $B(6, 2)$, $C(-2, 6)$ (unité : 10 m). Rappel : si $\vec{AM} = \beta\vec{AB} + \gamma\vec{AC}$, alors $M = \text{Bar}\{(A, 1 - \beta - \gamma); (B, \beta); (C, \gamma)\}$, intérieur au triangle si et seulement si ces trois coefficients sont > 0 .

- Des arbres sont en $P(1, 1)$, $Q(-7, -2)$, $R(0, 5)$. Pour chacun, calculer β et γ (système), puis l'écrire comme barycentre de A , B , C à coefficients entiers. Lesquels sont dans le champ, sur la clôture, dehors ?
- On plante un arbre V au milieu de $[PQ]$. Montrer, sans ses coordonnées, que $V = \text{Bar}\{(A, 4); (B, 1); (C, 3)\}$ et conclure ; contrôler en coordonnées.

Exercice 53 Trois droites parallèles ★★★

corrigé p. 60

$A(-1, 5)$, $B(-4, -1)$, $C(0, 1)$; avec les coefficients 2, 1, -3 (de somme nulle), on pose $A' = \text{Bar}\{(B, 1); (C, -3)\}$, $B' = \text{Bar}\{(A, 2); (C, -3)\}$, $C' = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 1)\}$.

- Pourquoi $\text{Bar}\{(A, 2); (B, 1); (C, -3)\}$ n'existe-t-il pas ? Calculer A' , B' , C' , puis une équation de (AA') , (BB') , (CC') . Que remarque-t-on ?
- Montrer que $\vec{u} = 2\vec{MA} + \vec{MB} - 3\vec{MC}$ ne dépend pas de M ; calculer ses coordonnées. Avec $M = A$, $M = B$, $M = C$, démontrer *sans équation* que les trois droites sont parallèles à $\vec{u}$. Quel est l'ensemble des M tels que $\vec{u}$ et $\vec{MB}$ soient colinéaires ?
- Si α , β , γ sont non nuls de somme nulle, que dire des droites (AA') , (BB') , (CC') définies de même ?

Exercice 54 Une droite, un segment, un barycentre ★★★

corrigé p. 61

Soit Δ la droite d'équation $x + 2y - 6 = 0$ et, pour tout point $M(x, y)$, $f(M) = x + 2y - 6$.

- Si $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$, montrer que $f(G) = \frac{\alpha f(A) + \beta f(B)}{\alpha + \beta}$; énoncer la règle pour trois points.
- On suppose $f(A) \neq f(B)$. Montrer que (AB) coupe Δ en un seul point, $\text{Bar}\{(A, f(B)); (B, -f(A))\}$, qui est sur $[AB]$ si et seulement si $f(A)f(B) \leq 0$. Et si $f(A) = f(B)$?
- $A(7, -3)$, $B(-1, 3)$, $C(7, 3)$. Quels côtés du triangle ABC la droite Δ coupe-t-elle ? Déterminer, sans système, ses points d'intersection avec (AC) , (BC) , (AB) , puis le réel m tel que $\text{Bar}\{(A, m); (B, 2); (C, 1)\} \in \Delta$.

23

Alignement et ensembles de points

On **réduit** chaque somme vectorielle, puis on reconnaît l'ensemble.

Exercice 55 Deux cercles et une médiatrice ★

corrigé p. 62

$AB = 10$; I est le milieu de $[AB]$, $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 4)\}$ et $H = \text{Bar}\{(A, 4); (B, 1)\}$.

- Calculer AG et AH ; placer A , B , I , G , H sur une droite. Que représente I pour $[GH]$?
- Déterminer et construire $\Gamma_1 = \{M : \|\vec{MA} + 4\vec{MB}\| = 15\}$, $\Gamma_2 = \{M : \|4\vec{MA} + \vec{MB}\| = \|\vec{MA} + 4\vec{MB}\|\}$ et $\Gamma_3 = \{M : \|\vec{MA} + 4\vec{MB}\| = \|\vec{MA} - \vec{MB}\|\}$.
- Vérifier que $B \in \Gamma_3$ et que $I \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$. À l'aide du théorème de Pythagore, montrer que I est le **seul** point commun à Γ_1 et Γ_2 .

Exercice 56 Alignés grâce à un coefficient négatif ★

corrigé p. 62

ABC est un triangle ; $P = \text{Bar}\{(A, 3); (B, 2)\}$, $Q = \text{Bar}\{(A, 3); (C, -1)\}$ et $R = \text{Bar}\{(B, 2); (C, 1)\}$.

1. Exprimer $\vec{AP}$, $\vec{AQ}$, $\vec{BR}$ en fonction de $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{BC}$; faire une figure.
2. Avec le système $\{(A, 3); (B, 2); (A, -3); (C, 1)\}$, montrer que $R = \text{Bar}\{(P, 5); (Q, -2)\}$; en déduire que P, Q, R sont alignés et exprimer $\vec{PR}$ en fonction de $\vec{PQ}$.
3. En déduire le point où (PQ) coupe (BC) . Contrôler l'alignement dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$.

Exercice 57 Un cercle et deux médiatrices en repère ★★

corrigé p. 63

Repère orthonormé d'origine O ; $A(-5, -1)$, $B(1, 1)$, $C(-1, 3)$ et $\vec{w} = \vec{MA} + 4\vec{MB} - \vec{MC}$.

1. Montrer que $\text{Bar}\{(A, 1); (B, 4); (C, -1)\} = O$ et réduire $\vec{w}$.
2. Déterminer $\mathcal{E}_1 = \{M : \|\vec{w}\| = 20\}$ et une équation de $\mathcal{E}_1$.
3. Déterminer $\mathcal{E}_2 = \{M : \|\vec{w}\| = \|4\vec{MC}\|\}$ et une équation de $\mathcal{E}_2$; calculer les points communs à $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$.
4. Déterminer $\mathcal{E}_3 = \{M : \|\vec{w}\| = \|4\vec{MB}\|\}$ et son point commun Ω avec $\mathcal{E}_2$. Que représente Ω pour le triangle OBC ? Représenter $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$.

Exercice 58 Deux méthodes pour un alignement ★★

corrigé p. 63

$ABCD$ est un parallélogramme ; E et F sont tels que $\vec{AE} = \frac{2}{3}\vec{AB}$ et $\vec{AF} = -2\vec{AD}$.

1. Montrer que $E = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$, $F = \text{Bar}\{(A, 3); (D, -2)\}$ et $C = \text{Bar}\{(A, -1); (B, 1); (D, 1)\}$.
2. Méthode 1. Dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AD})$, démontrer que E, F, C sont alignés.
3. Méthode 2. Montrer que $C = \text{Bar}\{(E, 3); (F, -1)\}$; retrouver l'alignement et situer C sur (EF) .
4. Si $\vec{AE} = a\vec{AB}$ ($a \notin \{0, 1\}$), trouver b tel que F ($\vec{AF} = b\vec{AD}$) soit sur (EC) ; vérifier que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$. Et si $a = 1$?

Exercice 59 Égalités de normes avec quatre points ★★★

corrigé p. 64

$A(-4, -1)$, $B(4, -5)$, $C(2, 1)$, $D(-2, 5)$; I, J, K, L milieux de $[AB]$, $[CD]$, $[AC]$, $[BD]$; O' isobarycentre de A, B, C, D .

1. Calculer I, J, K, L, O' ; montrer que O' est le milieu de $[IJ]$ et de $[KL]$.
2. Déterminer, avec une équation, $\Gamma_1 = \{M : \|\vec{MA} + \vec{MB}\| = \|\vec{MC} + \vec{MD}\|\}$ et $\Gamma_2 = \{M : \|\vec{MA} + \vec{MC}\| = \|\vec{MB} + \vec{MD}\|\}$.
3. Montrer que $\vec{v} = \vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} - \vec{MD}$ est constant ; en déduire $\Gamma_3 = \{M : \|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}\| = \|\vec{v}\|\}$ et $\Gamma_4 = \{M : \|\vec{MA} - \vec{MB}\| = \|\vec{MC} - \vec{MD}\|\}$.
4. Déterminer les points communs à Γ_3 et à $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ (quelle figure ?). Que vaut Γ_3 pour un quadrilatère $ABCD$ quelconque ? pour un parallélogramme ?

Exercice 60 Des droites définies par des colinéarités ★★★

corrigé p. 64

ABC est un triangle, I le milieu de $[AB]$, $P = \text{Bar}\{(B, 1); (C, 3)\}$, $Q = \text{Bar}\{(A, 1); (C, 3)\}$, $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, 3)\}$. On note $\mathcal{D}(\vec{u}, \vec{w})$ l'ensemble des points M tels que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ (dépendant de M) sont colinéaires.

- Montrer que $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}(\vec{MB} + 3\vec{MC}, \vec{MA})$ est (AP) ; déterminer $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}(\vec{MA} + 3\vec{MC}, \vec{MB})$, $\mathcal{D}_3 = \mathcal{D}(\vec{MA} + \vec{MB}, \vec{MC})$; concours en G .
- Déterminer $\mathcal{D}_4 = \mathcal{D}(\vec{MA} + \vec{MB} + 3\vec{MC}, \vec{AB})$ et $\mathcal{D}_5 = \mathcal{D}(\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC}, \vec{AB})$.
- On prend $A(-3, 0)$, $B(7, 0)$, $C(2, 5)$ (repère orthonormé). Calculer G et une équation de $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$, $\mathcal{D}_4$.
- Problème inverse. Trouver a, b tels que $(OC) = \mathcal{D}(a\vec{MA} + b\vec{MB}, \vec{MC})$; même question pour la droite $2x - y + 1 = 0$. Quelles droites passant par C obtient-on ainsi ?

24

Défis de concours**Exercice 61** QCM du concours de médecine ★★★★★

corrigé p. 65

Une seule réponse exacte par question ; justifier.

- $A(2, -1)$, $B(-2, 5)$. Le point G tel que $3\vec{GA} - \vec{GB} = \vec{0}$ est : (a) $(0, 2)$ (b) $(4, -4)$ (c) $(-4, 8)$ (d) $(2, -2)$.
- Un nœud N est relié par 10Ω , 20Ω , 20Ω à des potentiels 12 V , 0 V , 6 V ; loi des nœuds : $\frac{12-V_N}{10} + \frac{0-V_N}{20} + \frac{6-V_N}{20} = 0$. Alors $V_N =$ (a) 6 V (b) $4,8 \text{ V}$ (c) $7,5 \text{ V}$ (d) 9 V .
- $AB = 4$; $\{M : \|3\vec{MA} - 7\vec{MB}\| = 12\}$ est : (a) le cercle de centre G et de rayon 3 , où $AG = 7$; (b) le cercle $(G, \frac{6}{5})$, où $AG = \frac{14}{5}$; (c) vide ; (d) le cercle $(G, 12)$, où $AG = 7$.
- $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 4); (C, 5)\}$, et (AG) coupe (BC) en A' : (a) $\vec{AG} = \frac{9}{10}\vec{AA'}$, $\vec{BA'} = \frac{5}{9}\vec{BC}$; (b) $\vec{AG} = \frac{9}{10}\vec{AA'}$, $\vec{BA'} = \frac{4}{9}\vec{BC}$; (c) $\vec{AG} = \frac{1}{10}\vec{AA'}$, $\vec{BA'} = \frac{5}{9}\vec{BC}$; (d) $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AA'}$.
- Un camion de 9 t roule à 60 km/h vers l'est, une voiture de 1 t à 100 km/h vers l'ouest. Leur centre d'inertie avance à : (a) 64 km/h vers l'est ; (b) 44 km/h vers l'est ; (c) 80 km/h ; (d) 20 km/h vers l'ouest.
- Le point strictement intérieur au triangle ABC est : (a) $\text{Bar}\{(A, 2); (B, -1); (C, 3)\}$; (b) $\text{Bar}\{(A, 1); (B, 2); (C, -4)\}$; (c) $\text{Bar}\{(A, -1); (B, -2); (C, -4)\}$; (d) $\text{Bar}\{(A, -1); (B, 3); (C, 3)\}$.

Exercice 62 La table à trois pieds ★★★★★

corrigé p. 65

Un plateau carré homogène de 120 N repose sur trois pieds. Vu de dessus (repère orthonormé d'origine O , unité : le dm) : pieds en $A(0, 0)$, $B(6, 0)$, $C(0, 6)$; plateau $F(-1, -1)$, $(5, -1)$, $E(5, 5)$, $(-1, 5)$, de centre $G_0(2, 2)$. Réactions des pieds : $R_A, R_B, R_C \geq 0$; on admet que l'équilibre s'écrit $R_A + R_B + R_C = P$ et $R_A\vec{OA} + R_B\vec{OB} + R_C\vec{OC} = P\vec{OG}$, où P est le poids total et G le centre de gravité de l'ensemble (plateau et objets).

- Montrer que $G = \text{Bar}\{(A, R_A); (B, R_B); (C, R_C)\}$ et exprimer R_A, R_B, R_C en fonction de P, x_G, y_G . Calculer les réactions pour la table vide, puis avec un objet de 60 N en $K(4, 1)$.
- La table bascule dès qu'une réaction devrait être négative. Montrer qu'elle tient si et seulement si G est dans le triangle ABC (bord compris).

- Pour quels poids Q peut-on poser un objet au coin E ? au coin F ? Quel coin est le plus dangereux ?
- Un objet de 120 N est posé en $K(x, y)$: montrer que G est le milieu de $[G_0K]$; où peut-on le poser ?

Exercice 63 Le plus court chemin de la lumière ★★★★★

corrigé p. 66

$A(2, 1)$, $B(-1, 4)$, $C(5, 6)$, $D(8, 3)$ et $f(M) = \|2\vec{MA} + \vec{MB}\| + \|\vec{MC} + 2\vec{MD}\|$ (repère orthonormé).

- Montrer que $f(M) = 3(MG + MH)$ pour deux points G, H à calculer.
- Montrer que $f(M) \geq 3GH$ et déterminer où ce minimum est atteint (on admet que $MG + MH = GH \iff M \in [GH]$).
- Soit H' le symétrique de H par rapport à l'axe des abscisses. Montrer que $MH = MH'$ pour M sur l'axe ; en déduire le minimum de f sur l'axe, atteint en un seul point M_0 .
- Optique.* Un rayon issu de G , réfléchi par un miroir posé sur l'axe des abscisses, rejoint H par le plus court chemin (principe de Fermat) : où frappe-t-il le miroir ? Vérifier la loi de la réflexion.

Exercice 64 Le palet qui explose ★★★★★

corrigé p. 67

Sur une table à coussin d'air (unité : le dm ; t en s), le centre d'inertie d'un palet de 500 g est $G(t) = (-1 + 2t, 1 + t)$ pour $0 \leq t \leq 2$. À $t = 2$, le palet se brise en fragments de 100 g, 250 g, 150 g, de centres $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ en mouvements rectilignes uniformes ; le système étant pseudo-isolé, $\text{Bar}\{(A(t), 2); (B(t), 5); (C(t), 3)\}$ poursuit le mouvement de G .

- Donner une équation de la trajectoire $\mathcal{T}$ de G , sa vitesse, et le point E de l'explosion.
- À $t = 4$: $A(4) = (-3, 11)$, $B(4) = (11, 5)$, et le troisième fragment est perdu. Calculer $G(4)$, puis $C(4)$ comme barycentre de $G(4)$, $A(4)$, $B(4)$.
- Pour $t \geq 2$, $A(t) = E + (t-2)\vec{v}_A$ (de même pour B, C). Calculer $\vec{v}_A, \vec{v}_B, \vec{v}_C$; vérifier que $2\vec{v}_A + 5\vec{v}_B + 3\vec{v}_C = 10\vec{v}$ ($\vec{v} = (2, 1)$). Les fragments peuvent-ils être alignés ?

Exercice 65 Équilibrer une roue ★★★★★

corrigé p. 67

Une roue, disque homogène de centre O , de rayon 30 cm et de masse 8 kg, tourne autour de son axe. Dans un repère orthonormé d'origine O lié à la roue (en cm), un défaut équivaut à 60 g en $D(15, 20)$; la roue est *équilibrée* si le centre d'inertie de l'ensemble est O .

- Calculer OG (en mm), G centre d'inertie de la roue avec son défaut. On fixe sur la jante (cercle de centre O , de rayon 30) une masse m en P : déterminer P et m pour équilibrer la roue.
- Avec deux emplacements seulement, $P_1(-30, 0)$ et $P_2(0, -30)$, quelles masses m_1, m_2 fixer ? Montrer que $N = \text{Bar}\{(P_1, m_1); (P_2, m_2)\}$ est sur la demi-droite opposée à $[OD]$, et que deux masses positives fixées sur la jante qui équilibrent la roue pèsent au moins m .
- Avec les emplacements P_1 et $P_3(0, 30)$, quelles « masses » faudrait-il ? Interpréter le signe. Où percer, sur $[OD]$, un trou retirant 75 g de matière (assimilée à un point) pour équilibrer la roue ?

Exercice 66 Le bras articulé d'un robot ★★★★★*corrigé p. 68*

Bras horizontal à deux tiges légères : épaule O fixe, coude A , main M , avec $OA = 4$ et $AM = 3$ (en dm) ; masses équivalentes : 5 kg en O , 2 kg en A , 1 kg en M ; G est le centre d'inertie du bras.

1. Montrer que $8\vec{OG} = 3\vec{OA} + \vec{AM}$. Le coude est bloqué en A_0 ($OA_0 = 4$) ; la main tourne autour de A_0 . Soit $\Omega = \text{Bar}\{(O, 5); (A_0, 3)\}$. Montrer que l'ensemble des positions de G est le cercle de centre Ω et de rayon $\frac{3}{8}$ (double inclusion).
2. Articulations libres : montrer que $\frac{9}{8} \leq OG \leq \frac{15}{8}$ et que G décrit toute cette couronne (on admet que deux cercles de rayons r, r' , de centres distants de d , se coupent si $|r - r'| \leq d \leq r + r'$). Le robot bascule si G sort du socle, disque de centre O et de rayon 1,5 : pour quelles charges c (en kg) ne bascule-t-il jamais ?

Partie D • Corrigés

Des solutions détaillées, rédigées comme sur une copie

25 Corrigés du niveau I

■ Corrigé de l'exercice 1

- On transforme l'égalité avec Chasles ($\vec{G}_1 B = \vec{G}_1 A + \vec{AB}$) : $5\vec{G}_1 A + \vec{G}_1 B = \vec{0} \iff 6\vec{G}_1 A + \vec{AB} = \vec{0} \iff \boxed{\vec{AG}_1 = \frac{1}{6}\vec{AB}}$: $AG_1 = 1$ cm.
- Les sommes $-6, -1, 3, 2$ sont non nulles : les points existent. $\vec{AG}_2 = \frac{-7}{-6}\vec{AB} = \boxed{\frac{7}{6}\vec{AB}}$ (7 cm, au-delà de B) ; $\vec{AG}_3 = \frac{1}{-1}\vec{AB} = \boxed{-\vec{AB}}$ (A est le milieu de $[G_3 B]$) ; $\vec{AG}_4 = \boxed{\frac{2}{3}\vec{AB}}$ (4 cm) ; $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$. **Coefficients de même signe** $\Rightarrow$ point de $[AB]$: G_1, G_4, I sont sur $[AB]$, pas G_2 ni G_3 (signes contraires). **Homogénéité** (multiplier les coefficients par un même réel non nul ne change pas le barycentre) : $(10, 2) = 2(5, 1)$ donne $\boxed{G_1}$; $(-\frac{1}{7}, 1) = -\frac{1}{7}(1, -7)$ donne $\boxed{G_2}$; $(-3, -3) = -3(1, 1)$ donne $\boxed{I}$.



- Le point existe si et seulement si $m + 4 \neq 0$: il **n'existe pas pour** $\boxed{m = -4}$. C'est le milieu si et seulement si les coefficients sont égaux : $\boxed{m = 4}$. Pour $m \neq -4$, $\vec{AG} = \frac{4}{m+4}\vec{AB}$; $G \in [AB] \iff 0 \leq \frac{4}{m+4} \leq 1 \iff (m+4 > 0 \text{ et } 4 \leq m+4) \iff \boxed{m \geq 0}$ ($m = 0$ donne B).

■ Corrigé de l'exercice 2

- On se ramène à $\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} = \vec{0}$, puis $\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\vec{AB}$. a) $\boxed{\text{Bar}\{(A, 2); (B, 5)\}}$, $\vec{AG} = \frac{5}{7}\vec{AB}$. b) $3\vec{GA} - 2\vec{GB} = \vec{0}$: $\boxed{\text{Bar}\{(A, 3); (B, -2)\}}$, $\vec{AG} = \frac{-2}{1}\vec{AB} = -2\vec{AB}$. c) $\vec{AG} = t\vec{AB}$ donne $G = \text{Bar}\{(A, 1-t); (B, t)\} = \text{Bar}\{(A, \frac{5}{9}); (B, \frac{4}{9})\} = \boxed{\text{Bar}\{(A, 5); (B, 4)\}}$. d) $G = \text{Bar}\{(B, \frac{3}{4}); (A, \frac{1}{4})\} = \boxed{\text{Bar}\{(A, 1); (B, 3)\}}$, $\vec{AG} = \frac{3}{4}\vec{AB}$. e) $\vec{AB} = \vec{AG} + \vec{GB} = -\vec{GA} + \vec{GB}$: l'égalité devient $4\vec{GA} - \vec{GB} + \vec{GA} - \vec{GB} = \vec{0}$, soit $5\vec{GA} - 2\vec{GB} = \vec{0}$: $\boxed{\text{Bar}\{(A, 5); (B, -2)\}}$, $\vec{AG} = -\frac{2}{3}\vec{AB}$.
- Le point d'abscisse x vérifie $\vec{AM} = \frac{x}{5}\vec{AB}$, donc $M = \text{Bar}\{(A, 1 - \frac{x}{5}); (B, \frac{x}{5})\}$; on multiplie par 5 : $x = 1$: $\boxed{(4, 1)}$; $x = 3$: $\boxed{(2, 3)}$; $x = 7$: $\boxed{(-2, 7)}$; $x = -3$: $\boxed{(8, -3)}$.

