

Chapitre 5

Le barycentre dans le plan

Du niveau de base au niveau concours

À connaître par cœur

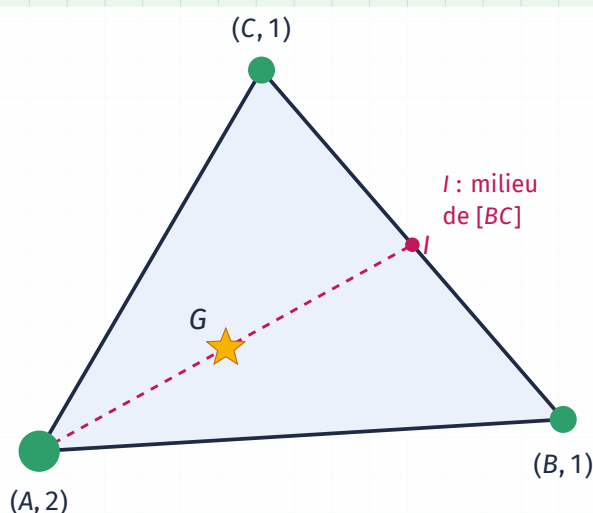
$$G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$$

$$\Leftrightarrow \alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} = \vec{0}$$

$$\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \vec{AB}$$

Défi de concours

Le centre du cercle inscrit est $\text{Bar}\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$: pourquoi ?



Le barycentre : le point d'équilibre des masses

★★★★ Niveau 4 · Concours

★★★ Niveau 3 · Approfondissement

★★ Niveau 2 · Bac

★ Niveau 1 · Bases

Cours complet

Méthodes et pièges

66 exercices corrigés

Test d'entrée

Sommaire

Test d'entrée : par où commencer ?	4	18 Niveau 4 • Concours	26
1 Points pondérés et équilibre	5	19 Barycentre de deux points	28
2 Barycentre de deux points	6	20 Trois points et plus	30
3 Réduire une somme vectorielle	8	21 Associativité et alignement	31
4 Coordonnées du barycentre	9	22 Coordonnées du barycentre	33
5 Droites et segments	9	23 Lignes de niveau	35
6 Barycentre de trois points	10	24 Défis de concours	36
7 L'associativité	11	25 Corrigés du niveau 1	39
8 Barycentre de n points	13	26 Corrigés du niveau 2	42
9 Un point dans un triangle	14	27 Corrigés du niveau 3	44
10 Lignes de niveau	15	28 Corrigés du niveau 4	47
11 Pour aller plus loin	17	29 Corrigés : deux points pondérés	50
12 Les pièges classiques	18	30 Corrigés : trois points et plus	53
13 Les astuces des concours	19	31 Corrigés : associativité	56
14 L'essentiel du chapitre en une page	21	32 Corrigés : coordonnées	59
15 Niveau 1 • Bases	22	33 Corrigés : lignes de niveau	61
16 Niveau 2 • Bac	23	34 Corrigés : défis de concours	64
17 Niveau 3 • Approfondissement	25	Corrigé du test d'entrée	68

Comment utiliser ce livret

Les 4 niveaux d'exercices

Niveau 1 • Bases ★

les automatismes indispensables.

Niveau 2 • Bac ★★

le niveau des devoirs surveillés.

Niveau 3 • Approfondissement ★★★

pour viser la mention Très bien.

Niveau 4 • Concours ★★★★★

problèmes de concours (classes préparatoires, écoles d'ingénieurs).

Les encadrés du cours

Définition : à savoir par cœur.

Propriété / Théorème : les outils.

Méthode : la démarche pas à pas.

Exemple : un calcul entièrement rédigé.

Piège : l'erreur classique à éviter.

Astuce de concours ★ : le petit plus qui fait gagner du temps.

Ce livret est « intelligent » : commence par le **test d'entrée** (page 4) ; en 15 minutes, il t'indique par où commencer et quels exercices faire en priorité. Le livret contient 66 exercices corrigés : la partie B est un parcours en 4 niveaux (exercices 1 à 30) ; la partie C est une banque de 36 exercices classés par thème (Barycentre de deux points, Trois points et plus, Associativité et alignement, Coordonnées du barycentre, Lignes de niveau, Défis de concours). Tous les corrigés sont regroupés dans la partie D.

Conseil : cherche chaque exercice au moins 10 minutes avant de lire le corrigé. Le numéro de page du corrigé est indiqué à droite de chaque énoncé (il est cliquable dans le PDF).

La carte du chapitre



À la fin du chapitre, je sais...

- | | |
|---|--|
| ☐ justifier l'existence de $\text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$; | ☐ construire le barycentre de trois points ; |
| ☐ construire G sur une droite graduée ; | ☐ utiliser l'associativité (barycentre partiel) ; |
| ☐ utiliser l'homogénéité (coefficients entiers) ; | ☐ démontrer un alignement ; |
| ☐ situer G sur (AB) selon les signes ; | ☐ démontrer un concours de droites ; |
| ☐ réduire $\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} + \gamma \vec{MC}$; | ☐ écrire un point comme barycentre de A, B, C ; |
| ☐ reconnaître un vecteur constant ; | ☐ déterminer une ligne de niveau ; |
| ☐ calculer les coordonnées d'un barycentre ; | ☐ lire des rapports par la méthode des masses. |

Test d'entrée : par où commencer ?

 15 minutes

 Sans calculatrice

 1 point par question

 Réponses sur ta feuille

Avant d'ouvrir le cours, fais le point sur les outils du tronc commun et des chapitres 1 à 4 utiles ici (aucune question ne demande le cours). Corrigé et orientation : **page 68**.

Bloc 1 · Vecteurs et Chasles

___ / 4

① **Relation de Chasles** Simplifier $\vec{u} = \vec{AB} - \vec{CB} + \vec{CD}$, puis montrer que $\vec{MB} - \vec{MA} + \vec{BC}$ ne dépend pas du point M .

② **Placer un point** $AB = 8$ cm et le point M vérifie $\vec{AM} = 3\vec{MB}$. Exprimer $\vec{AM}$ en fonction de $\vec{AB}$, puis calculer AM .

③ **Colinéarité** ABC est un triangle, $\vec{AE} = 2\vec{AB} + \vec{AC}$ et $\vec{BF} = \frac{1}{2}\vec{AC}$. Exprimer $\vec{AF}$ à l'aide de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$; A, E, F sont-ils alignés ?

④ **Appliquer deux fois** f associe à tout point M le milieu $f(M)$ de $[AM]$ (A fixé). Si $N = (f \circ f)(M)$, exprimer $\vec{AN}$ à l'aide de $\vec{AM}$. Résoudre $f(M) = M$.

Bloc 2 · Repère et coordonnées

___ / 4

⑤ **Coordonnées** $A(-1; -2)$ et $B(5; -8)$. Donner les coordonnées du vecteur $\vec{AB}$, du milieu I de $[AB]$ et du point D tel que $\vec{AD} = \frac{1}{3}\vec{AB}$.

⑥ **Déterminant** $K(-1; 7)$, $L(3; -5)$ et $R(-2; 10)$ sont-ils alignés ? Pour quel réel m le point $S(m; -2)$ est-il sur la droite (KL) ?

⑦ **Équations d'une droite** Une équation cartésienne et une représentation paramétrique de la droite passant par $A(1; -2)$, dirigée par $\vec{u}(3; 2)$.

⑧ **Distance** Repère orthonormé ; $A(1; 2)$, $B(4; 6)$, $C(-3; 5)$. Calculer AB et AC . Le point C est-il sur le cercle de centre A passant par B ?

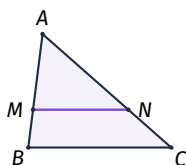
Bloc 3 · Géométrie du triangle

___ / 4

⑨ **Centre de gravité** G est le centre de gravité de ABC , A' le milieu de $[BC]$, $AA' = 9$ cm. Calculer AG , GA' et le réel k tel que $\vec{AG} = k\vec{GA'}$.

⑩ **Droite des milieux** I, J sont les milieux de $[AB]$, $[AC]$. Montrer avec Chasles que $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{BC}$; calculer IJ si $BC = 7$.

⑪ **Thalès** $AM = 4$, $MB = 2$, $AN = 6$, $NC = 3$. Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ? Calculer MN si $BC = 7,5$.



⑫ **Ensembles de points** ABC est un triangle. Décrire l'ensemble des points M du plan tels que $MA = MB$, puis celui des points M tels que $MA = MB = MC$.

Temps écoulé ?

Pose le crayon, compte tes points bloc par bloc et corrige-toi **page 68**.

Bloc 1

___ / 4

+

Bloc 2

___ / 4

+

Bloc 3

___ / 4

=

Mon score

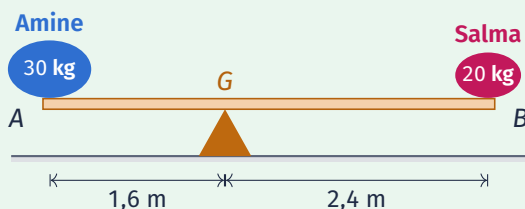
___ / 12

Partie A • Le cours

Définitions, théorèmes, méthodes, pièges et astuces de concours

1 Points pondérés et équilibre

Amine (30 kg) et Salma (20 kg) jouent sur une balançoire à bascule dont la planche mesure 4 m. Où placer le pivot pour que la planche soit en équilibre ? L'expérience répond : **plus près du plus lourd**. Le barycentre est la traduction mathématique de cette idée de **point d'équilibre**.



La loi du levier (Archimède). Une planche légère portant une masse m_A en A et une masse m_B en B est en équilibre sur un pivot G de [AB] lorsque $m_A \times GA = m_B \times GB$. Ici $30 GA = 20 GB$ et $GA + GB = 4$, d'où $GA = 1,6$ m et $GB = 2,4$ m (contrôle : $30 \times 1,6 = 20 \times 2,4 = 48$). Comme $\vec{GA}$ et $\vec{GB}$ sont de sens contraires, l'équilibre s'écrit avec des vecteurs :

$$30 \vec{GA} + 20 \vec{GB} = \vec{0}.$$

Définition : point pondéré

Un **point pondéré** est un couple (A, α) formé d'un point A du plan et d'un nombre réel α , appelé **coefficient** (ou **poids**, ou **masse**) du point A. Un **système de points pondérés** est une liste $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)$; le nombre $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ est la **somme des coefficients** du système.

En physique, une masse est positive. En mathématiques, on autorise **tout réel** : un coefficient négatif joue le rôle d'un ballon gonflé à l'hélium qui tire la planche vers le haut, ou d'un trou découpé dans une plaque (section 11). Le seul cas qui posera problème est celui d'une **somme des coefficients nulle**.

Rappels du tronc commun (indispensables dans tout le chapitre)

Chasles : pour tous points A, B, M :
 $\vec{AB} = \vec{AM} + \vec{MB}$; $\vec{BA} = -\vec{AB}$.

Un point, un vecteur : pour tout point A et tout vecteur $\vec{u}$, il existe un **unique** point G tel que $\vec{AG} = \vec{u}$.

Colinéarité : A, B, C alignés ($A \neq B$) $\iff$ il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{AC} = t\vec{AB}$.