■ Corrigé de l'exercice 3

- $\vec{AG} = \frac{8}{9}\vec{AB}$ ($AG = 8$ cm), $\vec{AK} = \frac{10}{9}\vec{AB}$ ($AK = 10$ cm, $BK = 1$ cm). On insère G : $\vec{MA} + 8\vec{MB} = (\vec{MG} + \vec{GA}) + 8(\vec{MG} + \vec{GB}) = 9\vec{MG} + \underbrace{\vec{GA} + 8\vec{GB}}_{\vec{0}} = \boxed{9\vec{MG}}$. De même $\boxed{-\vec{MA} + 10\vec{MB} = 9\vec{MK}}$. **Somme nulle** : $3\vec{MA} - 3\vec{MB} = 3(\vec{MA} + \vec{BM}) = \boxed{3\vec{BA}}$, indépendant de M .

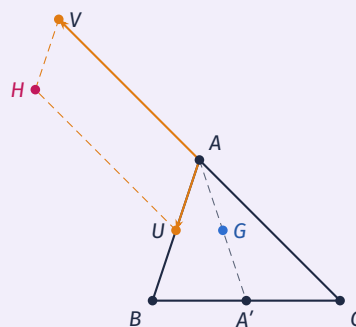
2. $\vec{MA} + 8\vec{MB} = 3\vec{AB} \iff 9\vec{MG} = 3\vec{AB} \iff \vec{GM} = -\frac{1}{3}\vec{AB}$: M est sur $[AG]$, à 3 cm de G , donc $\boxed{AM = 5 \text{ cm}}$. Pour tout P , $3\vec{PA} - 3\vec{PB} = 3\vec{BA}$; or $3\vec{BA} = 6\vec{AB}$ équivaut à $9\vec{AB} = \vec{0}$, faux : **aucun point** P ne convient.

■ Corrigé de l'exercice 4

- Formule** : $x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta}$, de même pour y_G . $G\left(\frac{-2+5}{3}, \frac{6+0}{3}\right) = \boxed{(1, 2)}$; $H\left(\frac{-1-10}{-1}, \frac{3-0}{-1}\right) = \boxed{(11, -3)}$; $I\left(2, \frac{3}{2}\right)$.
- a) $\vec{AC}(4, -2)$ et $\frac{2}{3}\vec{AB} = \frac{2}{3}(6, -3) = (4, -2)$: $\vec{AC} = \frac{2}{3}\vec{AB}$, donc $C = \text{Bar}\left\{\left(A, \frac{1}{3}\right); \left(B, \frac{2}{3}\right)\right\} = \boxed{\text{Bar}\{(A, 1); (B, 2)\}}$.
b) $\det(\vec{AD}, \vec{AB}) = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 6 = 3 \neq 0$: $D \notin (AB)$. Or tout barycentre de A et B est sur (AB) : D n'est pas un barycentre de A et B .
- $E_\alpha\left(\frac{5-\alpha}{\alpha+1}, \frac{3\alpha}{\alpha+1}\right)$. E_α est sur la droite $y = x$ si et seulement si $3\alpha = 5 - \alpha$, soit $\boxed{\alpha = \frac{5}{4}}$: $E\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right) = \text{Bar}\{(A, 5); (B, 4)\}$.

■ Corrigé de l'exercice 5

- a) $2+1+1 = 4 \neq 0$. b) **Chasles** : $2\vec{GA} + (\vec{GA} + \vec{AB}) + (\vec{GA} + \vec{AC}) = \vec{0}$, soit $4\vec{GA} + \vec{AB} + \vec{AC} = \vec{0}$: $\boxed{\vec{AG} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC}}$. c) $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AA'}$ (A' milieu de $[BC]$), donc $\vec{AG} = \frac{1}{2}\vec{AA'}$: G est le **milieu de** $[AA']$.
- Somme 2 : $\vec{AH} = \frac{1 \cdot \vec{AB} + (-2) \cdot \vec{AC}}{2} = \boxed{\frac{1}{2}\vec{AB} - \vec{AC}}$. **Construction** : U tel que $\vec{AU} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ (milieu de $[AB]$), V tel que $\vec{AV} = -\vec{AC}$ (symétrique de C par rapport à A) ; H est le quatrième sommet du parallélogramme $AUHV$.
- La somme $m+2-5$ est nulle si et seulement si $\boxed{m = 3}$. Alors $3\vec{MA} + 2\vec{MB} - 5\vec{MC} = 3(\vec{MA} - \vec{MC}) + 2(\vec{MB} - \vec{MC}) = \boxed{3\vec{CA} + 2\vec{CB}}$: vecteur constant.



■ Corrigé de l'exercice 6

- $\det(\vec{AB}, \vec{AC}) = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 30 + 6 = 36 \neq 0$: non alignés. $G\left(\frac{-1+5+2}{3}, \frac{1-1+6}{3}\right) = \boxed{(2, 2)}$; $A'\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$.
 $\frac{2}{3}\vec{AA'} = \frac{2}{3}\left(\frac{9}{2}, \frac{3}{2}\right) = (3, 1) = \vec{AG}$ ✓. $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = (-3, -1) + (3, -3) + (0, 4) = (0, 0)$ ✓.
- Somme $-1 + 2 + 2 = 3$: $K\left(\frac{1+10+4}{3}, \frac{-1-2+12}{3}\right) = \boxed{(5, 3)}$; le milieu de $[AK]$ est $\left(\frac{-1+5}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = (2, 2) = G$ ✓.
Explication : $\vec{AK} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC} = \frac{4}{3}\vec{AA'} = 2\vec{AG}$: K est le symétrique de A par rapport à G .

■ Corrigé de l'exercice 7

- a) G est l'isobarycentre de A, B, C : $\boxed{\vec{u} = 3\vec{MG}}$. b) Somme $1 + 1 - 4 = -2 \neq 0$: $\boxed{\vec{v} = -2\vec{MK}}$.
Associativité : $(A, 1), (B, 1)$ se regroupent en $(I, 2)$, donc $K = \text{Bar}\{(I, 2); (C, -4)\} = \text{Bar}\{(I, 1); (C, -2)\}$ et $\vec{IK} = \frac{-2}{-1}\vec{IC} = 2\vec{IC}$: C est le **milieu de** $[IK]$. c) **Somme nulle** : $\vec{w} = (\vec{MA} - \vec{MB}) + 2(\vec{MC} - \vec{MB}) = \boxed{\vec{BA} + 2\vec{BC}}$.
- $\vec{u} - \vec{v} = \vec{MC} + 4\vec{MC} = \boxed{5\vec{MC}}$. Donc $\vec{u} = \vec{v} \iff \vec{MC} = \vec{0} \iff \boxed{M = C}$.

■ Corrigé de l'exercice 8

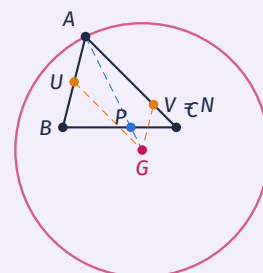
1. $\vec{AG} = \frac{m_B}{m_A+m_B} \vec{AB}$; en divisant par m_B : $\boxed{AG = \frac{d}{k+1}}$. De $m_A \vec{GA} + m_B \vec{GB} = \vec{0}$: $m_A GA = m_B GB$, d'où $\boxed{\frac{GA}{GB} = \frac{m_B}{m_A}}$. G hors de l'astre $A \iff AG > R \iff k+1 < \frac{d}{R} \iff \boxed{k < \frac{d}{R} - 1}$.
2. a) $AG = \frac{150\,000\,000}{333\,001} \approx \boxed{450 \text{ km}} \ll 696\,000 \text{ km}$: G est **au cœur du Soleil** (et $\frac{d}{R} - 1 \approx 214,5 < 333\,000$).
 b) $AG = \frac{19\,600}{9} \approx \boxed{2\,178 \text{ km}} > 1\,190 \text{ km}$: G est **hors de Pluton**, entre les deux astres (et $\frac{d}{R} - 1 \approx 15,5 > 8$) : on parle de « planète double ».

26

Corrigés du niveau 2

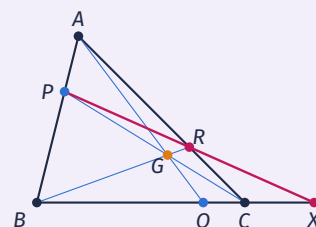
■ Corrigé de l'exercice 9

1. a) $2+3=5 \neq 0$: P existe et $\boxed{\vec{BP} = \frac{3}{5} \vec{BC}}$. b) $2\vec{MB} + 3\vec{MC} = 2(\vec{MP} + \vec{PB}) + 3(\vec{MP} + \vec{PC}) = 5\vec{MP} + (2\vec{PB} + 3\vec{PC}) = 5\vec{MP}$, car $2\vec{PB} + 3\vec{PC} = \vec{0}$.
2. a) $-1+2+3=4 \neq 0$. b) **Chasles en A** : $-\vec{GA} + 2(\vec{GA} + \vec{AB}) + 3(\vec{GA} + \vec{AC}) = \vec{0}$, soit $4\vec{GA} + 2\vec{AB} + 3\vec{AC} = \vec{0}$: $\boxed{\vec{AG} = \frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{3}{4} \vec{AC}}$; G est le quatrième sommet du parallélogramme construit sur $\vec{AU} = \frac{1}{2} \vec{AB}$ et $\vec{AV} = \frac{3}{4} \vec{AC}$ (figure). c) Avec $M = G$: $2\vec{GB} + 3\vec{GC} = 5\vec{GP}$, donc $\vec{0} = -\vec{GA} + 2\vec{GB} + 3\vec{GC} = -\vec{GA} + 5\vec{GP}$: $G = \text{Bar}\{(A, -1); (P, 5)\}$ et $\boxed{\vec{AG} = \frac{5}{4} \vec{AP}}$ (G est au-delà de P). Contrôle : $\vec{AP} = \vec{AB} + \frac{3}{5} \vec{BC} = \frac{2}{5} \vec{AB} + \frac{3}{5} \vec{AC}$ et $\frac{5}{4} \vec{AP} = \frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{3}{4} \vec{AC}$ ✓.
3. $\vec{u}$ a pour somme 4 : $\boxed{\vec{u} = 4\vec{MG}}$. Pour $\vec{v}$, la **somme est nulle** : le vecteur est constant, on le calcule en $M = A$: $\vec{v} = 2\vec{AB} + 3\vec{AC} = \boxed{5\vec{AP}}$ (1.b) avec $M = A$).
4. a) $4\vec{NG} = 2\vec{AB} \iff \boxed{\vec{GN} = -\frac{1}{2} \vec{AB}}$. Alors $\vec{AN} = \vec{AG} - \frac{1}{2} \vec{AB} = \frac{3}{4} \vec{AC}$: N est le point V de $[AC]$. b) $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \iff 4MG = 5AP \iff MG = \frac{5}{4} AP = AG$: c'est le **cercle de centre G passant par A** (en rouge).



■ Corrigé de l'exercice 10

1. **Méthode** : $\vec{AM} = t\vec{AB}$ équivaut à $M = \text{Bar}\{(A, 1-t); (B, t)\}$, puis on applique l'homogénéité. Ainsi $P = \text{Bar}\{(A, \frac{2}{3}); (B, \frac{1}{3})\}$, donc $P = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 1)\}$; de même $Q = \text{Bar}\{(B, \frac{1}{5}); (C, \frac{4}{5})\} = \text{Bar}\{(B, 1); (C, 4)\}$ et $R = \text{Bar}\{(A, \frac{1}{3}); (C, \frac{2}{3})\} = \text{Bar}\{(A, 2); (C, 4)\}$.
2. a) Somme $7 \neq 0$. **Associativité** : $(A, 2), (B, 1)$ donnent $(P, 3)$, donc $G = \text{Bar}\{(P, 3); (C, 4)\} \in (CP)$; de même $G = \text{Bar}\{(A, 2); (Q, 5)\} \in (AQ)$ et $G = \text{Bar}\{(B, 1); (R, 6)\} \in (BR)$. Les droites $(CP), (AQ), (BR)$ sont donc **concurrentes en G** . b) $\boxed{\vec{CG} = \frac{3}{7} \vec{CP}}$, $\boxed{\vec{AG} = \frac{5}{7} \vec{AQ}}$, $\boxed{\vec{BG} = \frac{6}{7} \vec{BR}}$.
3. a) $\vec{CX} = \frac{1}{3} \vec{BC}$ donne $\vec{BX} = \frac{4}{3} \vec{BC} = \frac{4}{-1+4} \vec{BC}$: $\boxed{X = \text{Bar}\{(B, -1); (C, 4)\}}$. b) Pour tout M , $2\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MB} + 4\vec{MC} = 2\vec{MA} + 4\vec{MC} = 6\vec{MR}$; en regroupant autrement : $(2\vec{MA} + \vec{MB}) + (-\vec{MB} + 4\vec{MC}) = 3\vec{MP} + 3\vec{MX}$. Donc $6\vec{MR} = 3\vec{MP} + 3\vec{MX}$: $\boxed{R = \text{Bar}\{(P, 3); (X, 3)\}}$. c) R est un barycentre de P et X : P, R, X sont **alignés** ; les coefficients étant égaux, R est le **milieu de $[PX]$** .

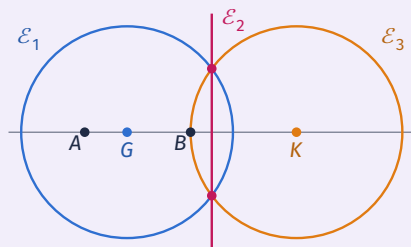


■ Corrigé de l'exercice 11

1. $\det(\vec{AB}, \vec{AC}) = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = -8 - 8 = -16 \neq 0$: non alignés. $I\left(\frac{3+5}{4}, \frac{9-1}{4}\right) = (2, 2)$; $J\left(\frac{5+2}{-1}, \frac{-1-2}{-1}\right) = (-7, 3)$;
 $G\left(\frac{3+5+2}{2}, \frac{9-1-2}{2}\right) = (5, 3)$.
2. a) $M(x, y) \in (CI) \iff \det(\vec{CM}, \vec{CI}) = 0 \iff \begin{vmatrix} x+1 & 3 \\ y-1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff x - 3y + 4 = 0$. A et J ont la même ordonnée 3 : $(AJ) : y = 3$. b) $y = 3$ et $x = 3y - 4 = 5$: unique solution (5, 3) : c'est G. c) (A, 3), (B, 1) se regroupent en (I, 4) : $G = \text{Bar}\{(I, 4); (C, -2)\} \in (CI)$; (B, 1), (C, -2) se regroupent en (J, -1) : $G = \text{Bar}\{(A, 3); (J, -1)\} \in (AJ)$. Donc $G = (CI) \cap (AJ)$.
3. a) Somme $m - 1 \neq 0$: $G_m\left(\frac{m+7}{m-1}, 3\right)$: ordonnée 3, donc $G_m \in (AJ)$. **Sans calcul** : $G_m = \text{Bar}\{(A, m); (J, -1)\}$. b) $\frac{m+7}{m-1} - 9 + 4 = 0 \iff m + 7 = 5(m - 1) \iff m = 3$ (et $G_3 = G$). c) $A\vec{G}_m = \frac{-1}{m-1}\vec{AJ} = \frac{1}{1-m}\vec{AJ}$. Tout réel $t \neq 0$ s'écrit $\frac{1}{1-m} (m = 1 - \frac{1}{t})$, et jamais $t = 0$: l'ensemble des G_m est la **droite (AJ) privée de A**.

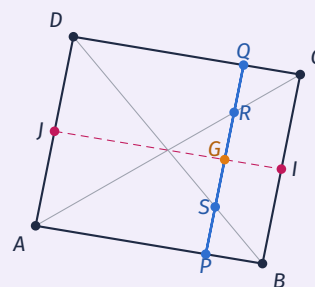
■ Corrigé de l'exercice 12

1. $\vec{AG} = \frac{2}{5}\vec{AB}$ ($AG = 2$ cm); $\vec{AK} = \frac{2}{1}\vec{AB} = 2\vec{AB}$ (B milieu de [AK]). **Réductions** : $\vec{u} = 5\vec{MG}$, $\vec{v} = \vec{MK}$ (somme 1), $\vec{w} = \vec{BA}$ (somme nulle).
2. $\mathcal{E}_1 : 5MG = 25 \iff MG = 5$: **cercle de centre G, de rayon 5**. $\mathcal{E}_2 : 5\vec{MA} - 10\vec{MB} = -5\vec{v} = -5\vec{MK}$, donc $\|\vec{u}\| = \|5\vec{MA} - 10\vec{MB}\| \iff 5MG = 5MK \iff MG = MK$: **médiatrice de [GK]**. $\mathcal{E}_3 : MK = AB = 5$: **cercle de centre K, de rayon 5**; $KB = 5$, donc $B \in \mathcal{E}_3$. $\mathcal{E}_4 : \|2\vec{w}\| = 2AB = 10$ pour tout M : $\mathcal{E}_4$ est **le plan**; $\|2\vec{w}\| = 8$ n'est jamais vrai : **ensemble vide**.
3. Ici $G(2, 0)$ et $K(10, 0)$. $\mathcal{E}_1 : (x-2)^2 + y^2 = 25$. $\mathcal{E}_2$: le milieu de [GK] est (6, 0) et (GK) est l'axe des abscisses, d'où $x = 6$. $\mathcal{E}_3 : (x-10)^2 + y^2 = 25$.
Points communs. Un point commun aux trois ensembles est dans $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$: $x = 6$ et $16 + y^2 = 25$, soit $y = \pm 3$. Réciproquement, $(6-10)^2 + (\pm 3)^2 = 25$: ces deux points sont aussi sur $\mathcal{E}_3$. Points communs : $(6, 3)$ et $(6, -3)$.



■ Corrigé de l'exercice 13

1. $\vec{AP} = \frac{3}{4}\vec{AB}$, $\vec{DQ} = \frac{3}{4}\vec{DC}$, $\vec{AR} = \frac{3}{4}\vec{AC}$, $\vec{DS} = \frac{3}{4}\vec{DB}$.
2. **Associativité** : (A, 1), (B, 3) donnent (P, 4) et (C, 3), (D, 1) donnent (Q, 4) : $G = \text{Bar}\{(P, 4); (Q, 4)\}$, milieu de [PQ]. De même $G = \text{Bar}\{(R, 4); (S, 4)\}$, milieu de [RS]. Les diagonales [PQ] et [RS] du quadrilatère PRQS ont le même milieu : **PRQS est un parallélogramme**.
3. (A, 1), (D, 1) donnent (J, 2), et (B, 3), (C, 3) donnent (I, 6) : $G = \text{Bar}\{(J, 2); (I, 6)\}$, donc $\vec{JG} = \frac{6}{8}\vec{JI} = \frac{3}{4}\vec{JI}$.



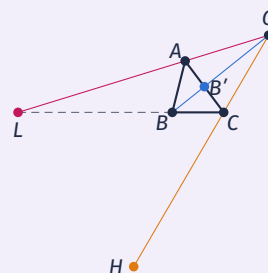
■ Corrigé de l'exercice 14

1. K : somme 1, $K = 2A - B$: $\boxed{K(-1, 4)}$. L : somme -1, $L\left(\frac{3+2}{-1}, \frac{0+4}{-1}\right) = \boxed{(-5, -4)}$. **Réduction** : $2\vec{MA} - \vec{MB} = (2-1)\vec{MK} = \vec{MK}$ et $\vec{MB} - 2\vec{MC} = (1-2)\vec{ML} = -\vec{ML}$.
2. $2\vec{MA} - \vec{MB} = 2(1-x, 2-y) - (3-x, -y) = \boxed{(-1-x, 4-y)}$; donc $M \in \Gamma_1 \iff (x+1)^2 + (y-4)^2 = 25$: Γ_1 est le **cercle de centre** $K(-1, 4)$ **et de rayon** 5 (on retrouve $MK = 5$).
3. $\|\vec{MK}\| = \|\vec{ML}\| \iff MK = ML$: Γ_2 est la **médiatrice de** $[KL]$ (les sommes 1 et -1 ont même valeur absolue). **Par le calcul** : $\vec{MB} - 2\vec{MC} = (3-x, -y) - 2(-1-x, -2-y) = (5+x, 4+y)$, et $(x+1)^2 + (y-4)^2 = (x+5)^2 + (y+4)^2 \iff 2x - 8y + 17 = 10x + 8y + 41 \iff \boxed{x + 2y + 3 = 0}$ (le milieu $(-3, 0)$ de $[KL]$ vérifie bien l'équation).
4. $x = -2y - 3$ dans l'équation de Γ_1 : $(-2y-2)^2 + (y-4)^2 = 25 \iff 5y^2 + 20 = 25 \iff y = \pm 1$. Points communs : $\boxed{(-5, 1) \text{ et } (-1, -1)}$.

■ Corrigé de l'exercice 15

1. Somme $3 - 4 + 3 = 2$: $\vec{AG} = \frac{-4\vec{AB} + 3\vec{AC}}{2} = \boxed{-2\vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{AC}}$.
2. a) $(A, 3), (C, 3)$ donnent $(B', 6)$: $G = \text{Bar}\{(B', 6); (B, -4)\} = \text{Bar}\{(B', 3); (B, -2)\}$, d'où $\boxed{\vec{B'G} = -2\vec{B'B}}$. b) H a pour somme -1 : $\boxed{\vec{AH} = \frac{-4}{-1}\vec{AB} = 4\vec{AB}}$; puis $G = \text{Bar}\{(H, -1); (C, 3)\}$ et $\boxed{\vec{HG} = \frac{3}{2}\vec{HC}}$. c) L a pour somme -1 : $\boxed{\vec{BL} = \frac{3}{-1}\vec{BC} = -3\vec{BC}}$; puis $G = \text{Bar}\{(A, 3); (L, -1)\}$ et $\boxed{\vec{AG} = -\frac{1}{2}\vec{AL}}$.