Déterminant : pour $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$,
 $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' - x'y$; $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires
 $\iff \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Milieu : I milieu de [AB] $\iff \vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$; pour tout point M, $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$.

Centre de gravité : les médianes d'un triangle ABC se coupent en G ; $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ et $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AA'}$ (A' milieu de [BC]).

Norme : $\|\vec{AB}\| = AB$; $\|k\vec{u}\| = |k| \|\vec{u}\|$; dans un repère **orthonormé**, $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

Remarque. Un peu d'histoire. Le mot vient du grec *barus*, « lourd » : le barycentre est le « centre des poids ». **Archimède** de Syracuse (III^e siècle av. J.-C.) énonce la loi du levier dans *De l'équilibre des plans* (« Donnez-moi un point d'appui, et je soulèverai le monde ») et y prouve que le centre de gravité d'une plaque triangulaire est le point de concours de ses médianes. En 1827, l'Allemand **August Ferdinand Möbius** publie *Der barycentrische Calcul* (le calcul barycentrique) : il autorise les coefficients négatifs, repère chaque point du plan par trois « masses » posées aux sommets d'un triangle (section 9) et fait du barycentre un véritable outil de calcul géométrique.

2 Barycentre de deux points

Théorème (existence et unicité)

Soit (A, α) et (B, β) deux points pondérés.

- Si $\alpha + \beta \neq 0$, il existe un **unique** point G tel que $\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} = \vec{0}$; il est défini par

$$\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} = \vec{0} \iff \vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \vec{AB}.$$

- Si $\alpha + \beta = 0$ (avec $\alpha \neq 0$) et $A \neq B$, **aucun** point G ne vérifie $\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} = \vec{0}$.

Démonstration. Soit G un point du plan. D'après Chasles, $\vec{GB} = \vec{GA} + \vec{AB}$, donc

$$\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} = \alpha \vec{GA} + \beta \vec{GA} + \beta \vec{AB} = (\alpha + \beta) \vec{GA} + \beta \vec{AB}.$$

Si $\alpha + \beta \neq 0$: $\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} = \vec{0} \iff (\alpha + \beta) \vec{GA} = -\beta \vec{AB} \iff \vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \vec{AB}$ (on divise par $\alpha + \beta \neq 0$). Or il existe un unique point G tel que $\vec{AG}$ soit égal à un vecteur donné : d'où l'existence **et** l'unicité. **Si $\alpha + \beta = 0$:** $\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} = \beta \vec{AB}$ ne dépend pas de G et n'est jamais nul ($\beta = -\alpha \neq 0$ et $A \neq B$) : aucun point ne convient. $\square$

Définition : barycentre de deux points

Lorsque $\alpha + \beta \neq 0$, l'unique point G tel que $\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} = \vec{0}$ est le **barycentre** des points pondérés (A, α) et (B, β) ; on note $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$. Lorsque $\alpha = \beta$, G est l'**isobarycentre** de A et B : c'est le **milieu** de $[AB]$, car $\alpha \vec{GA} + \alpha \vec{GB} = \vec{0} \iff \vec{GA} + \vec{GB} = \vec{0}$.

En échangeant les rôles de A et B : $\vec{BG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \vec{BA}$. Et en prenant les normes dans $\alpha \vec{GA} = -\beta \vec{GB}$: $|\alpha| GA = |\beta| GB$: c'est la loi du levier. Ainsi, pour la balançoire, $G = \text{Bar}\{(A, 30); (B, 20)\}$ et $\vec{AG} = \frac{20}{50} \vec{AB}$: $AG = \frac{2}{5} \times 4 = 1,6$ m.

Méthode : Comment construire un barycentre de deux points

1. Vérifier que $\alpha + \beta \neq 0$.
2. Calculer $k = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$: le coefficient de l'**autre** point (ici B), divisé par la somme.
3. Placer G tel que $\vec{AG} = k \vec{AB}$, en graduant la droite (AB) avec A pour origine et une fraction de AB pour unité.
4. Contrôler : G est plus proche du point de plus grand coefficient (en valeur absolue), et $G \in [AB]$ si et seulement si α et β ont le même signe.

Modèle de rédaction (pour $G = \text{Bar}\{(A, 3); (B, -1)\}$). « La somme des coefficients vaut $3 + (-1) = 2 \neq 0$, donc le barycentre G existe. Par définition, $3\vec{GA} - \vec{GB} = \vec{0}$; avec Chasles, $3\vec{GA} - (\vec{GA} + \vec{AB}) = \vec{0}$, soit $2\vec{GA} = \vec{AB}$, donc $\vec{AG} = -\frac{1}{2}\vec{AB}$. On place G sur (AB) , du côté opposé à B par rapport à A , avec $AG = \frac{1}{2}AB$. »

Exemple : cinq barycentres sur une droite graduée

On gradue (AB) en prenant $\frac{1}{6}AB$ pour unité : A a pour abscisse 0 et B pour abscisse 6. Pour chaque système, on calcule $k = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$, puis l'abscisse $6k$ du barycentre :

point	E	G_1	I	G_2	F
système	$\{(A, 3); (B, -1)\}$	$\{(A, 2); (B, 1)\}$	$\{(A, 1); (B, 1)\}$	$\{(A, 1); (B, 5)\}$	$\{(A, -1); (B, 3)\}$
$k = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{2}$
abscisse $6k$	-3	2	3	5	9



Contrôle pour E : $\vec{EA}$ et $\vec{EB}$ ont pour mesures 3 et 9 sur l'axe, et $3 \times 3 + (-1) \times 9 = 0$. G_1 et G_2 sont du côté du point le plus lourd ; E et F , de coefficients de signes contraires, sont hors de $[AB]$.

Homogénéité

Si $\alpha + \beta \neq 0$, pour tout réel $k \neq 0$: $\text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\} = \text{Bar}\{(A, k\alpha); (B, k\beta)\}$.

On peut donc multiplier ou diviser tous les coefficients par un même réel **non nul**.

Démonstration. $k\alpha + k\beta = k(\alpha + \beta) \neq 0$, et $k\alpha\vec{GA} + k\beta\vec{GB} = \vec{0} \iff k(\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB}) = \vec{0} \iff \alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} = \vec{0}$, car $k \neq 0$. $\square$

Exemples : $(\times 6) : \text{Bar}\{(A, \frac{1}{2}); (B, \frac{1}{3})\} = \text{Bar}\{(A, 3); (B, 2)\}$; $(\div (-2)) : \text{Bar}\{(A, -4); (B, -6)\} = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 3)\}$; $(\div 5) : \text{Bar}\{(A, 2); (B, 3)\} = \text{Bar}\{(A, \frac{2}{5}); (B, \frac{3}{5})\}$. On choisit des coefficients **entiers**, ou de **somme 1**.

Position de G sur la droite (AB)

Soit $A \neq B$, $\alpha + \beta \neq 0$ et $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$. Alors $G \in (AB)$ et :

- si α et β sont de **même signe**, G appartient au **segment** $[AB]$;
- s'ils sont de **signes contraires**, G est **hors** de $[AB]$, du côté du point dont le coefficient a la plus grande valeur absolue ;
- $|\alpha| GA = |\beta| GB$: G est plus proche du point le plus « lourd » ; si $\beta = 0$, alors $G = A$.

Démonstration. $\vec{AG} = k\vec{AB}$ avec $k = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$, donc $G \in (AB)$, et $G \in [AB] \iff 0 \leq k \leq 1$. **Même signe :** $k = \frac{|\beta|}{|\alpha| + |\beta|} \in [0, 1]$. **Signes contraires**, $|\alpha| > |\beta|$: $\alpha + \beta$ a le signe de α , opposé à celui de β , donc $k < 0$: G est au-delà de A . **Signes contraires**, $|\beta| > |\alpha|$: $\alpha + \beta$ a le signe de β et $|\alpha + \beta| = |\beta| - |\alpha| < |\beta|$, donc $k > 1$: G est au-delà de B . $\square$

Écrire un point de (AB) comme barycentre

Pour tout réel t : $\vec{AG} = t\vec{AB} \iff G = \text{Bar}\{(A, 1-t); (B, t)\}$

En effet, $\text{Bar}\{(A, 1-t); (B, t)\}$ est défini par $\vec{AG} = \frac{t}{(1-t)+t}\vec{AB} = t\vec{AB}$. **Exemple** : si $\vec{AG} = -\frac{2}{3}\vec{AB}$, alors $G = \text{Bar}\{(A, \frac{5}{3}); (B, -\frac{2}{3})\} = \text{Bar}\{(A, 5); (B, -2)\}$ (on multiplie par 3). Contrôle : signes contraires et $|5| > |-2|$, donc G est hors de $[AB]$, du côté de A .

3 Réduire une somme vectorielle

Théorème (réduction)

Soit (A, α) et (B, β) deux points pondérés.

- Si $\alpha + \beta \neq 0$ et $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$, alors pour **tout** point M :

$$\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} = (\alpha + \beta)\vec{MG}.$$

- Si $\alpha + \beta = 0$, alors pour tout point M : $\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} = \alpha\vec{BA}$: ce vecteur **ne dépend pas** de M .

Démonstration. Avec Chasles, en passant par G :

$$\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} = \alpha(\vec{MG} + \vec{GA}) + \beta(\vec{MG} + \vec{GB}) = (\alpha + \beta)\vec{MG} + \underbrace{\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB}}_{=\vec{0}}.$$

Si $\beta = -\alpha$: $\alpha\vec{MA} - \alpha\vec{MB} = \alpha(\vec{MA} + \vec{BM}) = \alpha\vec{BA}$. $\square$

Réciproque. Si un point G' vérifie $\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} = (\alpha + \beta)\vec{MG'}$ pour **un seul** point M , alors $(\alpha + \beta)\vec{MG'} = (\alpha + \beta)\vec{MG}$, donc $\vec{MG'} = \vec{MG}$ et $G' = G$. **Trois usages** : avec $M = A$, on retrouve $\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\vec{AB}$ (**construire**) ; avec $M = O$, origine d'un repère, on obtient les coordonnées de G (section 4) ; et pour M quelconque, une somme de deux vecteurs qui dépendent de M devient **un seul** vecteur (**simplifier** : lignes de niveau, section 10).

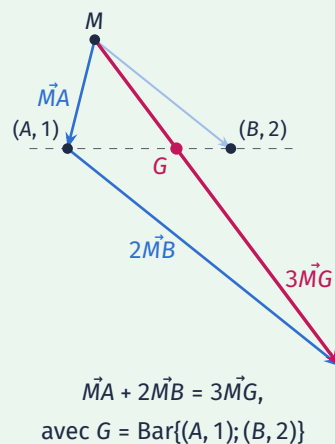
Exemple : trouver le point P tel que $2\vec{PA} + 3\vec{PB} = \vec{AB}$

Par réduction. Soit $G = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 3)\}$, défini par $\vec{AG} = \frac{3}{5}\vec{AB}$. Pour $M = P$: $2\vec{PA} + 3\vec{PB} = 5\vec{PG}$. L'égalité devient $5\vec{PG} = \vec{AB}$, soit $\vec{GP} = -\frac{1}{5}\vec{AB}$, et $\vec{AP} = \vec{AG} + \vec{GP} = \frac{3}{5}\vec{AB} - \frac{1}{5}\vec{AB} = \frac{2}{5}\vec{AB}$.