3. **Trois constructions, un seul point** : G s'obtient en prolongeant $[BB']$ au-delà de B' ($\vec{B'G} = 2\vec{BB'}$); c'est aussi le point de (HC) tel que $\vec{HG} = \frac{3}{2}\vec{HC}$, et le point de (AL) tel que $\vec{AG} = -\frac{1}{2}\vec{AL}$. Comme le barycentre est unique, ces trois constructions donnent le même point : les droites (BB') , (HC) et (AL) sont **concurrentes en** G (figure). Bon réflexe : une construction sert de contrôle aux deux autres.



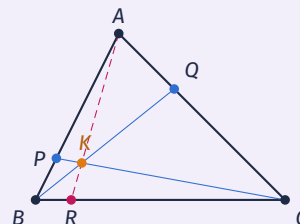
■ Corrigé de l'exercice 16

- a) **Faux** : $\vec{AG}_1 = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\vec{AB} = \frac{3}{5}\vec{AB}$ (c'est le coefficient de B qui est au numérateur). b) **Faux** : la somme $3 - 3$ est nulle ; $3\vec{GA} - 3\vec{GB} = 3\vec{BA} \neq \vec{0}$ pour tout G . c) **Vrai** : $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, 1)\}$ et $(B, 1), (C, 1)$ se regroupent en $(A', 2)$. d) **Faux** : le point H doit recevoir la somme $2 + 1 = 3$: $\text{Bar}\{(A, 2); (B, 1); (C, 4)\} = \text{Bar}\{(H, 3); (C, 4)\}$, alors que $\text{Bar}\{(H, 1); (C, 4)\}$ vérifie $\vec{HM} = \frac{4}{5}\vec{HC} \neq \frac{4}{7}\vec{HC}$. e) **Faux** : $\|\vec{MA} + \vec{MB}\| = 2MI$ (I milieu de $[AB]$), donc $2MI = AB \iff MI = \frac{AB}{2}$: c'est le **cercle de diamètre** $[AB]$.

27 Corrigés du niveau 3

■ Corrigé de l'exercice 17

- $\vec{AP} = \frac{3}{4}\vec{AB} : P = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 3)\} = \boxed{\text{Bar}\{(A, 2); (B, 6)\}}$; $\vec{AQ} = \frac{1}{3}\vec{AC} : Q = \text{Bar}\{(A, 2); (C, 1)\}$ (on accorde les masses de A).
- Soit $K' = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 6); (C, 1)\}$ (somme 9). **Associativité** : $K' = \text{Bar}\{(P, 8); (C, 1)\} \in (CP)$ et $K' = \text{Bar}\{(Q, 3); (B, 6)\} \in (BQ)$. Les droites (BQ) et (CP) , sécantes, n'ont qu'un point commun : $\boxed{K = K'}$. Alors $\vec{BK} = \frac{3}{9}\vec{BQ} = \frac{1}{3}\vec{BQ}$, d'où $\boxed{\frac{BK}{KQ} = \frac{1}{2}}$; $\vec{CK} = \frac{8}{9}\vec{CP}$, d'où $\boxed{\frac{CK}{KP} = 8}$.
- Le point $R' = \text{Bar}\{(B, 6); (C, 1)\}$ est sur (BC) , et $K = \text{Bar}\{(A, 2); (R', 7)\}$ montre que $R' \in (AK)$: donc $R' = (AK) \cap (BC) = R$. On lit : $\vec{BR} = \frac{1}{7}\vec{BC}$, d'où $\boxed{\frac{BR}{RC} = \frac{1}{6}}$; $\vec{AK} = \frac{7}{9}\vec{AR}$, d'où $\boxed{\frac{AK}{KR} = \frac{7}{2}}$. **À retenir** : le point le plus « lourd » (B, masse 6) attire K et R.

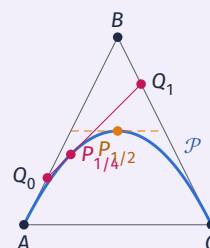


■ Corrigé de l'exercice 18

- $2\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 4\vec{MK}_1$ où $K_1 = \text{Bar}\{(A, 2); (A', 2)\}$ est le milieu de $[AA']$. **Somme nulle** : $\vec{MB} + \vec{MC} - 2\vec{MA} = \vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AA'}$ (calcul en $M = A$). Donc $M \in \Gamma_1 \iff 4MK_1 = 2AA' \iff MK_1 = \frac{AA'}{2} : \Gamma_1$ est le cercle de centre K_1 et de rayon $\frac{AA'}{2}$, c'est-à-dire le **cercle de diamètre** $[AA']$.
- Avec $P = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 1)\}$ et $Q = \text{Bar}\{(B, 1); (C, 2)\} : M \in \Gamma_2 \iff 3MP = 3MQ \iff MP = MQ$: médiatrice de $[PQ]$. Or, pour tout M , $3\vec{PQ} = 3\vec{MQ} - 3\vec{MP} = (\vec{MB} + 2\vec{MC}) - (2\vec{MA} + \vec{MB}) = 2\vec{AC}$, donc $\vec{PQ} = \frac{2}{3}\vec{AC} : (PQ) \parallel (AC)$, et la médiatrice est perpendiculaire à (AC) . Le milieu de $[PQ]$ est $\text{Bar}\{(P, 3); (Q, 3)\} = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 2); (C, 2)\} = G$. Donc Γ_2 est la **perpendiculaire à (AC) passant par G** .
- $\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC} = 4\vec{MK}$ où $K = \text{Bar}\{(C', 2); (C, 2)\}$ est le milieu de $[CC']$; $\vec{MA} - \vec{MB} = \vec{BA}$. Donc Γ_3 est le **cercle de centre K et de rayon $\frac{AB}{4}$** . **Double implication** : $C' \in \Gamma_3 \iff KC' = \frac{AB}{4} \iff \frac{CC'}{2} = \frac{AB}{4} \iff CC' = \frac{AB}{2} = C'A = C'B \iff C$ est sur le cercle de centre C' et de rayon $\frac{AB}{2}$, de diamètre $[AB] \iff \boxed{ABC \text{ rectangle en } C}$.

■ Corrigé de l'exercice 19

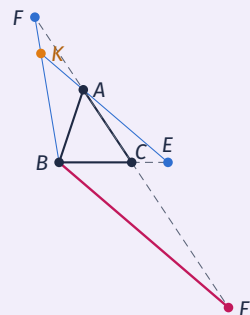
- $\vec{AQ}_0 = t\vec{AB}$, $\vec{BQ}_1 = t\vec{BC}$, $\vec{Q}_0\vec{P}_t = t\vec{Q}_0\vec{Q}_1$ (les sommes des coefficients valent 1).
- Pour tout $M : \vec{MP}_t = (1-t)\vec{MQ}_0 + t\vec{MQ}_1$, avec $\vec{MQ}_0 = (1-t)\vec{MA} + t\vec{MB}$ et $\vec{MQ}_1 = (1-t)\vec{MB} + t\vec{MC}$; d'où $\vec{MP}_t = (1-t)^2\vec{MA} + 2t(1-t)\vec{MB} + t^2\vec{MC}$, et la somme des coefficients vaut $((1-t) + t)^2 = 1$: $\boxed{P_t = \text{Bar}\{(A, (1-t)^2); (B, 2t(1-t)); (C, t^2)\}}$. Pour $t \in [0, 1]$, ces coefficients sont positifs : P_t est dans le triangle (cours).
- a) $x = 2 \cdot 2t(1-t) + 4t^2 = \boxed{4t}$ et $y = 4 \cdot 2t(1-t) = \boxed{8t(1-t)}$. Avec $t = \frac{x}{4} : y = 8 \cdot \frac{x}{4} \left(1 - \frac{x}{4}\right) = 2x - \frac{x^2}{2}$; et $t \in [0, 1] \iff x \in [0, 4] : P_t$ décrit l'arc $\mathcal{P}$. b) $P_{1/4} \left(1, \frac{3}{2}\right)$ et $P_{1/2}(2, 2)$, sommet de $\mathcal{P}$ (milieu de $[BB']$).



c) $Q_0(2t, 4t), Q_1(2+2t, 4-4t)$: coefficient directeur $\frac{4-8t}{2} = 2-4t$, d'où $(Q_0Q_1) : y = 4t + (2-4t)(x-2t) = (2-4t)x + 8t^2$. **Intersection** : $2x - \frac{x^2}{2} = (2-4t)x + 8t^2 \iff x^2 - 8tx + 16t^2 = 0 \iff (x-4t)^2 = 0$: discriminant nul, une seule solution $x = 4t$; la droite (Q_0Q_1) est **tangente à $\mathcal{P}$ en P_t** (figure : $t = \frac{1}{4}$).

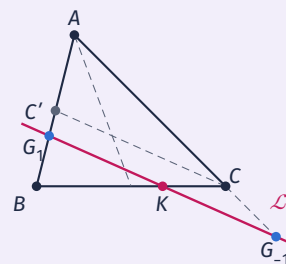
■ Corrigé de l'exercice 20

- $\vec{BE} = \frac{3}{2}\vec{BC} = \frac{3}{-1+3}\vec{BC} : \boxed{E = \text{Bar}\{(B, -1); (C, 3)\}}$. A est le milieu de $[CF]$: $\vec{AF} = -\vec{AC} = \frac{-1}{2-1}\vec{AC}$, donc $F = \text{Bar}\{(A, 2); (C, -1)\} = \boxed{\text{Bar}\{(A, -6); (C, 3)\}}$ (homogénéité, facteur -3).
- Somme $-4 \neq 0$. **Associativité** : $(B, -1), (C, 3)$ donnent $(E, 2)$: $K = \text{Bar}\{(A, -6); (E, 2)\} \in (AE)$ et $\boxed{\vec{AK} = -\frac{1}{2}\vec{AE}}$. $(A, -6), (C, 3)$ donnent $(F, -3)$: $K = \text{Bar}\{(B, -1); (F, -3)\} \in (BF)$ et $\boxed{\vec{BK} = \frac{3}{4}\vec{BF}}$. Les droites (AE) et (BF) sont distinctes : elles se coupent en K, hors du triangle.
- $\vec{AF'} = 3\vec{AC} = \frac{3}{-2+3}\vec{AC} : \boxed{F' = \text{Bar}\{(A, -2); (C, 3)\}}$. La somme $-2 - 1 + 3$ est nulle : $\vec{w} = -2\vec{MA} - \vec{MB} + 3\vec{MC}$ est constant. **Deux regroupements** : avec $(E, 2)$, $\vec{w} = -2\vec{MA} + 2\vec{ME} = 2\vec{AE}$; avec $(F', 1)$, $\vec{w} = \vec{MF'} - \vec{MB} = \vec{BF'}$. Donc $\boxed{\vec{BF'} = 2\vec{AE}}$: $(AE) \parallel (BF')$. **Conséquence** : quand la somme totale est nulle, les droites sont parallèles (pas de point de concours).



■ Corrigé de l'exercice 21

- $m + (m+1) + (2-2m) = 3 \neq 0$: G_m existe pour tout m . $\vec{AG}_m = \frac{(m+1)\vec{AB} + (2-2m)\vec{AC}}{3}$ et $\vec{AK} = \vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{BC} = \frac{\vec{AB} + 2\vec{AC}}{3}$; par différence, $\boxed{\vec{KG}_m = \frac{m}{3}(\vec{AB} - 2\vec{AC})}$. Or $\vec{AB} - 2\vec{AC} = \vec{CB} - \vec{AC} = \vec{CA} + \vec{CB} = 2\vec{CC'}$: $\boxed{\vec{KG}_m = \frac{2m}{3}\vec{CC'}}$.
- $m \mapsto \frac{2m}{3}$ prend toutes les valeurs réelles : $\mathcal{L}$ est la **droite passant par K et parallèle à la médiane (CC')** .
- $G_m \in (AB) \iff$ le coefficient de C est nul $\iff \boxed{m=1}$: $G_1 = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$. $G_m \in (AC) \iff m+1=0 \iff \boxed{m=-1}$: $G_{-1} = \text{Bar}\{(A, -1); (C, 4)\}$. Si $m+1 = 2-2m$, soit $\boxed{m = \frac{1}{3}}$, $G_m = \text{Bar}\{(A, m); (A', 2m+2)\} \in (AA')$; comme $\mathcal{L}$, parallèle à (CC') , coupe (AA') en un seul point, c'est la seule valeur.
- Coefficients de même signe (donc positifs, leur somme valant 3) : $m > 0, m+1 > 0$ et $2-2m > 0$, soit $\boxed{0 < m < 1}$: le segment ouvert $]KG_1[$.



■ Corrigé de l'exercice 22

- $P\left(\frac{0+12}{3}, 0\right) = (4, 0)$ et $Q\left(\frac{12+0}{3}, \frac{8+4}{3}\right) = (4, 4)$. Pour tout M, $\vec{MA} + 2\vec{MB} = 3\vec{MP}$ et $2\vec{MC} + \vec{MD} = 3\vec{MQ}$: $M \in \mathcal{E}_1 \iff MP = MQ$: $\mathcal{E}_1$ est la **médiatrice de $[PQ]$** ; $[PQ]$ est vertical, de milieu $(4, 2)$: $\boxed{\mathcal{E}_1 : y = 2}$ (axe de symétrie horizontal du rectangle).
- O est le milieu de $[AC]$: $\vec{MA} + \vec{MC} = 2\vec{MO}$; $\vec{MB} - \vec{MD} = \vec{MB} + \vec{DM} = \vec{DB}$ (somme nulle). Donc $M \in \mathcal{E}_2 \iff 2MO = DB \iff MO = \frac{DB}{2} = \frac{\sqrt{36+16}}{2} = \sqrt{13}$: $\mathcal{E}_2$ est le cercle de centre O(3, 2) et de

rayon $\sqrt{13} = OA$: c'est le **cercle circonscrit au rectangle**, d'équation $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 13$.

■ Corrigé de l'exercice 23

- Associativité** : le système $(A, 1-k), (B, k), (B, 1-k), (C, k), (C, 1-k), (D, k), (D, 1-k), (A, k)$ donne à chaque sommet le coefficient 1 : son barycentre est O . En regroupant deux par deux, on obtient $(P, 1), (Q, 1), (R, 1), (S, 1)$: O est l'isobarycentre de P, Q, R, S .
- $U = \text{Bar}\{(P, 1); (R, 1)\} = \text{Bar}\{(A, 1-k); (B, k); (C, 1-k); (D, k)\}; (A, 1-k), (C, 1-k)$ donnent $(I, 2-2k)$ et $(B, k), (D, k)$ donnent $(J, 2k)$: $U = \text{Bar}\{(I, 1-k); (J, k)\}$. De même $V = \text{Bar}\{(I, k); (J, 1-k)\}$. Pour tout M : $\vec{MU} = (1-k)\vec{MI} + k\vec{MJ}$ et $\vec{MV} = k\vec{MI} + (1-k)\vec{MJ}$, d'où $\vec{VU} = \vec{MU} - \vec{MV} = (1-2k)(\vec{MI} - \vec{MJ}) = (1-2k)\vec{JI}$.
- $PQRS$ est un parallélogramme $\iff$ ses diagonales $[PR]$ et $[QS]$ ont le même milieu $\iff U = V \iff (1-2k)\vec{JI} = \vec{0} \iff (k = \frac{1}{2} \text{ ou } I = J)$, et $I = J$ signifie que les diagonales de $ABCD$ ont le même milieu : $k = \frac{1}{2}$ ou $ABCD$ parallélogramme. Pour $k = \frac{1}{2}$: les milieux des côtés de **tout** quadrilatère forment un parallélogramme (théorème de Varignon).

28

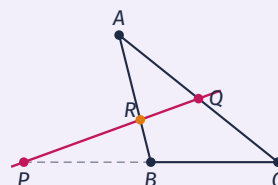
Corrigés du niveau 4

■ Corrigé de l'exercice 24

- (c)** : $\vec{AG} = \frac{-5}{2-5}\vec{AB} = \frac{5}{3}\vec{AB}$, donc $AG = \frac{5}{3} \times 6 = 10$. **(b)** : somme -1 ; $x = \frac{1+4+6}{-1} = -11$, $y = \frac{-2+7-3}{-1} = -2$.
- (b)** : $4MG = 4MI$ avec $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 3)\}$ ($AG = 6$) et I milieu ($AI = 4$) : médiatrice de $[GI]$, perpendiculaire à (AB) au point K tel que $AK = 5$.
- (c)** : somme nulle, vecteur constant, calculé en $M = A$: $-2\vec{AB} - \vec{AC} = 2\vec{BA} + \vec{CA}$. **(b)** : $\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 2\vec{MO} + (\vec{MD} - \vec{MB}) = 2\vec{MO} + \vec{BD} = 2\vec{MO} + 2\vec{OD} = 2\vec{MD}$: le point est D (somme 2).
- (b)** : si $a = 0$, le point est $\text{Bar}\{(B, b); (C, c)\} \in (BC)$. Réciproquement, un point de (BC) s'écrit $\text{Bar}\{(A, 0); (B, \beta); (C, \gamma)\}$, et les coefficients sont uniques à un facteur près (cours) : $a = 0$.

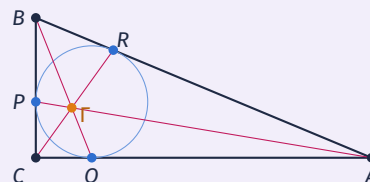
■ Corrigé de l'exercice 25

- a) $z = -\frac{1}{xy}$; en multipliant $(1, z)$ par $-xy \neq 0$: $(-xy, 1)$, donc $R = \text{Bar}\{(A, -xy); (B, 1)\}$. Et $1 - xy = 1 + \frac{1}{z} = \frac{z+1}{z} \neq 0$ car $z \neq -1$. b) La somme du système vaut $1 + x - x - xy = 1 - xy \neq 0$; (C, x) et $(\bar{C}, -x)$ s'annulent : son barycentre est $\text{Bar}\{(B, 1); (A, -xy)\} = R$. **Autre regroupement** : $(B, 1), (C, x)$ donnent $(P, 1+x)$; $(C, -x), (A, -xy)$, proportionnels à $(C, 1), (A, y)$ (facteur $-x$), donnent $(Q, -x(1+y))$. Donc $R = \text{Bar}\{(P, 1+x); (Q, -x(1+y))\}$: P, Q, R sont alignés.
- a) **Par l'absurde**, supposons $xy = 1$. Pour tout M : $\vec{MB} + x\vec{MC} = (1+x)\vec{MP}$ et $-x\vec{MC} - xy\vec{MA} = -x(1+y)\vec{MQ} = -(1+x)\vec{MQ}$ (car $x + xy = x + 1$). En ajoutant : $\vec{MB} - \vec{MA} = \vec{AB} = (1+x)(\vec{MP} - \vec{MQ}) = (1+x)\vec{QP}$: $(PQ) \parallel (AB)$. Comme R est commun à (PQ) et (AB) , ces droites sont confondues et $P \in (AB) \cap (BC) = \{B\}$: **contradiction**. Donc $xy \neq 1$. b) $z' = -\frac{1}{xy}$ vérifie $xyz' = -1$: par 1., $R' \in (PQ)$; et $R' \in (AB)$. Les droites (PQ) et (AB) sont distinctes ($P \neq B$) : elles ont au plus un point commun, donc $R' = R$. Alors $\frac{z'}{1+z'}\vec{AB} = \frac{z}{1+z}\vec{AB}$, d'où $z = z'$ ($t \mapsto \frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$ est injective) et $xyz = -1$.
- B est le milieu de $[CP]$: $P = \text{Bar}\{(B, 2); (C, -1)\} = \text{Bar}\{(B, 1); (C, -\frac{1}{2})\}$, donc $x = -\frac{1}{2}$; Q milieu de $[CA]$: $y = 1$. **Ménélaüs** : $R = (PQ) \cap (AB)$ correspond à $z = -\frac{1}{xy} = 2$: $R = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$, c'est-à-dire $\vec{AR} = \frac{2}{3}\vec{AB}$.



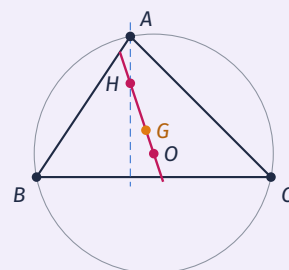
■ Corrigé de l'exercice 26

1. Somme $1 + z + zx \neq 0$. (B, z) , (C, zx) sont proportionnels à $(B, 1)$, (C, x) : ils donnent $(P, z(1+x))$, donc $K \in (AP)$. Comme $y = \frac{1}{zx}$, (C, zx) , $(A, 1)$ sont proportionnels à $(C, 1)$, (A, y) : ils donnent $(Q, zx(1+y))$, donc $K \in (BQ)$. Enfin $(A, 1)$, (B, z) donnent $(R, 1+z)$: $K \in (CR)$. Les trois droites sont **concurrentes en K**.
2. $\beta + \gamma \neq 0$ (sinon (AK) serait parallèle à (BC) et P n'existerait pas) ; $P' = \text{Bar}\{(B, \beta); (C, \gamma)\}$ est sur (BC) , et $K = \text{Bar}\{(A, \alpha); (P', \beta + \gamma)\}$ donne $P' \in (AK)$: $P' = (AK) \cap (BC) = P$. Ainsi $P = \text{Bar}\left\{(B, 1); \left(C, \frac{\gamma}{\beta}\right)\right\}$ et $x = \frac{\gamma}{\beta}$; de même $y = \frac{\alpha}{\gamma}$, $z = \frac{\beta}{\alpha}$, et $xyz = 1$.
3. $P \in [BC]$ avec $PB = v$, $PC = w$: les vecteurs $w\vec{PB}$ et $v\vec{PC}$ sont opposés et de même norme wv , donc $w\vec{PB} + v\vec{PC} = \vec{0}$ et $P = \text{Bar}\{(B, w); (C, v)\}$, soit $x = \frac{v}{w}$; de même $Q = \text{Bar}\{(C, u); (A, w)\}$, $y = \frac{w}{u}$, et $R = \text{Bar}\{(A, v); (B, u)\}$, $z = \frac{u}{v}$. Alors $xyz = 1$ et $1 + z + zx = 1 + \frac{u}{v} + \frac{u}{w} > 0$: par 1., les droites concourent en $\text{Bar}\left\{(A, 1); \left(B, \frac{u}{v}\right); \left(C, \frac{u}{w}\right)\right\}$, c'est-à-dire en Γ (on divise les coefficients par u).
4. $AB = \sqrt{144 + 25} = 13$. Le cercle touche (CA) en $Q(2, 0)$ et (CB) en $P(0, 2)$: $w = 2$, $u = AQ = 10$, $v = BP = 3$ (contrôle : $u + v = 13 = AB$ ✓). Puis $\Gamma = \text{Bar}\left\{(A, \frac{1}{10}); (B, \frac{1}{3}); (C, \frac{1}{2})\right\} = \text{Bar}\{(A, 3); (B, 10); (C, 15)\}$: $\Gamma\left(\frac{9}{7}, \frac{25}{14}\right)$. Contrôle : (AP) : $\frac{x}{12} + \frac{y}{2} = 1$ et $\frac{9}{84} + \frac{25}{28} = 1$ ✓.



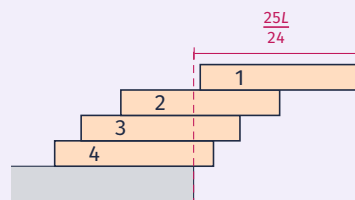
■ Corrigé de l'exercice 27

1. $\vec{AH} = \vec{OH} - \vec{OA} = \vec{OB} + \vec{OC} = 2\vec{OA'}$. **Deux cas.** Si $O \neq A'$: (OA') est la médiatrice de $[BC]$, perpendiculaire à (BC) ; (AH) lui est parallèle (ou $H = A$), donc H est sur la perpendiculaire à (BC) passant par A , la hauteur issue de A . Si $O = A'$: $\vec{AH} = \vec{0}$, $H = A$, qui est sur cette hauteur. De même $\vec{BH} = 2\vec{OB'}$ et $\vec{CH} = 2\vec{OC'}$: H est sur les trois hauteurs, c'est l'**orthocentre**.
2. Réduction en O : $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG}$, donc $\vec{OG} = \frac{1}{3}\vec{OH}$. Alors $3\vec{OG} = \vec{OG} + \vec{GH}$, soit $2\vec{GO} + \vec{GH} = \vec{0}$: $G = \text{Bar}\{(O, 2); (H, 1)\}$. Si $O \neq G$: $G \in (OH)$ et $GH = 2GO$.
3. $OA^2 = 1 + 25$, $OB^2 = 25 + 1$, $OC^2 = 25 + 1$: $OA = OB = OC = \sqrt{26}$, donc $O(1, 1)$ est le centre du cercle circonscrit. $\vec{OH} = (-1, 5) + (-5, -1) + (5, -1) = (-1, 3)$: $H(0, 4)$; $G\left(\frac{2}{3}, 2\right)$ et $\vec{OG} = \left(-\frac{1}{3}, 1\right) = \frac{1}{3}\vec{OH}$ ✓. (BC) est l'axe des abscisses, donc la hauteur issue de A est l'axe des ordonnées, qui contient H ✓.



■ Corrigé de l'exercice 28

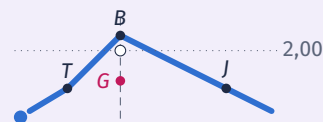
1. a) Les k briques du haut sont formées des $k-1$ premières (masse $k-1$, centre G_{k-1}) et de la brique k (masse 1, centre C_k) : par **associativité**, $G_k = \text{Bar}\{(G_{k-1}, k-1); (C_k, 1)\}$. b) $g_k = \frac{(k-1)g_{k-1} + d_k - \frac{L}{2}}{k} = \frac{(k-1)g_{k-1} + g_{k-1} - \frac{L}{2}}{k} = \frac{(k-1)g_{k-1} + g_{k-1} - \frac{L}{2}}{k} = g_{k-1} - \frac{L}{2k}$ (pour $k=1$: $g_1 = d_1 - \frac{L}{2}$ ✓).
2. En sommant ces égalités (télescopage) : $g_n = g_0 - \frac{L}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$; au plus juste, G_n est au-dessus du bord de la table : $g_n = 0$, d'où $d_1 = \frac{L}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)$. Pour $n=4$: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}$, donc $d_1 = \frac{25L}{24} > L$: le bord gauche de la brique du haut, d'abscisse $\frac{L}{24} > 0$, est au-dessus du vide ! (Décalages successifs : $\frac{L}{2}, \frac{L}{4}, \frac{L}{6}, \frac{L}{8}$.)
3. Dans le bloc des termes $\frac{1}{2^{j-1}+1}, \dots, \frac{1}{2^j}$ (2^{j-1} termes), chacun est $\geq \frac{1}{2^j}$: la somme est $\geq \frac{1}{2}$ (par exemple $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{2}$). **Récurrence** : pour $p=0$, $1 \geq 1$; si $1 + \dots + \frac{1}{2^p} \geq 1 + \frac{p}{2}$, on ajoute le bloc suivant, qui est $\geq \frac{1}{2}$: $1 + \dots + \frac{1}{2^{p+1}} \geq 1 + \frac{p+1}{2}$. Avec 2^p briques, $d_1 \geq \frac{L}{2} \left(1 + \frac{p}{2}\right) > 10L$ dès que $p \geq 39$: **oui**, en théorie (environ $5,5 \times 10^{11}$ briques) ; le débord n'est pas borné.



■ Corrigé de l'exercice 29

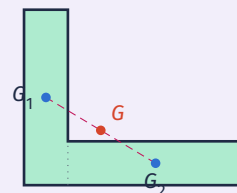
$$G = \text{Bar}\{(J, 30); (T, 40)\} = \text{Bar}\{(J, 3); (T, 4)\} : x_G = \frac{3x_J + 4x_T}{7}.$$

1. $x_G = 0,10 \in [0; 0,25]$: équilibre. 2. $x_G = \frac{0,30 + 1,80}{7} = \frac{2,10}{7} = 0,30 > 0,25$: G est en avant des orteils, **elle tombe**. Sans tomber : $\frac{0,30 + 4x_T}{7} \leq 0,25 \iff x_T \leq \frac{0,3625 \text{ m}}{1}$. 3. $x_G = \frac{-0,15 + 1,20}{7} = \frac{1,05}{7} = 0,15 \in [0; 0,25]$: elle ne tombe pas (le recul du bassin compense).
4. $G = \text{Bar}\{(T, 4); (B, 1); (J, 2)\} : x_G = \frac{4(-0,35) + 0 + 2(0,70)}{7} = 0$ et $y_G = \frac{4(1,75) + 2,10 + 2(1,75)}{7} = \frac{12,6}{7} = 1,80 : G(0; 1,80)$. Le bassin passe 10 cm au-dessus de la barre, mais le centre de gravité passe 20 cm en dessous : à élan égal, le sauteur franchit une barre plus haute.



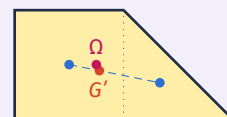
■ Corrigé de l'exercice 30

1. a) $G_1 \left(\frac{1}{2}, 2\right)$, aire 4 ; $G_2 \left(3, \frac{1}{2}\right)$, aire 4. $G = \text{Bar}\{(G_1, 4); (G_2, 4)\}$ est le milieu de $[G_1 G_2]$: $G\left(\frac{7}{4}, \frac{5}{4}\right)$. b) Un point (x, y) de $\mathcal{L}$ vérifie $x \leq 1$ (s'il est dans $\mathcal{R}_1$) ou $y \leq 1$ (s'il est dans $\mathcal{R}_2$) ; or $\frac{7}{4} > 1$ et $\frac{5}{4} > 1$: G n'est pas sur la plaque, il est dans le « coin vide ».
- c) $[0, 5] \times [0, 1]$: centre $\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$, aire 5 ; $[0, 1] \times [1, 4]$: centre $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$, aire 3 ; $G\left(\frac{25/2 + 3/2}{8}, \frac{5/2 + 15/2}{8}\right) = \left(\frac{7}{4}, \frac{5}{4}\right)$: même point ✓.
- d) $\mathcal{R}_1 = [0, 1] \times [0, a]$: centre $\left(\frac{1}{2}, \frac{a}{2}\right)$, aire a ; $\mathcal{R}_2 = [1, a] \times [0, 1]$: centre $\left(\frac{1+a}{2}, \frac{1}{2}\right)$, aire $a-1$; somme $2a-1$. $x_G = \frac{\frac{a}{2} + \frac{(a-1)(a+1)}{2}}{2a-1} = \frac{a^2 + a - 1}{2(2a-1)}$ et $y_G = \frac{\frac{a^2}{2} + \frac{a-1}{2}}{2a-1}$ a la même valeur : $G_a(g, g)$. Si $g \leq 1$, $G_a \in \mathcal{R}_1$; si $g > 1$, G_a n'est ni dans $\mathcal{R}_1$ ($x > 1$) ni dans $\mathcal{R}_2$ ($y > 1$). Comme $2a-1 > 0$: $g > 1 \iff a^2 + a - 1 > 4a - 2 \iff a^2 - 3a + 1 > 0 \iff a > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ (l'autre racine, $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0,38$, est



< 1). Par exemple $a = 2 : g = \frac{5}{6}$ (sur la plaque) ; $a = 4 : g = \frac{19}{14}$ (hors de la plaque).

2. Carré : centre (2, 2), aire 16 ; triangle : centre de gravité $(\frac{16}{3}, \frac{4}{3})$, aire 8. Avec les poids 2 et 1 : $G'(\frac{4+16/3}{3}, \frac{4+4/3}{3})$, soit $G'(\frac{28}{9}, \frac{16}{9})$, alors que $\Omega(3, 2) : G' \neq \Omega$.



3. a) Les triangles ABC et ACD ont la même aire : G est le milieu de leurs centres de gravité, soit $G = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 1); (C, 2); (D, 1)\}$ (associativité). (A, 2), (C, 2) donnent (O, 4) et (B, 1), (D, 1) donnent (O, 2) : $\boxed{G = O}$, l'isobarycentre des sommets. b) Avec (AB) pour axe des abscisses, les distances à (AB) sont des ordonnées. ABD : aire $\frac{ph}{2}$, centre de gravité d'ordonnée $\frac{0+0+h}{3}$; BCD : aire $\frac{qh}{2}$, ordonnée $\frac{0+h+h}{3}$. Donc $y_G = \frac{p \cdot \frac{h}{3} + q \cdot \frac{2h}{3}}{p+q} = \frac{h(p+2q)}{3(p+q)}$, alors que l'isobarycentre a pour ordonnée $\frac{0+0+h+h}{4} = \frac{h}{2}$. Égalité $\iff 2p + 4q = 3p + 3q \iff p = q$: le trapèze est alors un parallélogramme. **Conclusion** : en général, le centre de gravité d'une plaque quadrilatère **n'est pas** l'isobarycentre de ses sommets. Contrôle avec 2. : $p = 8, q = 4, h = 4$ donne $\frac{4 \times 16}{36} = \frac{16}{9}$ ✓.

29

Corrigés : deux points

■ Corrigé de l'exercice 31

1. Méthode : on écrit l'égalité sous la forme $\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} = \vec{0}$, on vérifie que $\alpha + \beta \neq 0$, puis $\vec{AM} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \vec{AB}$; comme $AB = 7$, l'abscisse de M est $7 \times \frac{\beta}{\alpha + \beta}$.

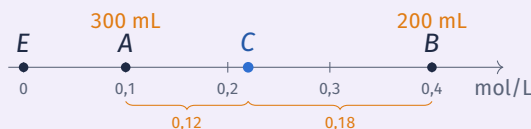
Égalité	Forme $\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} = \vec{0}$	Barycentre	$\vec{AM}$	Point
(a)	$2\vec{MA} - 9\vec{MB} = \vec{0}$ (somme -7)	$\text{Bar}\{(A, 2); (B, -9)\}$	$\frac{-9}{-7} \vec{AB} = \frac{9}{7} \vec{AB}$	abscisse 9 : Q
(b)	$\vec{MA} + 6\vec{MB} = \vec{0}$ (somme 7)	$\text{Bar}\{(A, 1); (B, 6)\}$	$\frac{6}{7} \vec{AB}$	abscisse 6 : S
(c)	$9\vec{MA} - 2\vec{MB} = \vec{0}$ (somme 7)	$\text{Bar}\{(A, 9); (B, -2)\}$	$-\frac{2}{7} \vec{AB}$	abscisse -2 : R
(d)	$4\vec{MA} + 3\vec{MB} = \vec{0}$ (somme 7)	$\text{Bar}\{(A, 4); (B, 3)\}$	$\frac{3}{7} \vec{AB}$	abscisse 3 : P

2. Pour P et S, les coefficients sont de même signe : $\boxed{P, S \in [AB]}$. Pour Q et R, ils sont de signes contraires : ces points sont hors de [AB], du côté du coefficient le plus grand en valeur absolue (Q au-delà de B car $|-9| > 2$; R au-delà de A car $9 > |-2|$). Pour tout point V : $2\vec{VA} - 2\vec{VB} = 2(\vec{VA} + \vec{BV}) = 2\vec{BA} \neq \vec{0}$ car $A \neq B$: **aucun point** V ne convient (somme des coefficients nulle).
3. Par homogénéité : $(-8, -6) = -2 \times (4, 3)$ donne $\boxed{P}$; $(\frac{9}{10}, -\frac{1}{5}) \times 10 = (9, -2)$ donne $\boxed{R}$; $(-\frac{1}{3}, -2) \times (-3) = (1, 6)$ donne $\boxed{S}$.
4. La somme $4 + 3 = 7$ n'est pas nulle : $\boxed{4\vec{MA} + 3\vec{MB} = 7\vec{MP}}$. Donc $4\vec{NA} + 3\vec{NB} = 5\vec{AB} \iff 7\vec{NP} = 5\vec{AB} \iff \vec{NP} = \frac{5}{7}\vec{AB}$: $\vec{NP}$ a pour abscisse 5, donc N a pour abscisse $3 - 5 = -2$: $\boxed{N = R}$. Contrôle : $4 \times 2 + 3 \times 9 = 35 = 5 \times 7$ ✓.

■ Corrigé de l'exercice 32

1. En multipliant la formule par $V_A + V_B$: $(V_A + V_B)c = V_A c_A + V_B c_B$, soit $V_A(c_A - c) + V_B(c_B - c) = 0$. Sur l'axe, $\vec{CA}$ et $\vec{CB}$ ont pour abscisses $c_A - c$ et $c_B - c$: donc $V_A \vec{CA} + V_B \vec{CB} = \vec{0}$, avec $V_A + V_B > 0$, c'est-à-dire $C = \text{Bar}\{(A, V_A); (B, V_B)\}$. Ainsi $\vec{AC} = \frac{V_B}{V_A + V_B} \vec{AB}$, et les coefficients étant positifs, $C \in [AB]$: la concentration du mélange est toujours comprise entre c_A et c_B .

2. $c = \frac{300 \times 0,10 + 200 \times 0,40}{500} = \frac{110}{500} = 0,22 \text{ mol/L}$. $AC = 0,12$ et $AB = 0,30$: $0,12 = \frac{2}{5} \times 0,30$, et $\frac{2}{5} = \frac{200}{500}$ ✓.
Lever : $300 \times 0,12 = 36$ et $200 \times 0,18 = 36$ ✓.



3. Pour $c = 0,30$: $\frac{AC}{AB} = \frac{0,20}{0,30} = \frac{2}{3} = \frac{V_B}{600}$, d'où $V_B = 400 \text{ mL}$ et $V_A = 200 \text{ mL}$. Pour $c = 0,16$: $\frac{0,06}{0,30} = \frac{1}{5}$, d'où $V_B = 120 \text{ mL}$ et $V_A = 480 \text{ mL}$.
4. **Non** : $C \in [AB]$ impose $0,10 \leq c \leq 0,40$. Avec l'eau : $C = \text{Bar}\{(E, V_E); (A, V_A)\}$ et $c = \frac{0,10 V_A}{V_E + V_A} = 0,05 \iff V_E = V_A$: C est le milieu de $[EA]$; on mélange **des volumes égaux** d'eau et de S_A (dilution par 2).

■ Corrigé de l'exercice 33

1. $\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \vec{AB}$ et $\vec{AG'} = \frac{\beta'}{\alpha' + \beta'} \vec{AB}$, avec $\vec{AB} \neq \vec{0}$. Donc

$$G = G' \iff \frac{\beta}{\alpha + \beta} = \frac{\beta'}{\alpha' + \beta'} \iff \beta\alpha' + \beta\beta' = \beta'\alpha + \beta'\beta \iff \boxed{\alpha\beta' = \alpha'\beta}.$$

C'est la condition de colinéarité des couples (α, β) et (α', β') : les coefficients sont proportionnels (réciproque de l'homogénéité).

2. Il faut $3m + 1 \neq 0$. Par 1 : $4(m + 1) = 3 \times 2m \iff 4m + 4 = 6m \iff \boxed{m = 2}$; on retrouve bien $(3, 4)$, de somme $7 \neq 0$.
3. Il faudrait $2m - 3 \neq 0$, $m + 2 \neq 0$ et $m \times m = 2(m - 3)$, soit $m^2 - 2m + 6 = 0$. Or $\Delta = 4 - 24 = -20 < 0$: cette équation n'a pas de solution réelle, donc **aucun réel** m ne convient.
4. Pour $m \notin \{-8, -2\}$: $m \times m = 2 \times 8 \iff m^2 = 16 \iff \boxed{m = 4 \text{ ou } m = -4}$.

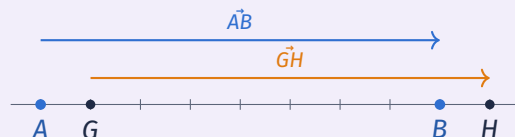
Si $m = 4$: $\text{Bar}\{(A, 4); (B, 8)\} = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$ et $\vec{AG} = \frac{2}{3} \vec{AB}$: $AG = 2 \text{ cm}$, $G \in [AB]$.

Si $m = -4$: $\text{Bar}\{(A, -4); (B, 8)\} = \text{Bar}\{(A, 1); (B, -2)\}$ et $\vec{AG} = \frac{8}{4} \vec{AB} = 2 \vec{AB}$: $AG = 6 \text{ cm}$, et B est le milieu de $[AG]$.

■ Corrigé de l'exercice 34

1. $\vec{AG} = \frac{1}{8} \vec{AB}$ et $\vec{AH} = \frac{9}{-1+9} \vec{AB} = \frac{9}{8} \vec{AB}$. Par Chasles, $\vec{GH} = \vec{AH} - \vec{AG} = \frac{9}{8} \vec{AB} - \frac{1}{8} \vec{AB} = \boxed{\vec{AB}}$.
2. $\vec{GA} = -\frac{1}{8} \vec{AB} = \boxed{-\frac{1}{8} \vec{GH}}$ et $\vec{GB} = \vec{GA} + \vec{AB} = -\frac{1}{8} \vec{GH} + \vec{GH} = \boxed{\frac{7}{8} \vec{GH}}$. On cherche $A = \text{Bar}\{(G, x); (H, y)\}$ avec $\frac{y}{x+y} = -\frac{1}{8}$, soit $x = -9y$: $A = \text{Bar}\{(G, 9); (H, -1)\}$. De même $\frac{y}{x+y} = \frac{7}{8}$ donne $y = 7x$: $B = \text{Bar}\{(G, 1); (H, 7)\}$. Contrôle : $9\vec{AG} - \vec{AH} = \frac{9}{8} \vec{AB} - \frac{9}{8} \vec{AB} = \vec{0}$ ✓.

3. A est sur (GH), du côté opposé à H, avec $GA = 1$ cm ; B est entre G et H, avec $GB = 7$ cm. Ordre : A, G, B, H, avec $AG = 1$, $GB = 7$, $BH = 1$ (en cm), et bien $AB = 8 = GH$.

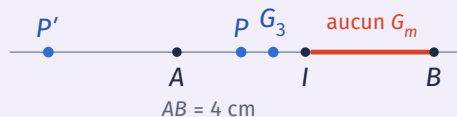


4. $-\alpha \vec{BA} + (\alpha + \beta) \vec{BG} = -\alpha (\vec{BG} + \vec{GA}) + (\alpha + \beta) \vec{BG} = \beta \vec{BG} - \alpha \vec{GA} = -(\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB}) = \vec{0}$, et la somme $-\alpha + (\alpha + \beta) = \beta$ n'est pas nulle : $B = \text{Bar}\{(A, -\alpha); (G, \alpha + \beta)\}$.

Application : avec $\alpha = 5$, $\beta = -3$: $B = \text{Bar}\{(A, -5); (G, 2)\}$ (somme -3), donc $\vec{AB} = \frac{2}{-3} \vec{AG} = -\frac{2}{3} \vec{AG}$: B est à 4 cm de A, du côté opposé à G. Contrôle : $\vec{AG} = -\frac{3}{2} \vec{AB} = -\frac{3}{2} \vec{AB}$ ✓.