Par Chasles seul. $2\vec{PA} + 3(\vec{PA} + \vec{AB}) = \vec{AB} \iff 5\vec{PA} = -2\vec{AB} \iff \vec{AP} = \frac{2}{5}\vec{AB}$. Donc $\vec{AP} = \frac{2}{5}\vec{AB}$: $P = \text{Bar}\{(A, 3); (B, 2)\}$.

Exemple : réduire, ou reconnaître un vecteur constant

- $3\vec{MA} - \vec{MB} = 2\vec{ME}$ pour tout M , avec $E = \text{Bar}\{(A, 3); (B, -1)\}$, le point d'abscisse -3 de la section 2 ($\vec{AE} = -\frac{1}{2}\vec{AB}$). Contrôle avec $M = B$: $3\vec{BA} = 2\vec{BE}$, car $\vec{BE} = \vec{BA} + \vec{AE} = \frac{3}{2}\vec{BA}$.
- $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$ (I milieu de $[AB]$) : c'est le rappel du tronc commun, cas $\alpha = \beta = 1$.
- $5\vec{MA} - 5\vec{MB} = 5\vec{BA}$ pour tout M : la somme des coefficients est nulle, le vecteur est **constant**.



4

Coordonnées du barycentre

Coordonnées du barycentre

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan (orthonormé ou non), si $\alpha + \beta \neq 0$ et $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$:

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta}$$

$$y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha + \beta}$$

Démonstration. La réduction en $M = O$ donne $(\alpha + \beta)\vec{OG} = \alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB}$, soit $\vec{OG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}\vec{OA} + \frac{\beta}{\alpha + \beta}\vec{OB}$; or les coordonnées de $\vec{OG}$, $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ sont celles des points G , A , B . $\square$

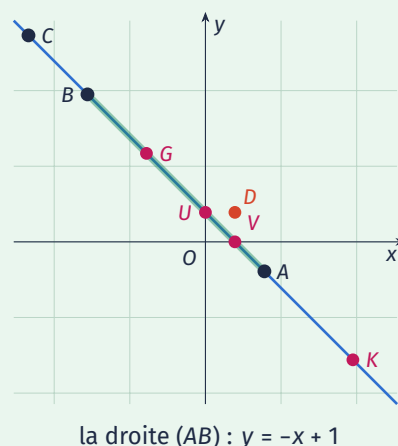
Les coordonnées de G sont des **moyennes pondérées** de celles de A et B (pour $\alpha = \beta$: le milieu).

Méthode : alignement et coefficients dans un repère

Alignement : A, B, C alignés $\iff \det(\vec{AB}, \vec{AC}) = 0$. **Coefficients** : si $\vec{AC} = t\vec{AB}$, alors $C = \text{Bar}\{(A, 1 - t); (B, t)\}$ (section 2) ; on lit t sur une coordonnée non nulle de $\vec{AB}$.

Exemple. Dans un repère, $A(2; -1)$ et $B(-4; 5)$; $\vec{AB}(-6; 6)$.

- $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$: $x_G = \frac{2-8}{3} = -2$, $y_G = \frac{-1+10}{3} = 3$: $G(-2; 3)$.
- $K = \text{Bar}\{(A, 3); (B, -1)\}$: $x_K = \frac{6-4}{2} = 5$, $y_K = \frac{-3-5}{2} = -4$: $K(5; -4)$.
- (AB) coupe l'axe des ordonnées en un barycentre U de A et B tel que $\alpha x_A + \beta x_B = 0$: $2\alpha - 4\beta = 0$, d'où $\alpha = 2$, $\beta = 1$ et $U(0; \frac{-2+5}{3}) = (0; 1)$. Pour l'axe des abscisses : $\alpha y_A + \beta y_B = 0$ donne $\alpha = 5$, $\beta = 1$ et $V(\frac{10-4}{6}; 0) = (1; 0)$. La droite (AB) a pour équation $y = -x + 1$: G, K, U, V la vérifient.
- $C(-6; 7)$: $\vec{AC}(-8; 8) = \frac{4}{3}\vec{AB}$, donc $C = \text{Bar}\{(A, -\frac{1}{3}); (B, \frac{4}{3})\} = \text{Bar}\{(A, -1); (B, 4)\}$. Contrôle : $\frac{-2-16}{3} = -6$ et $\frac{1+20}{3} = 7$.
- $D(1; 1)$: $\vec{AD}(-1; 2)$ et $\det(\vec{AB}, \vec{AD}) = (-6) \times 2 - 6 \times (-1) = -6 \neq 0$: A, B, D ne sont pas alignés, donc D n'est **pas** un barycentre de A et B (section 5).



la droite (AB) : $y = -x + 1$

5

Droites et segments

Théorème (droite, segment, demi-droites)

Soit A et B deux points distincts.

- La **droite** (AB) est l'ensemble des barycentres de A et B (coefficients de somme non nulle) : $M \in (AB) \iff \exists t \in \mathbb{R}, M = \text{Bar}\{(A, 1 - t); (B, t)\}$.
- Le **segment** $[AB]$ est l'ensemble des barycentres de A et B affectés de coefficients de **même signe** : $M \in [AB] \iff \exists t \in [0, 1], M = \text{Bar}\{(A, 1 - t); (B, t)\}$.
- La **demi-droite** $[AB)$ correspond à $t \geq 0$, la demi-droite $[BA)$ à $t \leq 1$.