■ Corrigé de l'exercice 35

- La somme des coefficients est $m^2 + 2m + 1 = (m + 1)^2$: G_m existe si et seulement si $m \neq -1$, et alors $\vec{AG}_m = \frac{2m}{(m+1)^2} \vec{AB} = t(m) \vec{AB}$.
- $t(0) = 0$: $G_0 = A$; $t(1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$: $G_1 = I$; $t(3) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$: $AG_3 = 1,5$ cm ; $t(-3) = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$: G_{-3} est à 6 cm de A, du côté opposé à B. $t(\frac{1}{3}) = \frac{2/3}{16/9} = \frac{3}{8} = t(3)$: $G_{1/3} = G_3$. En général, pour $m \notin \{-1, 0\}$, les coefficients de $G_{1/m}$ sont $(\frac{1}{m^2} + 1, \frac{2}{m}) = \frac{1}{m^2} (m^2 + 1, 2m)$: par homogénéité, $G_{1/m} = G_m$.
- $\frac{1}{2} - \frac{2m}{(m+1)^2} = \frac{(m+1)^2 - 4m}{2(m+1)^2} = \frac{(m-1)^2}{2(m+1)^2} \geq 0$: donc $t(m) \leq \frac{1}{2}$, avec égalité si et seulement si $m = 1$. Or un point M de]IB] vérifie $\vec{AM} = s \vec{AB}$ avec $\frac{1}{2} < s \leq 1$: **aucun G_m n'est sur]IB]**.
- Pour $m \neq -1$: $t(m) = \frac{1}{4} \iff 8m = (m+1)^2 \iff m^2 - 6m + 1 = 0$ ($\Delta = 32$) : $m = 3 \pm 2\sqrt{2}$; $AG_m = 1$ cm (point P). $t(m) = -\frac{1}{2} \iff -4m = (m+1)^2 \iff m^2 + 6m + 1 = 0$: $m = -3 \pm 2\sqrt{2}$; $\vec{AG}_m = -\frac{1}{2} \vec{AB}$: c'est le symétrique P' de I par rapport à A. Dans les deux cas, le produit des racines vaut 1 : elles sont inverses l'une de l'autre, ce qui confirme $G_{1/m} = G_m$. Enfin $G_m = B$ exigerait $t(m) = 1 > \frac{1}{2}$: **impossible** (question 3).
- $G_m \in [AB] \iff 0 \leq t(m) \leq 1 \iff t(m) \geq 0$ (car $t(m) \leq \frac{1}{2}$) $\iff 2m \geq 0$: $m \geq 0$, et alors $G_m \in [AI]$.

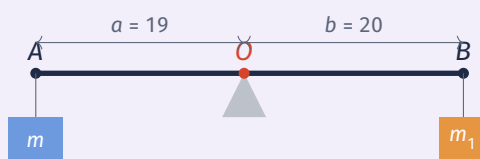


■ Corrigé de l'exercice 36

1. ($\Rightarrow$) Si $O = \text{Bar}\{(A, m_A); (B, m_B)\}$, alors $m_A \vec{OA} = -m_B \vec{OB}$; en prenant les normes, $m_A a = m_B b$. ($\Leftarrow$) $O \in]AB[$, donc $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ sont de sens contraires : $\vec{OB} = -\frac{b}{a} \vec{OA}$, et $m_A \vec{OA} + m_B \vec{OB} = \frac{m_A a - m_B b}{a} \vec{OA} = \vec{0}$; comme $m_A + m_B > 0$, $O = \text{Bar}\{(A, m_A); (B, m_B)\}$. D'où l'équivalence.

2. Première pesée : $O = \text{Bar}\{(A, m); (B, m_1)\}$, donc $ma = m_1 b$. Seconde pesée : $O = \text{Bar}\{(A, m_2); (B, m)\}$, donc $m_2 a = mb$. En multipliant membre à membre : $m^2 ab = m_1 m_2 ab$, d'où $m^2 = m_1 m_2$, soit $m = \sqrt{m_1 m_2}$; et la première égalité donne $\frac{a}{b} = \frac{m_1}{m}$.

3. $m = \sqrt{361 \times 400} = 19 \times 20 = 380 \text{ g}$. Puis $\frac{a}{b} = \frac{361}{380} = \frac{19}{20}$ et $a + b = 39$: $a = 19 \text{ cm}$, $b = 20 \text{ cm}$, c'est-à-dire $O = \text{Bar}\{(A, 20); (B, 19)\}$. Contrôle : $400 \times 19 = 7600 = 380 \times 20$ ✓.



4. $\frac{m_1 + m_2}{2} - \sqrt{m_1 m_2} = \frac{(\sqrt{m_1})^2 - 2\sqrt{m_1 m_2} + (\sqrt{m_2})^2}{2} = \frac{1}{2} (\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2})^2 \geq 0$: la moyenne dépasse toujours

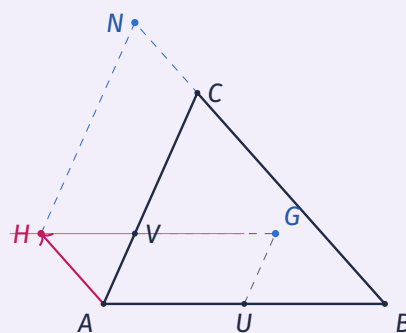
la vraie masse, sauf si $m_1 = m_2$, c'est-à-dire si $a = b$ (car $\frac{a}{b} = \frac{m_1}{m} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$). Ici l'erreur est $380,5 - 380 = 0,5 \text{ g}$. Marchandise x en B et 400 g en A : $400a = xb$, donc $x = 400 \times \frac{19}{20} = 380 \text{ g}$: le client reçoit 20 g de moins que prévu.

30 Corrigés : trois points

■ Corrigé de l'exercice 37

1. Les sommes $1+3+2=6$ et $3-1+1=3$ ne sont pas nulles : G et H existent. Pour tout M , $\vec{MA} + 3\vec{MB} + 2\vec{MC} = 6\vec{MG}$; en $M = A$: $3\vec{AB} + 2\vec{AC} = 6\vec{AG}$, d'où $\vec{AG} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$. De même $-\vec{AB} + \vec{AC} = 3\vec{AH}$, d'où $\vec{AH} = -\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} = \frac{1}{3}(\vec{BA} + \vec{AC}) = \frac{1}{3}\vec{BC}$.

Construction. On place U , milieu de $[AB]$, et $V \in [AC]$ tel que $AV = \frac{1}{3}AC$: G est le quatrième sommet du parallélogramme $AUGV$. Puis H est sur la parallèle à (BC) passant par A , avec $\vec{AH} = \frac{1}{3}\vec{BC}$.

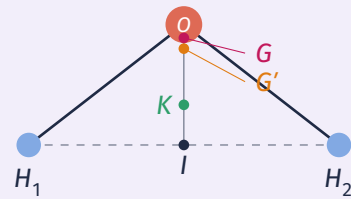


2. $\vec{GH} = \vec{AH} - \vec{AG} = \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)\vec{AB} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right)\vec{AC} = -\frac{5}{6}\vec{AB}$: $\vec{GH}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires, donc $(GH) \parallel (AB)$ (et $(GH) \neq (AB)$ car $G \notin (AB)$).

3. Les sommes valent 6 et 3 : $\vec{MA} + 3\vec{MB} + 2\vec{MC} = 6\vec{MG}$ et $3\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MH}$. Donc $3\vec{NA} - \vec{NB} + \vec{NC} = 3\vec{CA} \Leftrightarrow 3\vec{NH} = 3\vec{CA} \Leftrightarrow \vec{HN} = \vec{AC}$: N est l'image de H par la translation de vecteur $\vec{AC}$ ($ACNH$ est un parallélogramme).

■ Corrigé de l'exercice 38

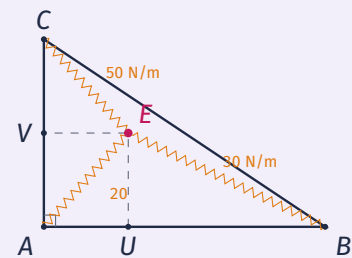
- La somme est 18. Pour tout M , $16\vec{MO} + M\vec{H}_1 + M\vec{H}_2 = 18\vec{MG}$; en $M = O$: $\vec{OG} = \frac{1}{18}(\vec{OH}_1 + \vec{OH}_2)$. Comme I est le milieu de $[H_1H_2]$, $\vec{OH}_1 + \vec{OH}_2 = 2\vec{OI}$, donc $\vec{OG} = \frac{1}{9}\vec{OI}$ et $OG = \frac{59}{9} \approx 6,6 \text{ pm}$: G est sur $[OI]$, tout près de O .



- $OK = \frac{2}{3} \times 59 \approx 39,3 \text{ pm}$, six fois plus loin de O que G . Le centre de gravité K correspond à trois masses égales ; or l'oxygène est 16 fois plus lourd que chaque hydrogène et « attire » le centre d'inertie.
- $G' = \text{Bar}\{(O, 16); (D_1, 2); (D_2, 2)\}$ (somme 20) : en réduisant en O , $\vec{OG}' = \frac{20\vec{D}_1 + 20\vec{D}_2}{20} = \frac{4\vec{OI}}{20} = \frac{1}{5}\vec{OI}$, soit $OG' = \frac{59}{5} = 11,8 \text{ pm}$. G et G' sont sur $[OI]$ dans le même sens : $GG' = 59\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) = \frac{236}{45} \approx 5,2 \text{ pm}$.

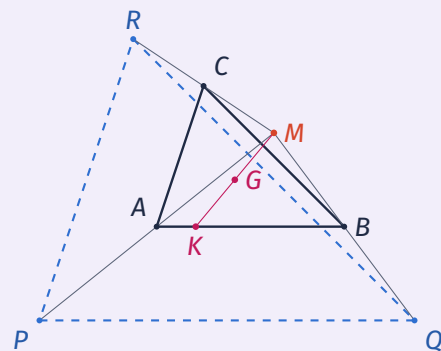
■ Corrigé de l'exercice 39

- $\vec{R} = 20\vec{MA} + 30\vec{MB} + 50\vec{MC}$, de somme de coefficients $100 \neq 0$. Par homogénéité, $\text{Bar}\{(A, 20); (B, 30); (C, 50)\} = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 3); (C, 5)\} = E$, et la réduction donne $\vec{R} = 100\vec{ME}$. L'anneau est en équilibre si et seulement si $\vec{R} = \vec{0}$, c'est-à-dire $M = E$: **une seule position d'équilibre, E** . Et comme $\vec{R} = 100\vec{ME}$ pour toute position M , c'est la force d'un **seul ressort de raideur 100 N/m fixé en E** .
- En $M = A$: $3\vec{AB} + 5\vec{AC} = 10\vec{AE}$, d'où $\vec{AE} = \frac{3}{10}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$. On place $U \in [AB]$ avec $AU = \frac{3}{10}AB$, V milieu de $[AC]$, et E quatrième sommet du parallélogramme $AUEV$.
- $\vec{AU}$ (longueur 18 cm, le long de (AB)) et $\vec{AV}$ (longueur 20 cm, le long de (AC)) sont orthogonaux ; dans le triangle AUE rectangle en U , Pythagore donne $AE = \sqrt{18^2 + 20^2} = \sqrt{724} = 2\sqrt{181} \approx 26,9 \text{ cm}$. En A , les ressorts exercent $\vec{R} = 100\vec{AE}$, de valeur $100 \times 0,269 \approx 26,9 \text{ N}$. Pour maintenir l'anneau en A , il faut exercer la force opposée $100\vec{EA}$: **direction (AE) , sens de E vers A , valeur $\approx 26,9 \text{ N}$** .
- Avec $k > 0$: $\vec{AE}_k = \frac{30\vec{AB} + k\vec{AC}}{50+k}$, et la médiane est dirigée par $\vec{AA}' = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$. $E_k \in (AA')$ si et seulement si ces vecteurs sont colinéaires ; dans la base $(\vec{AB}, \vec{AC})$, le déterminant $30 \times 1 - k \times 1$ doit être nul : $k = 30 \text{ N/m}$ (les coefficients de B et C sont alors égaux).



■ Corrigé de l'exercice 40

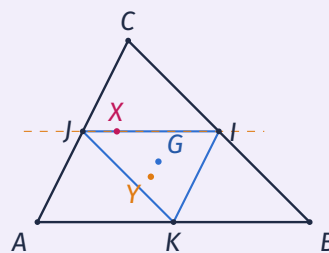
1. A est le milieu de $[MP]$, donc $\vec{AP} = -\vec{AM}$. Or $\text{Bar}\{(A, 2); (M, -1)\}$ (somme 1) est le point X tel que $\vec{AX} = \frac{-1}{1} \vec{AM}$: c'est P. De même $Q = \text{Bar}\{(B, 2); (M, -1)\}$ et $R = \text{Bar}\{(C, 2); (M, -1)\}$. Pour tout N : $\vec{NP} = 2\vec{NA} - \vec{NM}$ et $\vec{NQ} = 2\vec{NB} - \vec{NM}$, donc $\vec{PQ} = \vec{NQ} - \vec{NP} = 2\vec{AB}$; de même $\vec{PR} = 2\vec{AC}$. Ces vecteurs ne sont pas colinéaires : P, Q, R ne sont pas alignés.



2. En ajoutant : $\vec{NP} + \vec{NQ} + \vec{NR} = 2(\vec{NA} + \vec{NB} + \vec{NC}) - 3\vec{NM} = 6\vec{NG} - 3\vec{NM}$. Le centre de gravité K de PQR vérifie $\vec{NP} + \vec{NQ} + \vec{NR} = 3\vec{NK}$, donc $\vec{NK} = 2\vec{NG} - \vec{NM}$ pour tout N ; en $N = G$: $\vec{GK} = -\vec{GM}$. Ainsi G est le milieu de $[MK]$: K est le symétrique de M par rapport à G. Si $M = G$, alors $K = G$: PQR et ABC ont le même centre de gravité.
3. $A_1 = \text{Bar}\{(M, 2); (A, -1)\}$, etc. ; donc $\vec{NA}_1 + \vec{NB}_1 + \vec{NC}_1 = 6\vec{NM} - 3\vec{NG} = 3\vec{NG}_1$, soit $\vec{NG}_1 = 2\vec{NM} - \vec{NG}$; en $N = M$: $\vec{MG}_1 = -\vec{MG}$: G_1 est le symétrique de G par rapport à M. Si $M \neq G$: $\vec{GK} = -\vec{GM}$ et $\vec{GG}_1 = \vec{GM} + \vec{MG}_1 = 2\vec{GM}$: ces vecteurs sont colinéaires à $\vec{GM} \neq \vec{0}$, donc $K, G_1 \in (GM)$, et $\vec{KG}_1 = \vec{KG} + \vec{GG}_1 = \vec{GM} + 2\vec{GM} = 3\vec{GM}$.

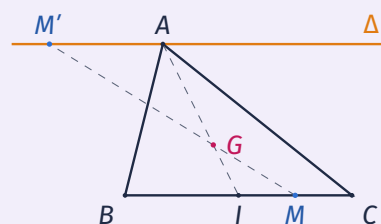
■ Corrigé de l'exercice 41

1. Les milieux donnent $\vec{MI} = \frac{1}{2}(\vec{MB} + \vec{MC})$, $\vec{MJ} = \frac{1}{2}(\vec{MC} + \vec{MA})$, $\vec{MK} = \frac{1}{2}(\vec{MA} + \vec{MB})$; en regroupant les termes en $\vec{MA}, \vec{MB}, \vec{MC}$, on obtient l'égalité demandée. Posons $\sigma = \alpha + \beta + \gamma \neq 0$: le membre de gauche vaut $\sigma \vec{MY}$, où $Y = \text{Bar}\{(I, \alpha); (J, \beta); (K, \gamma)\}$; les coefficients de droite ont pour somme $2\sigma \neq 0$, donc le membre de droite vaut $\frac{1}{2} \times 2\sigma \vec{MX} = \sigma \vec{MX}$, où $X = \text{Bar}\{(A, \beta + \gamma); (B, \gamma + \alpha); (C, \alpha + \beta)\}$. Ainsi $\vec{MX} = \vec{MY}$ pour tout M : $X = Y$.
2. a) Avec $\alpha = \beta = \gamma = 1$: $\text{Bar}\{(I, 1); (J, 1); (K, 1)\} = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 2); (C, 2)\}$: même centre de gravité G.
 b) $\text{Bar}\{(I, 1); (J, 2); (K, 3)\} = \text{Bar}\{(A, 5); (B, 4); (C, 3)\}$ (point Y).
 c) Avec $(-1, 1, 1)$: les coefficients de droite sont $(2, 0, 0)$, donc $A = \text{Bar}\{(I, -1); (J, 1); (K, 1)\}$: pour tout M, $-\vec{MI} + \vec{MJ} + \vec{MK} = \vec{MA}$; en $M = I$: $\vec{IJ} + \vec{IK} = \vec{IA}$, soit $\vec{IJ} = \vec{KA}$: IJAK est un parallélogramme.
3. a) Par la question 1 avec $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 3, 0)$: $(\beta + \gamma, \gamma + \alpha, \alpha + \beta) = (3, 1, 4)$. Un point de coefficient nul peut être retiré : $\text{Bar}\{(A, 3); (B, 1); (C, 4)\} = \text{Bar}\{(I, 1); (J, 3)\}$, point de (IJ) tel que $\vec{IX} = \frac{3}{4}\vec{IJ}$.
 b) Par la question 1 avec $(\alpha, \beta, \gamma) = (b, a, 0)$, de somme $a + b \neq 0$: $(\beta + \gamma, \gamma + \alpha, \alpha + \beta) = (a, b, a + b) = (a, b, c)$. Donc $\text{Bar}\{(A, a); (B, b); (C, c)\} = \text{Bar}\{(I, b); (J, a)\}$: il est sur (IJ) .



■ Corrigé de l'exercice 42

1. $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$, donc $\vec{MM}' = 3\vec{MG}$ et $\vec{GM}' = \vec{GM} + \vec{MM}' = \vec{GM} - 3\vec{GM} = -2\vec{GM}$. Alors $M' = M \iff -2\vec{GM} = \vec{GM} \iff \vec{GM} = \vec{0} \iff M = G$. Si $M \neq G$, $\vec{GM}'$ et $\vec{GM}$ sont colinéaires : M, G, M' sont alignés, G entre M et M' , avec $GM' = 2GM$.
2. $2\vec{GM} + \vec{GM}' = \vec{0}$ et $2 + 1 \neq 0$: $G = \text{Bar}\{(M, 2); (M', 1)\}$. Le système $\{(A, 1); (B, 1); (C, 1); (M, -2)\}$ a pour somme 1 ; son barycentre X vérifie, en réduisant en M : $\vec{MX} = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} - 2\vec{MM} = \vec{MM}'$, donc $X = M'$.
3. $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AI}$ donne $\vec{GI} = \frac{1}{3}\vec{AI} = -\frac{1}{2}\vec{GA}$, d'où $\vec{GI}' = -2\vec{GI} = \vec{GA}$: $I' = A$. De même, les milieux de $[CA]$ et de $[AB]$ ont pour images B et C .
4. a) $\vec{AM}' = \vec{AM} + \vec{MM}' = \vec{AM} + \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{MB} + \vec{MC}$. Si $M \in (BC)$, $\vec{MB}$ et $\vec{MC}$ sont colinéaires à $\vec{BC}$, donc $\vec{AM}'$ aussi : $M' \in \Delta$.
 b) Soit $N \in \Delta$, $\vec{AN} = \lambda\vec{BC}$, et M le point tel que $\vec{GM} = -\frac{1}{2}\vec{GN}$: alors $\vec{GM}' = -2\vec{GM} = \vec{GN}$, donc $M' = N$. De plus $\vec{GM} = -\frac{1}{2}(\vec{GA} + \vec{AN}) = \vec{GI} - \frac{\lambda}{2}\vec{BC}$, donc $\vec{IM} = -\frac{\lambda}{2}\vec{BC}$ et $M \in (BC)$.
 c) Par double inclusion : l'ensemble des images des points de (BC) est la droite Δ .

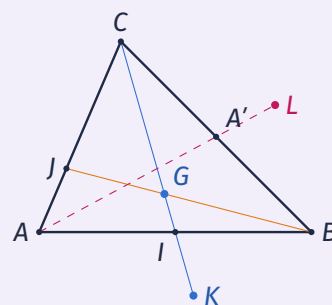


31

Corrigés : associativité

■ Corrigé de l'exercice 43

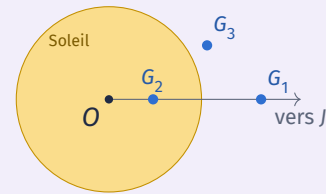
1. a) $(A, 2)$ et $(B, 2)$ ont pour barycentre partiel le milieu I (somme 4) : par associativité, $G = \text{Bar}\{(I, 4); (C, 1)\}$ et $\vec{IG} = \frac{1}{5}\vec{IC}$. b) $J = \text{Bar}\{(A, 2); (C, 1)\}$ (somme 3, $\vec{AJ} = \frac{1}{3}\vec{AC}$) ; en regroupant $(A, 2)$ et $(C, 1)$: $G = \text{Bar}\{(J, 3); (B, 2)\}$, d'où $\vec{JG} = \frac{2}{5}\vec{JB}$. c) G est sur (CI) et sur (BJ) ; ces droites sont distinctes ($B \notin (CI)$, car (CI) coupe (AB) seulement en $I \neq B$) : (CI) et (BJ) se coupent en G .
2. $K = \text{Bar}\{(I, 4); (C, -1)\}$ (somme 3) : $\vec{IK} = -\frac{1}{3}\vec{IC}$. En regroupant $(B, 2)$ et $(C, 2)$ en $(A', 4)$: $L = \text{Bar}\{(A, -1); (A', 4)\}$ (somme 3), d'où $\vec{AL} = \frac{4}{3}\vec{AA'}$. Enfin $\vec{IG}$ et $\vec{IK}$ sont colinéaires à $\vec{IC}$: G, K, I, C sont alignés (sur la médiane issue de C), et $\vec{GK} = \vec{IK} - \vec{IG} = \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)\vec{IC} = -\frac{8}{15}\vec{IC}$.



■ Corrigé de l'exercice 44

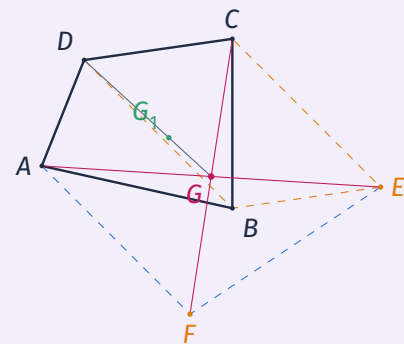
1. $K = \text{Bar}\{(J, 10); (S, 3)\}$ existe (somme 13). Par associativité, $G = \text{Bar}\{(O, 10\,500); (K, 13)\}$, donc $\vec{OG} = \frac{13}{10\,513} \vec{OK}$.
En réduisant en O : $10\,513 \vec{OG} = 10 \vec{OJ} + 3 \vec{OS}$ (et $13 \vec{OK} = 10 \vec{OJ} + 3 \vec{OS}$).
2. Sur l'axe d'origine O dirigé vers J : $OK = \frac{10 \times 780 + 3 \times 1\,430}{13} = \frac{12\,090}{13} = 930$ (entre J et S), puis $OG = \frac{12\,090}{10\,513} \approx 1,15$ million de km $> 0,7$: **G est hors du Soleil.**
3. De part et d'autre : $\|10 \vec{OJ} + 3 \vec{OS}\| = 7\,800 - 4\,290 = 3\,510$, d'où $OG = \frac{3\,510}{10\,513} \approx 0,33 < 0,7$: **G est dans le Soleil.** À angle droit, Pythagore donne $\|10 \vec{OJ} + 3 \vec{OS}\| = \sqrt{7\,800^2 + 4\,290^2} \approx 8\,902$, d'où $OG \approx 0,85 > 0,7$: hors du Soleil.

Figure : G_1, G_2, G_3 , positions de G dans les trois cas ; le disque est le Soleil.



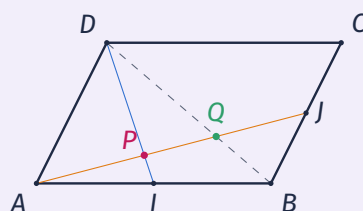
■ Corrigé de l'exercice 45

1. La somme vaut $1 + 1 + 1 - 1 = 2 \neq 0$: G existe. **Non** : $(B, 1)$ et $(D, -1)$ ont une somme nulle, ils n'ont pas de barycentre partiel.
2. E existe (somme 1); en réduisant en D : $\vec{DE} = \vec{DB} + \vec{DC}$: **$DBEC$ est un parallélogramme.** En regroupant $(B, 1), (C, 1), (D, -1)$ en $(E, 1)$: $G = \text{Bar}\{(A, 1); (E, 1)\}$, **milieu de $[AE]$.**
3. De même $\vec{DF} = \vec{DA} + \vec{DB}$ et $G = \text{Bar}\{(F, 1); (C, 1)\}$: **milieu de $[CF]$.** Les diagonales $[AE]$ et $[CF]$ de $ACEF$ ont le même milieu : **$ACEF$ est un parallélogramme.**
4. $(A, 1), (B, 1), (C, 1)$ se regroupent en $(G_1, 3)$: $G = \text{Bar}\{(G_1, 3); (D, -1)\}$ (somme 2), d'où $\vec{DG} = \frac{3}{2} \vec{DG}_1$. Les trois constructions $([AE], [CF])$ et la droite (DG_1) donnent le même point G (figure : $A(0; 0), B(4; 5; -1), C(4; 5; 3), D(1; 2; 5), G(4; -0,25)$).



■ Corrigé de l'exercice 46

1. ABCD est un parallélogramme : $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$. Le système $\{(A, -1); (B, 1); (D, 1)\}$ a pour somme 1 ; en réduisant en A, son barycentre X vérifie $\vec{AX} = \vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$: $X = C$. Ainsi $\vec{MC} = -\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MD}$ pour tout M, et $2\vec{MJ} = \vec{MB} + \vec{MC} = -\vec{MA} + 2\vec{MB} + \vec{MD}$: $J = \text{Bar}\{(A, -1); (B, 2); (D, 1)\}$.



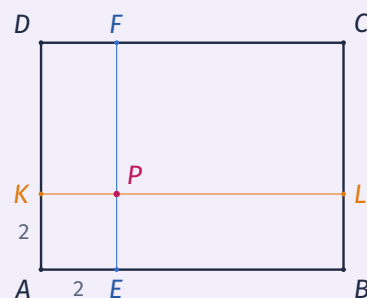
2. a) $(A, 2), (B, 2)$ se regroupent en $(I, 4)$: $P = \text{Bar}\{(I, 4); (D, 1)\}$, d'où $\vec{DP} = \frac{4}{5}\vec{DI}$. b) Le système de P s'obtient en ajoutant $(A, 3)$ au système $\{(A, -1); (B, 2); (D, 1)\}$, de barycentre J et de somme 2 : $P = \text{Bar}\{(A, 3); (J, 2)\}$, d'où $\vec{AP} = \frac{2}{5}\vec{AJ}$. c) P est sur (DI) et sur (AJ), qui sont distinctes ($A \notin (DI)$ car (DI) coupe (AB) en $I \neq A$) : $P = (DI) \cap (AJ)$.
3. De même, $\{(A, 1); (J, 2)\}$ équivaut à $\{(A, 1); (A, -1); (B, 2); (D, 1)\}$, c'est-à-dire $\{(B, 2); (D, 1)\}$: ce point est sur (AJ) et sur (BD), c'est $Q = \text{Bar}\{(B, 2); (D, 1)\}$. Donc $\vec{AQ} = \frac{2}{3}\vec{AJ}$ et $\vec{BQ} = \frac{1}{3}\vec{BD}$. Or (AJ) est la médiane issue de A du triangle ABC, et Q la partage dans le rapport $\frac{2}{3}$ depuis le sommet : Q est le centre de gravité de ABC.

■ Corrigé de l'exercice 47

1. Dans chaque répartition, les deux sommes de paires ont pour total $s \neq 0$: elles ne peuvent pas être nulles toutes les deux.
2. La première répartition n'est pas utilisable : $a + b = 0$ ou $c + d = 0$; quitte à échanger les rôles de $\{A, B\}$ et $\{C, D\}$, $a + b = 0$. La deuxième n'est pas utilisable : $a + c = 0$ ou $b + d = 0$. **Cas a)** $a + c = 0$: $b = c = -a$, donc $b + c = -2a \neq 0$ ($a \neq 0$) ; la troisième répartition n'étant pas utilisable, $a + d = 0$: $b = c = d = -a$. **Cas b)** $b + d = 0$: $a = d = -b$, donc $a + d = -2b \neq 0$, et la troisième impose $b + c = 0$: $a = c = d = -b$. c) Dans les deux cas, un coefficient est l'opposé des trois autres, égaux entre eux. Réciproquement, si par exemple $b = c = d = -a$, chaque répartition contient une paire $\{A, X\}$ de somme $a - a = 0$: aucune n'est utilisable. D'où l'équivalence.
3. Avec les coefficients $(k, -k, -k, -k)$, les trois coefficients égaux ont pour somme $-3k \neq 0$: on regroupe ces trois points en leur isobarycentre affecté de $-3k$. Exemple : $(B, -1), (C, -1), (D, -1)$ donnent $(K, -3)$, et $G = \text{Bar}\{(A, 1); (K, -3)\}$ (somme -2) : $\vec{AG} = \frac{3}{2}\vec{AK}$. Ainsi G se construit toujours par barycentres partiels (deux et deux, ou trois et un).

■ Corrigé de l'exercice 48

1. $E = \text{Bar}\{(A, 3); (B, 1)\} : \vec{AE} = \frac{1}{4}\vec{AB}$, $AE = 2 \text{ cm}$; $\vec{DF} = \frac{1}{4}\vec{DC}$, $DF = 2 \text{ cm}$. Par associativité, $P = \text{Bar}\{(E, 8); (F, 4)\}$, donc $\vec{EP} = \frac{4}{12}\vec{EF} = \frac{1}{3}\vec{EF}$. Comme $\vec{AE} = \vec{DF}$, $AEFD$ est un parallélogramme et $\vec{EF} = \vec{AD}$: $EP = 2 \text{ cm}$.
2. $\vec{AK} = \frac{1}{3}\vec{AD}$ et $\vec{BL} = \frac{1}{3}\vec{BC}$ ($AK = BL = 2 \text{ cm}$); par associativité $P = \text{Bar}\{(K, 9); (L, 3)\}$, $\vec{KP} = \frac{1}{4}\vec{KL}$. P est sur (EF) , parallèle à (AD) , et sur (KL) , parallèle à (AB) : ces droites sont sécantes, $P = (EF) \cap (KL)$. Enfin $\vec{AP} = \vec{AE} + \vec{EP} = \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AD}$.
3. $a + b + c + d = (1 - y)(1 - x + x) + y(x + 1 - x) = (1 - y) + y = 1$. En réduisant en A et avec $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$: $\vec{AP}_{x,y} = b\vec{AB} + c\vec{AC} + d\vec{AD} = (b + c)\vec{AB} + (c + d)\vec{AD} = x\vec{AB} + y\vec{AD}$, car $b + c = x(1 - y) + xy = x$ et $c + d = y$. Pour $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{3}$: $(a, b, c, d) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{4})$, proportionnels à $(6, 2, 1, 3)$: $P = P_{1/4, 1/3}$. Tout point M du rectangle s'écrit $\vec{AM} = x\vec{AB} + y\vec{AD}$ avec $x, y \in [0, 1]$, donc $M = P_{x,y}$, avec $a, b, c, d \geq 0$.
4. a) Avec le centre O : $\vec{MA} + \vec{MC} = 2\vec{MO} = \vec{MB} + \vec{MD}$, d'où $\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} - \vec{MD} = \vec{0}$. b) Pour tout M : $(6 + t)\vec{MA} + (2 - t)\vec{MB} + (1 + t)\vec{MC} + (3 - t)\vec{MD} = 12\vec{MP} + t\vec{0} = 12\vec{MP}$, et la somme des coefficients vaut 12 : $P = \text{Bar}\{(A, 6 + t); (B, 2 - t); (C, 1 + t); (D, 3 - t)\}$. Pour $t = -1$: $P = \text{Bar}\{(A, 5); (B, 3); (D, 4)\}$ (pour $t = 2$: $\text{Bar}\{(A, 8); (C, 3); (D, 1)\}$). **Non** : avec quatre points du plan, une infinité de systèmes non proportionnels ont le même barycentre (avec trois points non alignés, les coefficients sont uniques à un facteur près).



32

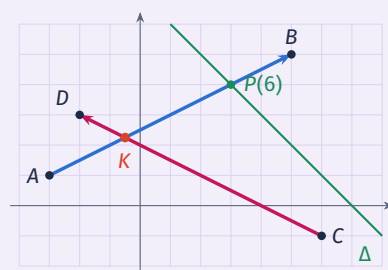
Corrigés : coordonnées

■ Corrigé de l'exercice 49

1. Les masses 100 g et 200 g sont proportionnelles à 1 et 2 : par homogénéité (on divise par 100), $G_1 = \text{Bar}\{(A, 100); (B, 200)\} = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$. Puis $x_{G_1} = \frac{-4+2 \times 5}{3} = 2$ et $y_{G_1} = \frac{-2+2 \times (-5)}{3} = -4$: $G_1(2, -4)$. Contrôle : $\vec{AG}_1(6, -2)$ et $\frac{2}{3}\vec{AB} = \frac{2}{3}(9, -3) = (6, -2)$ ✓.
2. Poids 1, 2, 5, de somme 8 : $x_G = \frac{-4+10+10}{8} = 2$, $y_G = \frac{-2-10+20}{8} = 1$: $G(2, 1)$. Par associativité, on remplace $(A, 1)$ et $(B, 2)$ par $(G_1, 3)$: $G = \text{Bar}\{(G_1, 3); (C, 5)\}$, et $\frac{3 \times 2 + 5 \times 2}{8} = 2$, $\frac{3 \times (-4) + 5 \times 4}{8} = 1$ ✓.
3. $G_2 = \text{Bar}\{(A, 1); (C, 5)\} : (\frac{-4+10}{6}, \frac{-2+20}{6})$, soit $G_2(1, 3)$. $\vec{BG}(-3, 6)$ et $\vec{BG}_2(-4, 8)$: $\det(\vec{BG}, \vec{BG}_2) = (-3) \times 8 - 6 \times (-4) = 0$: B, G, G_2 sont alignés. Sans calcul : en regroupant $(A, 1)$ et $(C, 5)$ en $(G_2, 6)$, on a $G = \text{Bar}\{(G_2, 6); (B, 2)\}$: G est un barycentre de G_2 et B , donc sur (BG_2) (avec $\vec{G_2G} = \frac{1}{4}\vec{G_2B}$).
4. Une bille de 400 g (poids 4) en D : le centre d'inertie est O si et seulement si $\vec{OA} + 2\vec{OB} + 5\vec{OC} + 4\vec{OD} = \vec{0}$. Or $\vec{OA} + 2\vec{OB} + 5\vec{OC} = 8\vec{OG}$ (réduction), donc $\vec{OD} = -2\vec{OG}$: $D(-4, -2)$, c'est-à-dire $D = A$: on pose la bille sur la première ! Contrôle : $\text{Bar}\{(A, 5); (B, 2); (C, 5)\}$ a pour coordonnées $(\frac{-20+10+10}{12}, \frac{-10-10+20}{12}) = (0, 0)$ ✓.

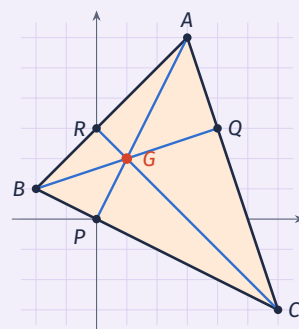
■ Corrigé de l'exercice 50

- À vitesse constante sur $[AB]$, la distance parcourue est proportionnelle au temps : $AP(t) = \frac{t}{8}AB$, dans le sens de A vers B , d'où $\vec{AP}(t) = \frac{t}{8}\vec{AB}$. D'après le cours ($\vec{AM} = k\vec{AB} \iff M = \text{Bar}\{(A, 1-k); (B, k)\}$), $P(t) = \text{Bar}\{(A, 1 - \frac{t}{8}); (B, \frac{t}{8})\} = \text{Bar}\{(A, 8-t); (B, t)\}$ (on multiplie par 8). Ainsi $P(2) = \text{Bar}\{(A, 6); (B, 2)\}$, $P(4)$ milieu de $[AB]$, $P(6) = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 6)\}$: $P(2)(-1, 2)$, $P(4)(1, 3)$, $P(6)(3, 4)$.
- $x = \frac{-3(8-t)+5t}{8} = -3 + \frac{t}{2}$ et $y = \frac{(8-t)+5t}{8} = 1 + \frac{t}{2}$; puis $(-3 + \frac{t}{2}) - 2(1 + \frac{t}{2}) + 5 = 0$ ✓. Comme A et B vérifient aussi cette équation, c'est bien celle de (AB) .
- $(-3 + \frac{t}{2}) + (1 + \frac{t}{2}) = 7 \iff \frac{3}{2}t = 9 \iff t = 6 \in [0, 8]$: le drone survole l'autoroute à $t = 6$ min, au point $(3, 4) = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 3)\}$ (car $\text{Bar}\{(A, 2); (B, 6)\} = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 3)\}$).
- De même $Q(t) = \text{Bar}\{(C, 8-t); (D, t)\}$: $Q(t) = (6-t, -1 + \frac{t}{2})$, et (CD) : $x + 2y - 4 = 0$ (C et D la vérifient). Les vecteurs directeurs $(2, 1)$ et $(-2, 1)$ ont pour déterminant $2 + 2 = 4 \neq 0$: les trajectoires se coupent. Le système $x - 2y = -5$, $x + 2y = 4$ donne $K(-\frac{1}{2}, \frac{9}{4})$. Le premier drone y passe quand $-3 + \frac{t}{2} = -\frac{1}{2}$, soit à $t = \frac{5}{2}$; le second quand $6 - t = -\frac{1}{2}$, soit à $t = \frac{13}{2}$: **pas de collision** (d'ailleurs $P(t) = Q(t)$ exigerait $1 + \frac{t}{2} = -1 + \frac{t}{2}$, impossible). On a $K = \text{Bar}\{(A, 11); (B, 5)\} = \text{Bar}\{(C, 3); (D, 13)\}$.



■ Corrigé de l'exercice 51

- $P(\frac{-6+6}{4}, \frac{3-3}{4}) = (0, 0)$, $Q(\frac{6+6}{3}, \frac{12-3}{3}) = (4, 3)$, $R(\frac{6-6}{5}, \frac{12+3}{5}) = (0, 3)$. Coefficients positifs : $P \in [BC]$, $Q \in [AC]$, $R \in [AB]$.
- (AP) passe par O et $A(3, 6)$: $y = 2x$. (BQ) : $\vec{BQ}(6, 2)$, et $M(x, y) \in (BQ) \iff \det(\vec{BM}, \vec{BQ}) = 2(x+2) - 6(y-1) = 0 \iff x - 3y + 5 = 0$. Avec $y = 2x$: $x - 6x + 5 = 0$, d'où $K(1, 2)$.
- $G(\frac{6-6+6}{6}, \frac{12+3-3}{6}) = (1, 2) = K$ ✓. Associativité : en regroupant $(B, 3)$ et $(C, 1)$, $G = \text{Bar}\{(A, 2); (P, 4)\} \in (AP)$; en regroupant $(A, 2)$ et $(C, 1)$, $G = \text{Bar}\{(Q, 3); (B, 3)\} \in (BQ)$; en regroupant $(A, 2)$ et $(B, 3)$, $G = \text{Bar}\{(R, 5); (C, 1)\} \in (CR)$. Contrôle : $\vec{CR}(-6, 6)$, (CR) : $x + y - 3 = 0$, et $1 + 2 - 3 = 0$ ✓.
- D'après les barycentres partiels : $\vec{AG} = \frac{4}{6}\vec{AP} = \frac{2}{3}\vec{AP}$, $\vec{BG} = \frac{1}{2}\vec{BQ}$ (G milieu de $[BQ]$), $\vec{CG} = \frac{5}{6}\vec{CR}$. Contrôle : $\vec{AG}(-2, -4) = \frac{2}{3}(-3, -6)$, $\vec{BG}(3, 1) = \frac{1}{2}(6, 2)$ et $\vec{CG}(-5, 5) = \frac{5}{6}(-6, 6)$ ✓.



■ Corrigé de l'exercice 52

1. $\vec{AB}(12, 8)$, $\vec{AC}(4, 12)$. Pour P : $\vec{AP}(7, 7)$ donne $12\beta + 4\gamma = 7$ et $8\beta + 12\gamma = 7$; en retranchant la seconde au triple de la première, $28\beta = 14$: $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = \frac{1}{4}$, $1 - \beta - \gamma = \frac{1}{4}$:

$P = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 2); (C, 1)\}$, **dans le champ**.

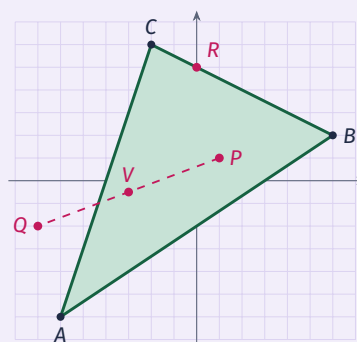
Pour Q : $\vec{AQ}(-1, 4)$: $12\beta + 4\gamma = -1$, $8\beta + 12\gamma = 4$, d'où $28\beta = -7$, $\beta = -\frac{1}{4}$, $\gamma = \frac{1}{2}$, $1 - \beta - \gamma = \frac{3}{4}$:

$Q = \text{Bar}\{(A, 3); (B, -1); (C, 2)\}$, **dehors** : le coefficient de B est négatif, Q est de l'autre côté de (AC) par rapport à B .

Pour R : $\vec{AR}(6, 11)$: $28\beta = 7$, $\beta = \frac{1}{4}$, $\gamma = \frac{3}{4}$, coefficient de A

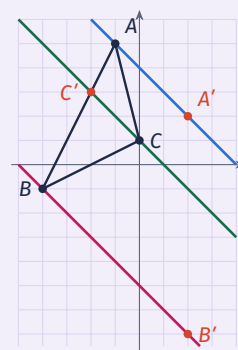
nul : $R = \text{Bar}\{(B, 1); (C, 3)\}$, **sur la clôture** $[BC]$.

2. $P = \text{Bar}\{(A, \frac{1}{4}); (B, \frac{1}{2}); (C, \frac{1}{4})\}$ et $Q = \text{Bar}\{(A, \frac{3}{4}); (B, -\frac{1}{4}); (C, \frac{1}{2})\}$ (sommes égales à 1). Le milieu $V = \text{Bar}\{(P, 1); (Q, 1)\}$ est donc, par associativité, le barycentre du système réuni $\{(A, 1); (B, \frac{1}{4}); (C, \frac{3}{4})\}$: $V = \text{Bar}\{(A, 4); (B, 1); (C, 3)\}$, coefficients strictement positifs : **V est dans le champ**. Contrôle : $V(-3, -\frac{1}{2})$ et $(\frac{-24+6-6}{8}, \frac{-24+2+18}{8}) = (-3, -\frac{1}{2})$ ✓.



■ Corrigé de l'exercice 53

1. La somme des coefficients est $2 + 1 - 3 = 0$: le système n'a **pas** de barycentre. $A'(\frac{-4-0}{-2}, \frac{-1-3}{-2}) = (2, 2)$, $B'(\frac{-2-0}{-1}, \frac{10-3}{-1}) = (2, -7)$, $C'(\frac{-2-4}{3}, \frac{10-1}{3}) = (-2, 3)$. Puis $\vec{AA'}(3, -3)$, $\vec{BB'}(6, -6)$, $\vec{CC'}(-2, 2)$ sont colinéaires à $(1, -1)$: $(AA') : x + y = 4$, $(BB') : x + y = -5$, $(CC') : x + y = 1$. Les trois droites sont **parallèles** (et distinctes) !