Démonstration. $M \in (AB) \iff \vec{AM}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires $\iff \exists t \in \mathbb{R}, \vec{AM} = t\vec{AB} \iff \exists t \in \mathbb{R}, M = \text{Bar}\{(A, 1-t); (B, t)\}$ (section 2). Ensuite $M \in [AB] \iff t \in [0, 1] \iff (1-t \geq 0 \text{ et } t \geq 0)$. Enfin, tout barycentre $\text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ s'écrit aussi $\text{Bar}\{(A, \frac{\alpha}{\alpha+\beta}); (B, \frac{\beta}{\alpha+\beta})\}$ (homogénéité), et cette division par $\alpha + \beta$ ne change pas le fait que les deux coefficients aient, ou non, le même signe. $\square$

$$M = \text{Bar}\{(A, 1-t); (B, t)\}, \vec{AM} = t\vec{AB}$$



Méthode : Comment montrer un alignement

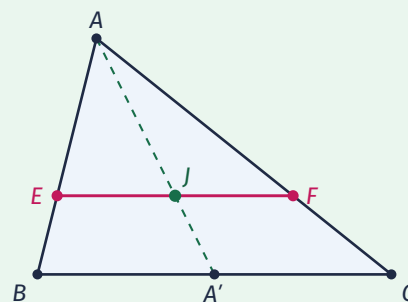
Pour montrer que trois points E, F, K sont alignés, on peut : 1. écrire l'un d'eux comme **barycentre** des deux autres ; 2. montrer que $\vec{EK} = k\vec{EF}$ en décomposant tous les vecteurs dans une même base, par exemple $(\vec{AB}, \vec{AC})$; 3. dans un repère, montrer que $\det(\vec{EF}, \vec{EK}) = 0$; 4. utiliser l'**associativité** (section 7) : un point obtenu en regroupant des points pondérés en E et en F est sur (EF) .

Exemple : un parallélisme, puis un alignement

Soit ABC un triangle, $E = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$ et $F = \text{Bar}\{(A, 1); (C, 2)\}$.

1. $\vec{AE} = \frac{2}{3}\vec{AB}$ et $\vec{AF} = \frac{2}{3}\vec{AC}$, donc $\vec{EF} = \vec{AF} - \vec{AE} = \frac{2}{3}(\vec{AC} - \vec{AB}) = \frac{2}{3}\vec{BC}$: $(EF) \parallel (BC)$ et $EF = \frac{2}{3}BC$ (on retrouve Thalès).

2. Soit J le milieu de $[EF]$ et A' celui de $[BC]$. Alors $\vec{AJ} = \frac{1}{2}(\vec{AE} + \vec{AF}) = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC}) = \frac{1}{3} \times 2\vec{AA'} = \frac{2}{3}\vec{AA'}$. Donc A, J, A' sont alignés, et J est le point de la médiane $[AA']$ tel que $AJ = \frac{2}{3}AA'$: J est le centre de gravité de ABC .



6

Barycentre de trois points

Théorème et définition

Soit $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$ trois points pondérés tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Il existe un **unique** point G tel que $\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} + \gamma\vec{GC} = \vec{0}$: c'est le **barycentre** de ces trois points pondérés, noté $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$. Il est défini par

$$\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{AB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{AC}.$$

Démonstration. Pour tout point G , Chasles donne $\alpha\vec{GA} + \beta(\vec{GA} + \vec{AB}) + \gamma(\vec{GA} + \vec{AC}) = (\alpha + \beta + \gamma)\vec{GA} + \beta\vec{AB} + \gamma\vec{AC}$. Ce vecteur est nul si et seulement si $(\alpha + \beta + \gamma)\vec{AG} = \beta\vec{AB} + \gamma\vec{AC}$, ce qui définit un unique point G puisque $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. $\square$

Propriétés (comme pour deux points)

Soit $s = \alpha + \beta + \gamma$.

• **Réduction** : si $s \neq 0$, pour tout point M , $\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} + \gamma\vec{MC} = s\vec{MG}$; si $s = 0$, le vecteur

$\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} + \gamma \vec{MC} = \beta \vec{AB} + \gamma \vec{AC}$ ne dépend pas de M .

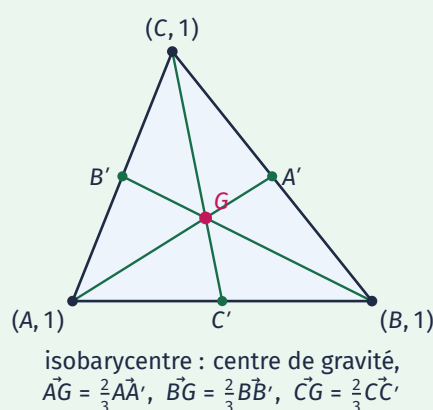
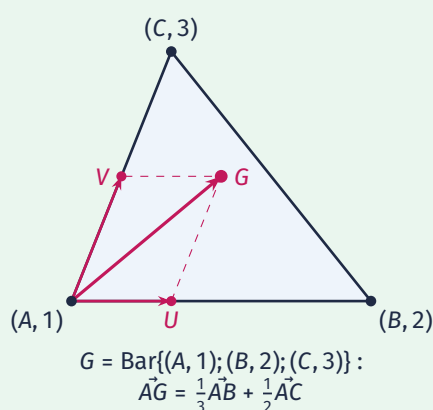
• **Coordonnées** : $x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{s}$, $y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{s}$.

• **Homogénéité** : on peut multiplier les trois coefficients par un même réel non nul ; l'ordre des points ne compte pas.