2. Par Chasles, pour tout point N : $\vec{u} = 2(\vec{MN} + \vec{NA}) + (\vec{MN} + \vec{NB}) - 3(\vec{MN} + \vec{NC}) = (2 + 1 - 3)\vec{MN} + 2\vec{NA} + \vec{NB} - 3\vec{NC}$: $\vec{u}$ **ne dépend pas de M** ; avec $N = O$, $\vec{u}(-6, 6)$.
- $M = A$: $\vec{u} = \vec{AB} - 3\vec{AC} = (1 - 3)\vec{AA'}$ (réduction en A avec $A' = \text{Bar}\{(B, 1); (C, -3)\}$), donc $\vec{AA'} = -\frac{1}{2}\vec{u}$.
- $M = B$: $\vec{u} = 2\vec{BA} - 3\vec{BC} = -\vec{BB'}$. $M = C$: $\vec{u} = 2\vec{CA} + \vec{CB} = 3\vec{CC'}$. Les trois droites sont dirigées par $\vec{u}$: **elles sont parallèles**, sans aucune équation. Enfin $\vec{u}$ (non nul) et $\vec{MB}$ sont colinéaires si et seulement si M est sur la droite passant par B dirigée par $\vec{u}$: c'est (BB') .
3. Si $\alpha + \beta + \gamma = 0$ avec α, β, γ non nuls, alors $\beta + \gamma = -\alpha \neq 0$ (A' existe, de même B', C') et $\vec{u} = \alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} + \gamma\vec{MC}$ est constant ; en $M = A$: $\vec{u} = -\alpha\vec{AA'}$, de même pour B et C : **les trois droites sont toujours parallèles** (à $\vec{u} \neq \vec{0}$). Elles sont distinctes : si $(AA') = (BB')$, cette droite contiendrait A et B , et $\vec{u} = \beta\vec{AB} + \gamma\vec{AC}$ serait colinéaire à $\vec{AB}$, d'où $\gamma = 0$. (Si la somme est non nulle, elles sont concourantes au barycentre : cours.)

■ Corrigé de l'exercice 54

1. $x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta}$, $y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}$, et $-6 = \frac{-6\alpha - 6\beta}{\alpha + \beta}$, donc $f(G) = \frac{\alpha(x_A + 2y_A - 6) + \beta(x_B + 2y_B - 6)}{\alpha + \beta} = \frac{\alpha f(A) + \beta f(B)}{\alpha + \beta}$. De même, $f(\text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}) = \frac{\alpha f(A) + \beta f(B) + \gamma f(C)}{\alpha + \beta + \gamma}$.

2. Les points de (AB) sont les $M_t = \text{Bar}\{(A, 1-t); (B, t)\}$, $t \in \mathbb{R}$ (car $\vec{AM}_t = t\vec{AB}$). Par 1, $f(M_t) = (1-t)f(A) + tf(B) = f(A) + t(f(B) - f(A))$, qui s'annule pour une **unique** valeur $t_0 = \frac{f(A)}{f(A) - f(B)}$; alors $1 - t_0 = \frac{-f(B)}{f(A) - f(B)}$, et les coefficients $(1 - t_0, t_0)$ sont proportionnels à $(f(B), -f(A))$: $(AB) \cap \Delta = \text{Bar}\{(A, f(B)); (B, -f(A))\}$. Ce point est sur $[AB]$ si et seulement si ses coefficients sont de même signe ou l'un nul (ours), c'est-à-dire $-f(A)f(B) \geq 0$, soit $f(A)f(B) \leq 0$. Si $f(A) = f(B)$: $f(M_t) = f(A)$ pour tout t ; si $f(A) \neq 0$, (AB) ne coupe pas Δ (droites parallèles); si $f(A) = 0$, $(AB) = \Delta$.

3. $f(A) = 7 - 6 - 6 = -5$, $f(B) = -1 + 6 - 6 = -1$, $f(C) = 7 + 6 - 6 = 7$. Comme $f(A)f(B) = 5 > 0$, Δ **ne coupe pas** $[AB]$; comme $f(A)f(C) < 0$ et $f(B)f(C) < 0$, **elle coupe** $[AC]$ et $[BC]$. Par 2 :

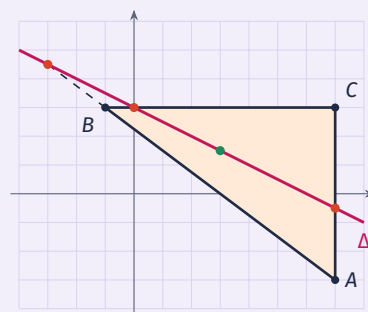
$$(AC) \cap \Delta = \text{Bar}\{(A, 7); (C, 5)\} = \left(\frac{49+35}{12}, \frac{-21+15}{12}\right) = \left(7, -\frac{1}{2}\right);$$

$$(BC) \cap \Delta = \text{Bar}\{(B, 7); (C, 1)\} = \left(\frac{-7+7}{8}, \frac{21+3}{8}\right) = (0, 3);$$

$$(AB) \cap \Delta = \text{Bar}\{(A, -1); (B, 5)\} = \left(\frac{-7-5}{4}, \frac{3+15}{4}\right) = \left(-3, \frac{9}{2}\right), \text{ hors de } [AB].$$

Contrôles : $7 - 1 - 6 = 0$, $0 + 6 - 6 = 0$, $-3 + 9 - 6 = 0$ ✓.

Enfin, par la règle à trois points, $\text{Bar}\{(A, m); (B, 2); (C, 1)\} \in \Delta \iff -5m - 2 + 7 = 0 \iff m = 1$ (et $m + 3 \neq 0$) : c'est le point $\left(\frac{7-2+7}{4}, \frac{-3+6+3}{4}\right) = \left(3, \frac{3}{2}\right)$ ✓.

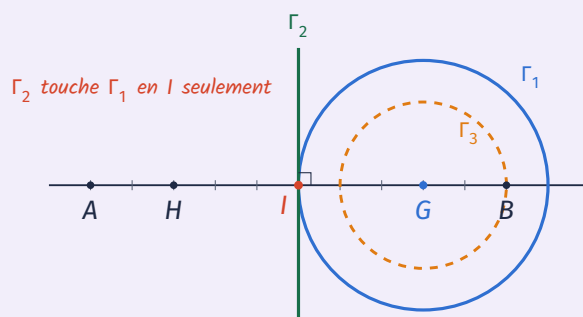


33

Corrigés : alignement et ensembles

■ Corrigé de l'exercice 55

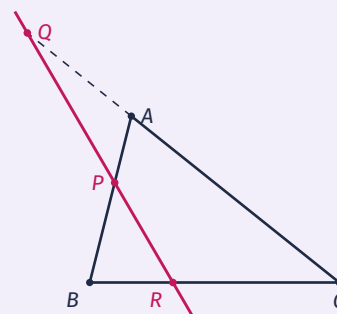
- $\vec{AG} = \frac{4}{5}\vec{AB}$: $\boxed{AG = 8}$; $\vec{AH} = \frac{1}{5}\vec{AB}$: $\boxed{AH = 2}$. Sur une droite graduée (A en 0, B en 10) : H en 2, I en 5, G en 8. Comme $\frac{2+8}{2} = 5$, **I est aussi le milieu de [GH]**.
- On réduit : $\vec{MA} + 4\vec{MB} = 5\vec{MG}$ et $4\vec{MA} + \vec{MB} = 5\vec{MH}$.
 $M \in \Gamma_1 \iff 5MG = 15 \iff MG = 3$: Γ_1 est le cercle de centre G et de rayon 3.
 $M \in \Gamma_2 \iff 5MH = 5MG \iff MH = MG$: Γ_2 est la médiatrice de [GH], c'est-à-dire la perpendiculaire à (AB) en I (la médiatrice de [AB]).
 $\vec{MA} - \vec{MB} = \vec{BA}$ (somme des coefficients nulle) et $\|\vec{BA}\| = 10$: $M \in \Gamma_3 \iff 5MG = 10 \iff MG = 2$: Γ_3 est le cercle de centre G et de rayon 2.



- $GB = 10 - 8 = 2$: $\boxed{B \in \Gamma_3}$. $GI = 8 - 5 = 3$: $I \in \Gamma_1$; I est équidistant de G et H : $I \in \Gamma_2$. Unicité : soit $M \in \Gamma_2$, $M \neq I$. La droite Γ_2 est perpendiculaire en I à (AB), qui contient G : le triangle MIG est rectangle en I, et par Pythagore $MG^2 = MI^2 + IG^2 = MI^2 + 9 > 9$, donc $MG > 3$ et $M \notin \Gamma_1$. Ainsi $\boxed{\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{I\}}$: la médiatrice est **tangente** au cercle Γ_1 en I.

■ Corrigé de l'exercice 56

- $\vec{AP} = \frac{2}{5}\vec{AB}$; $\vec{AQ} = \frac{-1}{3-1}\vec{AC}$, soit $\vec{AQ} = -\frac{1}{2}\vec{AC}$ (Q est sur (AC), du côté opposé à C par rapport à A) ; $\vec{BR} = \frac{1}{3}\vec{BC}$.
- La somme des coefficients du système vaut $3+2-3+1 = 3 \neq 0$, et son barycentre Z vérifie $3\vec{ZA} + 2\vec{ZB} - 3\vec{ZC} + \vec{ZC} = \vec{0}$, soit $2\vec{ZB} + \vec{ZC} = \vec{0}$: $Z = R$. Par associativité, on regroupe $\{(A, 3); (B, 2)\}$ en (P, 5) et $\{(A, -3); (C, 1)\}$ en (Q, -2), car $\text{Bar}\{(A, -3); (C, 1)\} = \text{Bar}\{(A, 3); (C, -1)\} = Q$ (homogénéité) : $\boxed{R = \text{Bar}\{(P, 5); (Q, -2)\}}$.

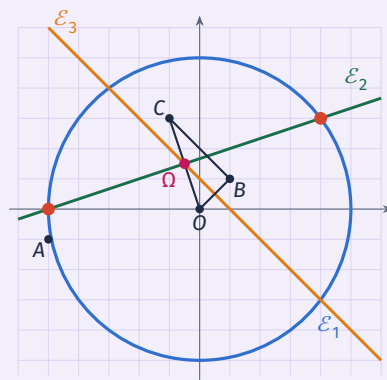


Donc P, Q, R sont alignés, et $\vec{PR} = \frac{-2}{5-2}\vec{PQ}$, soit $\boxed{\vec{PR} = -\frac{2}{3}\vec{PQ}}$: P est entre Q et R.

- Comme $R \in (BC)$ et $R \in (PQ)$ (les droites (PQ) et (BC) sont distinctes), (PQ) coupe (BC) en R, avec $\vec{BR} = \frac{1}{3}\vec{BC}$. Contrôle : dans $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$, $P(\frac{2}{5}, 0)$, $Q(0, -\frac{1}{2})$, $R(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ (car $\vec{AR} = \vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{BC} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$; $\vec{PQ}(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{2})$, $\vec{PR}(\frac{4}{15}, \frac{1}{3})$ et $\det = -\frac{2}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{15} = 0$ ✓.

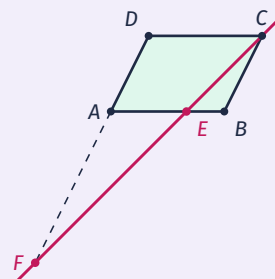
■ Corrigé de l'exercice 57

- La somme des coefficients vaut $4 \neq 0$ et $(\frac{-5+4+1}{4}, \frac{-1+4-3}{4}) = (0, 0)$: $\text{Bar}\{(A, 1); (B, 4); (C, -1)\} = O$, donc $\vec{W} = 4\vec{MO}$.
- $M \in \mathcal{E}_1 \iff 4MO = 20 \iff MO = 5$: $\mathcal{E}_1$ est le cercle de centre O et de rayon 5, d'équation $x^2 + y^2 = 25$.
- $M \in \mathcal{E}_2 \iff 4MO = 4MC \iff MO = MC$: $\mathcal{E}_2$ est la médiatrice de $[OC]$; $x^2 + y^2 = (x+1)^2 + (y-3)^2 \iff 0 = 2x - 6y + 10$: $\mathcal{E}_2 : x - 3y + 5 = 0$. Avec $x = 3y - 5$: $(3y - 5)^2 + y^2 = 25 \iff 10y^2 - 30y = 0 \iff y \in \{0, 3\}$: $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \{(-5, 0); (4, 3)\}$.
- $M \in \mathcal{E}_3 \iff MO = MB$: médiatrice de $[OB]$, $x^2 + y^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 \iff x + y - 1 = 0$. Avec $\mathcal{E}_2 : x = 1 - y$ et $1 - y - 3y + 5 = 0$, d'où $\Omega(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Comme Ω est sur les médiatrices de $[OC]$ et de $[OB]$, $\Omega O = \Omega C = \Omega B (= \frac{\sqrt{10}}{2})$: Ω est le centre du cercle circonscrit au triangle OBC .



■ Corrigé de l'exercice 58

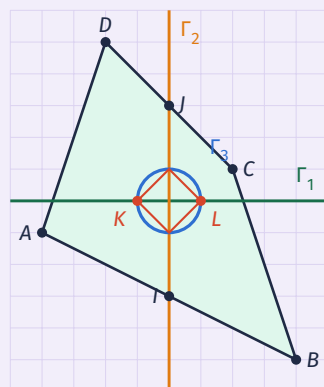
- $\vec{AE} = \frac{2}{3}\vec{AB}$ donne $E = \text{Bar}\{(A, \frac{1}{3}); (B, \frac{2}{3})\} = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$; $\vec{AF} = -2\vec{AD}$ donne $F = \text{Bar}\{(A, 3); (D, -2)\}$. Enfin $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$ (parallélogramme), donc $C = \text{Bar}\{(A, 1-1-1); (B, 1); (D, 1)\} = \text{Bar}\{(A, -1); (B, 1); (D, 1)\}$ (cours).
- Dans $(A, \vec{AB}, \vec{AD})$: $E(\frac{2}{3}, 0)$, $F(0, -2)$, $C(1, 1)$; $\vec{EC}(\frac{1}{3}, 1)$, $\vec{EF}(-\frac{2}{3}, -2)$ et $\det(\vec{EC}, \vec{EF}) = \frac{1}{3} \times (-2) - 1 \times (-\frac{2}{3}) = 0$: E, F, C sont alignés.
- Par homogénéité, $F = \text{Bar}\{(A, -3); (D, 2)\}$ (masse totale -1). Par associativité : $\text{Bar}\{(E, 3); (F, -1)\} = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 2); (A, -3); (D, 2)\} = \text{Bar}\{(A, -2); (B, 2); (D, 2)\} = \text{Bar}\{(A, -1); (B, 1); (D, 1)\} = C$. Donc $C \in (EF)$, avec $\vec{EC} = \frac{-1}{3-1}\vec{EF} = -\frac{1}{2}\vec{EF}$: C et F sont de part et d'autre de E , et $EC = \frac{1}{2}EF$ (contrôle : $\vec{EF} = -2\vec{EC}$ ✓).
- $E(a, 0)$, $F(0, b)$, $C(1, 1)$: $\det(\vec{EC}, \vec{EF}) = (1-a)b - 1 \times (-a) = 0 \iff b = \frac{a}{a-1}$ (car $a \neq 1$). Alors $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{a-1}{a} = 1$ ✓ (pour $a = \frac{2}{3}$: $b = -2$, on retrouve F). Si $a = 1$, $E = B$ et $(EC) = (BC)$ est parallèle à (AD) : aucun point F ne convient (l'équation devient $0 \times b + 1 = 0$).



■ Corrigé de l'exercice 59

1. $I(0, -3)$, $J(0, 3)$, $K(-1, 0)$, $L(1, 0)$ et $O'(\frac{-4+4+2-2}{4}, \frac{-1-5+1+5}{4}) = (0, 0)$. Par associativité, $O' = \text{Bar}\{(I, 2); (J, 2)\} = \text{Bar}\{(K, 2); (L, 2)\}$: O' est le milieu de $[IJ]$ et de $[KL]$.

2. $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$ et $\vec{MC} + \vec{MD} = 2\vec{MJ}$: $M \in \Gamma_1 \iff MI = MJ$: **médiatrice de $[IJ]$** ; $x^2 + (y+3)^2 = x^2 + (y-3)^2 \iff 12y = 0$: $\Gamma_1 : y = 0$. De même $M \in \Gamma_2 \iff MK = ML$: **médiatrice de $[KL]$** , $(x+1)^2 + y^2 = (x-1)^2 + y^2 \iff \Gamma_2 : x = 0$.

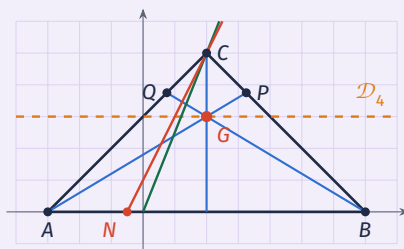


3. $\vec{v} = (\vec{MA} - \vec{MB}) + (\vec{MC} - \vec{MD}) = \vec{BA} + \vec{DC}$ **ne dépend pas de M** : $\vec{BA}(-8, 4)$, $\vec{DC}(4, -4)$, donc $\vec{v}(-4, 0)$ et $\|\vec{v}\| = 4$. Comme $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} = 4\vec{MO'}$: $M \in \Gamma_3 \iff 4MO' = 4 \iff MO' = 1$: Γ_3 **est le cercle de centre O' et de rayon 1**. Pour Γ_4 : $\|\vec{BA}\| = \sqrt{80}$ et $\|\vec{DC}\| = \sqrt{32}$ sont des constantes différentes : $\Gamma_4 = \emptyset$ (ce serait le plan entier si $AB = CD$).
4. $\Gamma_3 \cap \Gamma_1 : y = 0$ et $x^2 = 1$, soit $(1, 0) = L$ et $(-1, 0) = K$! $\Gamma_3 \cap \Gamma_2 : (0, 1)$ et $(0, -1)$. Ces quatre points forment **un carré** de centre O' (diagonales de même milieu, de même longueur 2, portées par les axes, perpendiculaires). *Cas général* : $\vec{v} = \vec{BA} + \vec{DC}$ est constant et Γ_3 est le cercle de centre O' et de rayon $\frac{1}{4}\|\vec{BA} + \vec{DC}\|$, sauf si $\vec{BA} + \vec{DC} = \vec{0}$, c'est-à-dire $\vec{AB} = \vec{DC}$: **$ABCD$ parallélogramme** ; alors $\Gamma_3 = \{M : 4MO' = 0\} = \{O'\}$.

■ Corrigé de l'exercice 60

1. $\vec{MB} + 3\vec{MC} = 4\vec{MP}$: $M \in \mathcal{D}_1 \iff \vec{MP}$ et $\vec{MA}$ colinéaires $\iff M, P, A$ alignés (si $M = A$ ou $M = P$, un vecteur est nul et la colinéarité a lieu) ; comme $P \neq A$, $\mathcal{D}_1 = (AP)$. De même $\vec{MA} + 3\vec{MC} = 4\vec{MQ}$ donne $\mathcal{D}_2 = (BQ)$, et $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$ donne $\mathcal{D}_3 = (CI)$. Par associativité, $G = \text{Bar}\{(A, 1); (P, 4)\} = \text{Bar}\{(B, 1); (Q, 4)\} = \text{Bar}\{(I, 2); (C, 3)\}$ est sur les trois droites : elles **concourent en G** , avec $\vec{CG} = \frac{2}{5}\vec{CI}$.
2. $\vec{MA} + \vec{MB} + 3\vec{MC} = 5\vec{MG}$: $\mathcal{D}_4$ est **la parallèle à (AB) passant par G** . Puis $\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC} = 2\vec{MI} - 2\vec{MC} = 2\vec{CI}$, vecteur constant non nul, non colinéaire à $\vec{AB}$ (car $C \notin (AB)$) : $\mathcal{D}_5 = \emptyset$.

3. $G(\frac{-3+7+6}{5}, \frac{15}{5}) = (2, 3)$. $P(\frac{13}{4}, \frac{15}{4})$, $\vec{AP}(\frac{25}{4}, \frac{15}{4})$ colinéaire à $(5, 3)$: $\mathcal{D}_1 : 3x - 5y + 9 = 0$; $Q(\frac{3}{4}, \frac{15}{4})$, $\vec{BQ}$ colinéaire à $(-5, 3)$: $\mathcal{D}_2 : 3x + 5y - 21 = 0$; $I(2, 0)$: $\mathcal{D}_3 : x = 2$; $\mathcal{D}_4 : y = 3$. Contrôle : $6 - 15 + 9 = 0$, $6 + 15 - 21 = 0$ ✓.



4. (OC) coupe (AB) (l'axe des abscisses) en O . Si $O = \text{Bar}\{(A, a); (B, b)\}$, alors $a\vec{MA} + b\vec{MB} = (a+b)\vec{MO}$, et l'ensemble est (OC) : il suffit que $-3a + 7b = 0$, par exemple $(a, b) = (7, 3)$. La droite $2x - y + 1 = 0$ passe par $C(4 - 5 + 1 = 0)$ et coupe l'axe en $N(-\frac{1}{2}, 0)$: $\frac{-3a+7b}{a+b} = -\frac{1}{2} \iff 15b = 5a : (a, b) = (3, 1)$.

Réciproquement, toute droite Δ passant par C est de ce type : si elle coupe (AB) en N , on écrit $N = \text{Bar}\{(A, a); (B, b)\}$ et $\Delta = (CN)$; si elle est parallèle à (AB) , on prend $a = 1, b = -1$: $\vec{MA} - \vec{MB} = \vec{BA}$ est colinéaire à $\vec{MC}$ si et seulement si M est sur la parallèle à (AB) par C . On obtient **toutes les droites passant par C** .