Démonstrations. Comme pour deux points : $\sum \alpha(\vec{MG} + \vec{GA}) = s\vec{MG} + \vec{0}$; si $s = 0$, on remplace α par $-\beta - \gamma$: $\beta(\vec{MB} - \vec{MA}) + \gamma(\vec{MC} - \vec{MA}) = \beta \vec{AB} + \gamma \vec{AC}$; enfin $M = O$ donne les coordonnées. $\square$

Méthode : Comment construire le barycentre de trois points

1. Vérifier que $s = \alpha + \beta + \gamma \neq 0$. 2. Écrire $\vec{AG} = \frac{\beta}{s} \vec{AB} + \frac{\gamma}{s} \vec{AC}$. 3. Placer U et V tels que $\vec{AU} = \frac{\beta}{s} \vec{AB}$ et $\vec{AV} = \frac{\gamma}{s} \vec{AC}$, puis compléter le **parallélogramme** $AUGV$ (car $\vec{AG} = \vec{AU} + \vec{AV}$). **Autre méthode** : l'associativité (section 7), souvent plus rapide.



Théorème (centre de gravité)

L'isobarycentre $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, 1)\}$ d'un triangle ABC vérifie $\vec{AG} = \frac{2}{3} \vec{AA'}$, où A' est le milieu de $[BC]$; de même pour B et C . Les trois médianes sont donc **concurrentes** en G , le **centre de gravité** du triangle.

Démonstration. $\vec{AG} = \frac{1}{3} \vec{AB} + \frac{1}{3} \vec{AC} = \frac{1}{3} (\vec{AB} + \vec{AC}) = \frac{1}{3} \times 2 \vec{AA'}$ (rappel du milieu en $M = A$). Comme l'ordre des points ne compte pas, on obtient de même $\vec{BG} = \frac{2}{3} \vec{BB'}$ et $\vec{CG} = \frac{2}{3} \vec{CC'}$: G est sur les trois médianes. Le théorème du tronc commun est ainsi **démontré**. $\square$

Exemple : trois calculs à connaître

- **Le quatrième sommet d'un parallélogramme.** $D = \text{Bar}\{(A, 1); (B, -1); (C, 1)\}$ (somme 1) est défini par $\vec{AD} = -\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{BC}$: $ABCD$ est un parallélogramme. Un coefficient négatif n'a rien d'exotique !
- **Réduire.** $2\vec{MA} - \vec{MB} + 3\vec{MC} = 4\vec{MK}$ pour tout M , avec $K = \text{Bar}\{(A, 2); (B, -1); (C, 3)\}$, défini par $\vec{AK} = -\frac{1}{4} \vec{AB} + \frac{3}{4} \vec{AC}$.
- **Somme nulle.** $\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC}$ ne dépend pas de M ; en prenant $M = C$, il vaut $\vec{CA} + \vec{CB} = 2\vec{CI}$, où I est le milieu de $[AB]$.

7

L'associativité

Théorème (barycentre partiel)

Soit $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$, avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Si $\alpha + \beta \neq 0$ et $H = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$, alors

$$G = \text{Bar}\{(H, \alpha + \beta); (C, \gamma)\}.$$

On peut **remplacer deux points pondérés par leur barycentre** (le **barycentre partiel**), affecté de la **somme** de leurs coefficients, à condition que cette somme ne soit pas nulle. En particulier, G appartient à la droite (CH) .

Démonstration. La réduction (section 3) au point $M = G$ donne $\alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} = (\alpha + \beta) \vec{GH}$. Donc

$$\vec{0} = \alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} + \gamma \vec{GC} = (\alpha + \beta) \vec{GH} + \gamma \vec{GC},$$

et comme $(\alpha + \beta) + \gamma \neq 0$, G est le barycentre de $(H, \alpha + \beta)$ et (C, γ) . □

Deux constructions de plus. En regroupant A et B : $G \in (CH)$, et $\vec{CG} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{CH}$. On peut regrouper n'importe quelle paire de points dont la somme des coefficients n'est pas nulle : on obtient trois droites qui passent par G .

Méthode : Comment montrer que trois droites sont concourantes

1. Chaque droite joint un sommet à un point du côté opposé : écrire ces trois points comme barycentres, $A' = \text{Bar}\{(B, \beta); (C, \gamma)\}$, $B' = \text{Bar}\{(A, \alpha); (C, \gamma)\}$, $C' = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$, avec les **mêmes** coefficients α, β, γ (l'homogénéité permet de les ajuster). 2. Introduire $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$, après avoir vérifié que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. 3. Par associativité, $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (A', \beta + \gamma)\} \in (AA')$, et de même $G \in (BB')$ et $G \in (CC')$. 4. Conclure : les trois droites passent par G .

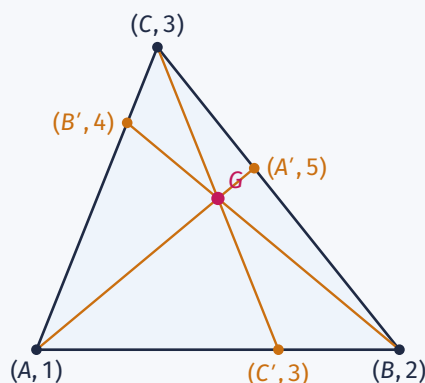
Modèle de rédaction. « On a $A' = \text{Bar}\{(B, \beta); (C, \gamma)\}$, ... Comme $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, le point $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ existe. Comme $\beta + \gamma \neq 0$, on peut remplacer (B, β) et (C, γ) par leur barycentre partiel $(A', \beta + \gamma)$: d'après le théorème d'associativité, $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (A', \beta + \gamma)\}$, donc $G \in (AA')$. De même... Les droites (AA') , (BB') et (CC') sont donc concourantes en G . »

Exemple : trois droites concourantes dans un triangle

Soit ABC un triangle, $A' \in [BC]$ tel que $BA' = \frac{3}{5}BC$, $B' \in [AC]$ tel que $AB' = \frac{3}{4}AC$, et $C' \in [AB]$ tel que $AC' = \frac{2}{3}AB$. Montrons que (AA') , (BB') , (CC') sont concourantes.