34 Corrigés : défis de concours

■ Corrigé de l'exercice 61

- Réponse (b).** $G = \text{Bar}\{(A, 3); (B, -1)\}$ (somme 2) : $x_G = \frac{6+2}{2} = 4, y_G = \frac{-3-5}{2} = -4$. Pièges : (a) est le milieu, (c) échange les coefficients, (d) divise par $3 + 1$.
- Réponse (c).** En multipliant par 20 : $2(12-V_N) + (0-V_N) + (6-V_N) = 0 \iff 4V_N = 30 \iff V_N = 7,5 \text{ V}$. C'est le barycentre des potentiels pondérés par les *inverses* des résistances (2, 1, 1) : $\frac{2 \times 12 + 0 + 6}{4}$. Pièges : (a) moyenne simple, (b) pondération par les résistances elles-mêmes.
- Réponse (a).** $3\vec{MA} - 7\vec{MB} = -4\vec{MG}$ avec $G = \text{Bar}\{(A, 3); (B, -7)\}$ (somme $-4 \neq 0$, le barycentre existe) et $\vec{AG} = \frac{-7}{-4}\vec{AB}$, d'où $AG = 7$; puis $4MG = 12 \iff MG = 3$. Pièges : (b) divise par $|3| + |7| = 10$, (c) croit qu'une somme négative est interdite, (d) oublie de diviser par 4.
- Réponse (a).** On regroupe $(B, 4)$ et $(C, 5)$ en $(A', 9)$ avec $A' = \text{Bar}\{(B, 4); (C, 5)\} \in [BC]$: $G = \text{Bar}\{(A, 1); (A', 9)\} \in (AA')$, donc A' est bien le point où (AG) coupe (BC) ; $\vec{BA'} = \frac{5}{9}\vec{BC}$ et $\vec{AG} = \frac{9}{10}\vec{AA'}$. Pièges : (b) échange les rôles de B et C , (c) confond $\vec{AG}$ et $\vec{GA'}$, (d) pense au centre de gravité.
- Réponse (b).** Sur un axe orienté vers l'est (km, h) : $x_1 = 60t$ (camion), $x_2 = d - 100t$ (voiture) ; $x_G = \frac{9 \times 60t + 1 \times (d - 100t)}{10} = \frac{d}{10} + 44t$: le centre d'inertie avance à 44 km/h vers l'est. Pièges : (a) ajoute la vitesse opposée, (c) et (d) oublient les masses.
- Réponse (c).** Par homogénéité, $\text{Bar}\{(A, -1); (B, -2); (C, -4)\} = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 2); (C, 4)\}$, coefficients strictement positifs : point intérieur. Les points (a), (b) et (d) ont des coefficients de signes contraires : ils sont extérieurs au triangle.

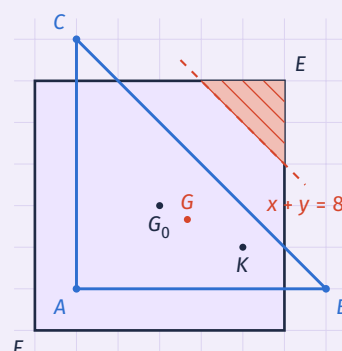
■ Corrigé de l'exercice 62

- $P = R_A + R_B + R_C \neq 0$, donc $\vec{OG} = \frac{R_A \vec{OA} + R_B \vec{OB} + R_C \vec{OC}}{R_A + R_B + R_C}$: $G = \text{Bar}\{(A, R_A); (B, R_B); (C, R_C)\}$ (caractérisation par un point O). En coordonnées : $x_G = \frac{6R_B}{P}, y_G = \frac{6R_C}{P}$, d'où $R_B = \frac{P x_G}{6}, R_C = \frac{P y_G}{6}$,

$$R_A = P - R_B - R_C = \frac{P(6 - x_G - y_G)}{6}.$$

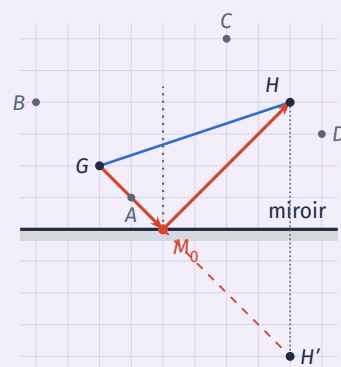
Table vide : $P = 120, G = G_0(2, 2) : R_A = R_B = R_C = 40 \text{ N}$. Objet de 60 N en K : $P = 180$ et $G = \text{Bar}\{(G_0, 120); (K, 60)\} = \text{Bar}\{(G_0, 2); (K, 1)\} = (\frac{8}{3}, \frac{5}{3}) : R_B = 80 \text{ N}, R_C = 50 \text{ N}, R_A = 50 \text{ N}$ (somme 180 ✓).

- Pour P et G donnés, les réactions sont *uniques* (formules de 1). La table tient $\iff R_A \geq 0, R_B \geq 0, R_C \geq 0 \iff x_G \geq 0, y_G \geq 0, x_G + y_G \leq 6$: G est un barycentre de A, B, C à coefficients positifs ou nuls, c'est-à-dire **un point du triangle ABC , bord compris**.
- Au coin $E(5, 5)$: $x_G = y_G = \frac{240+5Q}{120+Q} > 0$, et $x_G + y_G \leq 6 \iff 2(240 + 5Q) \leq 6(120 + Q) \iff 4Q \leq 240$: $Q \leq 60$ N. Au coin $F(-1, -1)$: $x_G = y_G = \frac{240-Q}{120+Q}$, qui est ≤ 2 , et $\geq 0 \iff Q \leq 240$ N. Le coin E est le plus dangereux : il est loin au-delà du côté $[BC]$ ($x + y = 10$ contre 6). (Aux deux autres coins, le même calcul donne $Q \leq 240$ N.)
- $P = 240$ et $G = \text{Bar}\{(G_0, 1); (K, 1)\}$: milieu de $[G_0K]$, $G(\frac{2+x}{2}, \frac{2+y}{2})$. Conditions : $x \geq -2$ et $y \geq -2$ (toujours vrai sur le plateau) et $\frac{4+x+y}{2} \leq 6 \iff x+y \leq 8$. On peut poser l'objet **partout, sauf dans le coin** $x + y > 8$, triangle de sommets $(3, 5), E(5, 5), (5, 3)$ (hachuré).



■ Corrigé de l'exercice 63

- On réduit : $2\vec{MA} + \vec{MB} = 3\vec{MG}$ avec $G = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 1)\} = (\frac{4-1}{3}, \frac{2+4}{3}) = (1, 2)$, et $\vec{MC} + 2\vec{MD} = 3\vec{MH}$ avec $H = \text{Bar}\{(C, 1); (D, 2)\} = (\frac{5+16}{3}, \frac{6+6}{3}) = (7, 4)$; donc $f(M) = 3MG + 3MH$.
- Inégalité triangulaire : $GH \leq GM + MH$, d'où $f(M) \geq 3GH = 3\sqrt{36 + 4} = 6\sqrt{10}$, avec égalité si et seulement si $M \in [GH]$: le minimum est atteint **exactement sur le segment $[GH]$** .
- $H'(7, -4)$. L'axe des abscisses est la médiatrice de $[HH']$: pour M sur l'axe, $MH = MH'$, donc $f(M) = 3(MG + MH') \geq 3GH'$, avec égalité si et seulement si $M \in [GH']$. Comme $y_G = 2 > 0 > -4 = y_{H'}$, le segment $[GH']$ coupe l'axe en un seul point : (GH') a pour vecteur directeur $(6, -6)$, pour équation $x + y = 3$, d'où $M_0(3, 0)$ (et $M_0 = \text{Bar}\{(G, 2); (H', 1)\} \in [GH']$). Le minimum sur l'axe vaut $3GH' = 3\sqrt{36 + 36} = 18\sqrt{2}$.
- Le plus court chemin de G à H via le miroir minimise $MG + MH$, donc f : le rayon frappe le miroir en $M_0(3, 0)$. La normale au miroir en M_0 est la droite $x = 3$; la symétrie par rapport à elle change (a, b) en $(-a, b)$ et envoie la direction $\vec{M_0G}(-2, 2)$ sur $(2, 2)$, colinéaire à $\vec{M_0H}(4, 4)$: (M_0G) et (M_0H) sont symétriques par rapport à la normale : **angle d'incidence = angle de réflexion** (loi de Descartes).

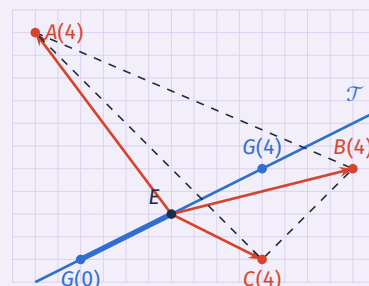


■ Corrigé de l'exercice 64

1. $x = -1 + 2t$, $y = 1 + t$, donc $t = y - 1$ et $x = 2y - 3$: $\mathcal{T} : x - 2y + 3 = 0$. En une seconde, G se déplace de $(2, 1)$: vitesse constante $\sqrt{5} \approx 2,24$ dm/s. Explosion en $E = G(2) = (3, 3)$.

2. Le mouvement de G se poursuit : $G(4) = (7, 5)$. De $10\vec{OG} = 2\vec{OA} + 5\vec{OB} + 3\vec{OC}$ (avec $A = A(4)$...) on tire $3\vec{OC} = 10\vec{OG} - 2\vec{OA} - 5\vec{OB}$: $C(4) = \text{Bar}\{(G, 10); (A, -2); (B, -5)\}$ (somme 3), soit $\left(\frac{70+6-55}{3}, \frac{50-22-25}{3}\right) = (7, 1)$.

3. $\vec{v}_A = \frac{1}{2}(A(4) - E) = (-3, 4)$, $\vec{v}_B = \frac{1}{2}(8, 2) = (4, 1)$, $\vec{v}_C = \frac{1}{2}(4, -2) = (2, -1)$, et $2\vec{v}_A + 5\vec{v}_B + 3\vec{v}_C = (-6+20+6, 8+5-3) = (20, 10) = 10\vec{v}$ ✓ (conservation de la quantité de mouvement). Alors, pour $t \geq 2$, le barycentre des fragments est $E + (t-2)\frac{2\vec{v}_A+5\vec{v}_B+3\vec{v}_C}{10} = E + (t-2)\vec{v} = (-1+2t, 1+t)$: il reste sur $\mathcal{T}$ ✓. Enfin $A(t)\vec{B}(t) = (t-2)(7, -3)$ et $A(t)\vec{C}(t) = (t-2)(5, -5)$: $\det = (t-2)^2(-35+15) = -20(t-2)^2 \neq 0$ pour $t > 2$: **les fragments ne sont jamais alignés** (le triangle grandit, image de lui-même par des homothéties de centre E).



■ Corrigé de l'exercice 65

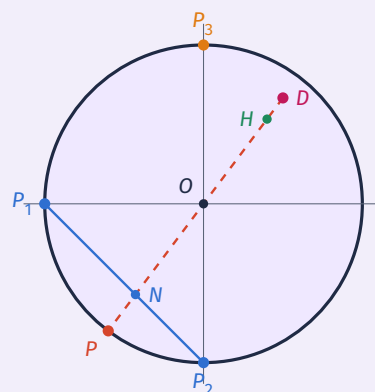
1. $G = \text{Bar}\{(O, 8000); (D, 60)\}$ (en g) : $\vec{OG} = \frac{60}{8060}\vec{OD}$ et $OD = \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$, d'où $OG = \frac{1500}{8060} = \frac{75}{403}$ cm $\approx 1,9$ mm : faible, mais suffisant pour faire vibrer la roue à grande vitesse.

Le nouveau centre d'inertie est O si et seulement si $60\vec{OD} + m\vec{OP} = \vec{0}$: P est sur la demi-droite opposée à $[OD]$, et $30m = 60 \times 25$: $m = 50$ g, $\vec{OP} = -\frac{30}{25}\vec{OD}$, $P(-18, -24)$.

2. $m_1\vec{OP}_1 + m_2\vec{OP}_2 = -60\vec{OD} \iff (-30m_1, -30m_2) = (-900, -1200)$: $m_1 = 30$ g, $m_2 = 40$ g, total 70 g. Puis $70\vec{ON} = 30\vec{OP}_1 + 40\vec{OP}_2 = -60\vec{OD}$, soit $\vec{ON} = -\frac{6}{7}\vec{OD}$: N est sur la demi-droite opposée à $[OD]$.

Minoration : si $m_1, m_2 \geq 0$ (de somme $s > 0$) équilibrent la roue, $N = \text{Bar}\{(P_1, m_1); (P_2, m_2)\}$ vérifie $s\vec{ON} = -60\vec{OD}$, d'où $s \cdot ON = 1500$. Or $ON = \frac{\|m_1\vec{OP}_1 + m_2\vec{OP}_2\|}{s} \leq \frac{30m_1 + 30m_2}{s} = 30$ (inégalité triangulaire), donc $s = \frac{1500}{ON} \geq 50 = m$: **une seule masse bien placée est toujours la solution la plus légère.**

3. $m_1\vec{OP}_1 + m_3\vec{OP}_3 = (-900, -1200)$: $m_1 = 30$ et $m_3 = -40$. Une masse négative signifie qu'il faut retirer 40 g de matière en P_3 (percer près de la jante) tout en ajoutant 30 g en P_1 : la demi-droite opposée à $[OD]$ ne coupe pas $[P_1P_3]$. Pour un trou de 75 g en H : $60\vec{OD} - 75\vec{OH} = \vec{0}$, donc $\vec{OH} = \frac{4}{5}\vec{OD}$: $H(12, 16)$, à 20 cm de O sur $[OD]$.

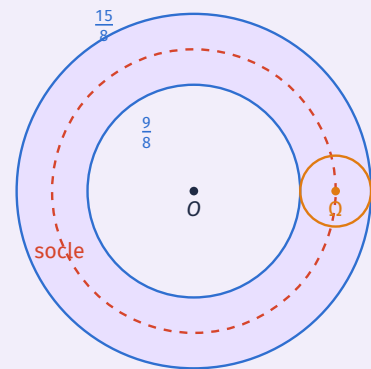


■ Corrigé de l'exercice 66

1. $G = \text{Bar}\{(O, 5); (A, 2); (M, 1)\} : 8\vec{OG} = 2\vec{OA} + \vec{OM} = 2\vec{OA} + \vec{OA} + \vec{AM} = 3\vec{OA} + \vec{AM} \checkmark$. Comme $8\vec{O\Omega} = 3\vec{OA_0}$, on obtient

$$\vec{OG} = \frac{1}{8}A_0\vec{M} \quad (O\Omega = \frac{3}{2}). \text{ Double inclusion. Si } A_0M = 3, \text{ alors}$$

$\Omega G = \frac{3}{8}$: G est sur le cercle $\mathcal{C}(\Omega, \frac{3}{8})$. Réciproquement, si $\Omega G = \frac{3}{8}$, le point M défini par $A_0\vec{M} = 8\vec{OG}$ vérifie $A_0M = 3$ (position permise) et donne ce point G . L'ensemble cherché est **le cercle de centre Ω et de rayon $\frac{3}{8}$** .



2. $OG = \frac{1}{8}\|3\vec{OA} + \vec{AM}\|$ avec $\|3\vec{OA}\| = 12$ et $\|\vec{AM}\| = 3$; par l'inégalité triangulaire, $12 - 3 \leq \|3\vec{OA} + \vec{AM}\| \leq 12 + 3$: $\frac{9}{8} \leq OG \leq \frac{15}{8}$. Réciproquement, soit G dans la couronne et W tel que $\vec{OW} = 8\vec{OG}$ ($9 \leq OW \leq 15$). Les cercles $\mathcal{C}(O, 12)$ et $\mathcal{C}(W, 3)$ se coupent ($|12 - 3| \leq OW \leq 12 + 3$) en un point U ; on pose $\vec{OA} = \frac{1}{3}\vec{OU}$ ($OA = 4$) et $\vec{AM} = \vec{UW}$ ($AM = 3$). Alors $3\vec{OA} + \vec{AM} = \vec{OU} + \vec{UW} = \vec{OW} = 8\vec{OG}$: G est atteint. **G décrit toute la couronne.**

Socle. Avec une charge c : $(7+c)\vec{OG} = (2+c)\vec{OA} + c\vec{AM}$, donc $OG \leq \frac{4(2+c)+3c}{7+c} = \frac{8+7c}{7+c}$, valeur atteinte bras tendu ($\vec{OA}$ et $\vec{AM}$ de même sens). Le robot ne bascule jamais $\Leftrightarrow \frac{8+7c}{7+c} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 16+14c \leq 21+3c \Leftrightarrow c \leq \frac{5}{11} \text{ kg} \approx 0,45 \text{ kg}$. Avec 1 kg, il bascule bras tendu ($\frac{15}{8} > 1,5$).

Corrigé du test d'entrée

Barème : 1 point par réponse juste et justifiée, $\frac{1}{2}$ point si une seule des deux parties est juste. Reporte tes points bloc par bloc dans la case score de la page 4.

Bloc 1 · Vecteurs et Chasles

- ① (a) $\vec{u} = \vec{CA}$; (b) $N = C$.
 $\vec{DA} - \vec{DB} = \vec{BA}$,
 $\vec{CB} + \vec{BA} = \vec{CA}$;
 $\vec{NA} + \vec{AB} = \vec{NB}$.
- ② (a) $\vec{EF} = -\frac{7}{2}\vec{AB}$, $EF = 14 \text{ cm}$;
 (b) F, A, B, E . $\vec{EF} = \vec{EA} + \vec{AF}$;
 abscisses dans le repère
 $(A; \vec{AB})$: $-\frac{1}{2}, 0, 1, 3$.
- ③ $k = -4$. $\vec{AQ} = \lambda \vec{AP}$: $6 = -3\lambda$,
 $\lambda = -2$ et $k = 2\lambda$.
- ④ (a) $\frac{1}{4}\vec{AB}$ et $\frac{3}{4}\vec{AB}$;
 (b) $k = -\frac{1}{3}$. $\vec{AK} = \frac{1}{2}\vec{AI}$;
 $-\frac{1}{4} = k \times \frac{3}{4}$.

Bloc 2 · Coordonnées et colinéarité

- ⑤ $\vec{AB}(-4; 6)$, $I(1; 2)$,
 $C(-5; 11)$. B milieu de
 $[AC]$: $x_C = 2x_B - x_A$,
 $y_C = 2y_B - y_A$.
- ⑥ (a) oui; (b) non.
 $(-6) \times (-10) - 15 \times 4 = 0$;
 $\vec{EF}(3; 2)$, $\vec{EH}(9; 7)$:
 $21 - 18 \neq 0$.
- ⑦ (a) $x + 2y - 7 = 0$; (b) $(7; 0)$,
 $(0; \frac{7}{2})$. $\det(\vec{AM}, \vec{AB}) =$
 $-4(x + 3) - 8(y - 5)$.
- ⑧ $B(1; 0)$, $C(0; 1)$, $I(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$,
 $M(-1; 2)$.
 $\vec{AM} = \vec{AB} + 2(\vec{AC} - \vec{AB})$.

Bloc 3 · Géométrie du triangle

- ⑨ $A'(2; -3)$, $G(0; -1)$.
 $\vec{AA'}(6; -6)$, $\vec{AG}(4; -4)$.
- ⑩ $AG = 4 \text{ cm}$, $AA' = 6 \text{ cm}$,
 $BB' = 7,5 \text{ cm}$. G est aux
 deux tiers de chaque
 médiane, depuis le
 sommet.
- ⑪ (a) $OB = 3$, $CD = 9$;
 (b) $k = -\frac{3}{2}$. Thalès:
 rapport $\frac{OC}{OA} = \frac{3}{2}$; sens
 contraires.
- ⑫ (a) même hauteur,
 $BA' = A'C$; (b) $\frac{1}{3}$. Hauteurs
 issues de G et A : rapport
 $\frac{GA'}{AA'} = \frac{1}{3}$ (Thalès).

Ton orientation

les renvois sont cliquables dans le PDF

1. Selon ton score total : par où commencer, quels exercices faire en priorité.

0 à 5
bases à revoir

Commence par tes erreurs (ce corrigé sert de rappel), puis le cours pas à pas, sections 1 à 3 d'abord (boîte à outils incluse). **En priorité** : le niveau 1, **exercices 1 à 8**, p. 22 ; puis **exercice 31**, p. 28 et **exercice 49**, p. 33. Refais le test dans une semaine.

6 à 9
bon départ

Commence par le cours complet (sections 1 à 10), puis les pièges (section 12) et l'essentiel (section 14). **En priorité** : le niveau 2, **exercices 9 à 16**, p. 23 ; puis les thèmes B et D, **exercices 37 à 42**, p. 30 et **49 à 54**, p. 33.

10 à 12
cap concours

Commence par le cours (sections 1 à 10 en lecture rapide), puis les sections 11 à 14. **En priorité** : le niveau 3, **exercices 17 à 23**, p. 25 ; les thèmes C et E, **exercices 43 à 48**, p. 31 et **55 à 60**, p. 34 ; puis le niveau 4, **exercices 24 à 30**, p. 26, et le thème F, **61 à 66**, p. 36.

2. Selon ton bloc le plus faible (2 points sur 4 ou moins) : fais d'abord sa case, puis ta ligne ci-dessus.

Bloc 1 · Vecteurs et Chasles

Relis : la boîte à outils de la section 1, les sections 2 et 8.
Fais : **exercice 2**, p. 22,
exercice 3, p. 22, **exercice 34**,
 p. 29 et **exercice 37**, p. 30.

Bloc 2 · Coordonnées et colinéarité

Relis : les sections 3 et 7 du cours.
Fais : **exercice 4**, p. 22,
exercice 11, p. 24, **exercice 50**,
 p. 33 et **exercice 58**, p. 35.

Bloc 3 · Géométrie du triangle

Relis : les sections 4, 5 et 10 du cours.
Fais : **exercice 5**, p. 22,
exercice 6, p. 23, **exercice 38**,
 p. 30 et **exercice 43**, p. 31.

Mon bilan sur le chapitre

Partie B · Le parcours en 4 niveaux

Niveau	Exercices	Réussis seul(e)	À refaire
Niveau 1 · Bases ★	1 à 8	/ 8	
Niveau 2 · Bac ★★	9 à 16	/ 8	
Niveau 3 · Approfondissement ★★★	17 à 23	/ 7	
Niveau 4 · Concours ★★★★	24 à 30	/ 7	

Partie C · La banque d'exercices

Thème	Exercices	Réussis seul(e)	À refaire
Thème A · Barycentre de deux points	31 à 36	/ 6	
Thème B · Barycentre de trois points	37 à 42	/ 6	
Thème C · Associativité et quatre points	43 à 48	/ 6	
Thème D · Coordonnées du barycentre	49 à 54	/ 6	
Thème E · Alignement et ensembles de points	55 à 60	/ 6	
Thème F · Défis de concours	61 à 66	/ 6	

Conseil : refais dans une semaine les exercices ratés, sans regarder le corrigé.

Prochain chapitre : **Le produit scalaire**

Maths Olympiad