Traduction. $\vec{BA'} = \frac{3}{5}\vec{BC}$, donc $A' = \text{Bar}\{(B, \frac{2}{5}); (C, \frac{3}{5})\} = \text{Bar}\{(B, 2); (C, 3)\}$. De même $B' = \text{Bar}\{(A, 1); (C, 3)\}$ et $C' = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$: les **mêmes** masses 1, 2, 3 en A, B, C .

Associativité. Soit $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 2); (C, 3)\}$ (somme 6 $\neq 0$). Alors $G = \text{Bar}\{(A, 1); (A', 5)\}$,



$G = \text{Bar}\{(B, 2); (B', 4)\}$ et $G = \text{Bar}\{(C, 3); (C', 3)\}$: les trois droites passent par G , et

$$\vec{AG} = \frac{5}{6}\vec{AA'}, \quad \vec{BG} = \frac{2}{3}\vec{BB'}, \quad G \text{ milieu de } [CC'].$$

C'est le point construit en section 6 ; la construction la plus rapide est : « G milieu de $[CC']$ ».

Attention, piège ! une somme partielle nulle

On ne peut **pas** regrouper deux points dont la somme des coefficients est nulle : le barycentre partiel n'existe pas. Pour $D = \text{Bar}\{(A, 1); (B, -1); (C, 1)\}$, on ne regroupe pas $(A, 1)$ et $(B, -1)$; on regroupe $(A, 1)$ et $(C, 1)$, de barycentre J , milieu de $[AC]$: $D = \text{Bar}\{(J, 2); (B, -1)\}$, d'où $J\vec{D} = \frac{-1}{2-1}\vec{JB} = -\vec{JB}$. Ainsi J est aussi le milieu de $[BD]$: les diagonales de $ABCD$ ont le même milieu, et l'on retrouve le parallélogramme de la section 6.

8

Barycentre de n points

Théorème et définition

Soit $n \geq 2$ et $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)$ des points pondérés de somme $s = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \neq 0$. Il existe un **unique** point G tel que $\alpha_1 \vec{GA}_1 + \alpha_2 \vec{GA}_2 + \dots + \alpha_n \vec{GA}_n = \vec{0}$: c'est le **barycentre** du système, noté $\text{Bar}\{(A_1, \alpha_1); \dots; (A_n, \alpha_n)\}$; il est défini par $A_1 \vec{G} = \frac{1}{s}(\alpha_2 A_1 \vec{A}_2 + \dots + \alpha_n A_1 \vec{A}_n)$. Si tous les coefficients sont égaux, G est l'**isobarycentre** des points $A_1, \dots, A_n$.

Démonstration. Comme pour trois points : avec Chasles, $\sum_{k=1}^n \alpha_k \vec{GA}_k = \sum_{k=1}^n \alpha_k (\vec{GA}_1 + A_1 \vec{A}_k) = s \vec{GA}_1 + \sum_{k=2}^n \alpha_k A_1 \vec{A}_k$, qui est nul si et seulement si $A_1 \vec{G} = \frac{1}{s} \sum_{k=2}^n \alpha_k A_1 \vec{A}_k$. $\square$

Les règles de calcul

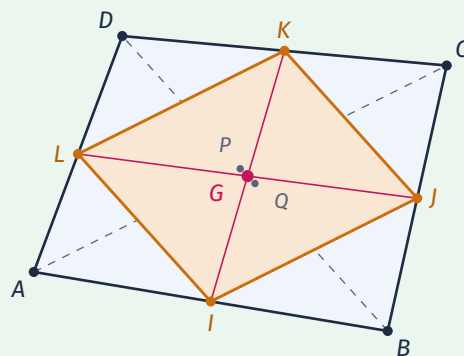
- **Réduction** : si $s \neq 0$, $\sum_{k=1}^n \alpha_k \vec{MA}_k = s \vec{MG}$ pour tout point M ; si $s = 0$, ce vecteur ne dépend pas de M .
- **Coordonnées** : $x_G = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^n \alpha_k x_{A_k}$ et $y_G = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^n \alpha_k y_{A_k}$. **Homogénéité** ; l'ordre des points est indifférent.
- **Associativité** : on peut remplacer plusieurs des points pondérés, dont la somme s' des coefficients n'est pas nulle, par leur barycentre partiel affecté du coefficient s' .
- **Fusion** : (A, α) et (A, α') peuvent être remplacés par $(A, \alpha + \alpha')$, et inversement on peut « dédoubler » un point ; un point de coefficient 0 peut être retiré ou ajouté.

Démonstrations. Réduction et coordonnées : comme en section 6. Associativité : si H est le barycentre partiel, la réduction en $M = G$ remplace la somme partielle par $s' \vec{GH}$ dans $\sum \alpha_k \vec{GA}_k = \vec{0}$. Fusion : $\alpha \vec{GA} + \alpha' \vec{GA} = (\alpha + \alpha') \vec{GA}$. $\square$

Théorème de Varignon. Soit $ABCD$ un quadrilatère, I, J, K, L les milieux de $[AB], [BC], [CD], [DA]$, et P, Q ceux des diagonales $[AC]$ et $[BD]$. Soit G l'isobarycentre de A, B, C, D . En regroupant les quatre points deux par deux (associativité) :

$$G = \text{Bar}\{(I, 2); (K, 2)\} = \text{Bar}\{(J, 2); (L, 2)\} = \text{Bar}\{(P, 2); (Q, 2)\}.$$

G est le milieu commun de $[IK], [JL]$ et $[PQ]$. Les diagonales de $IJKL$ ont donc le même milieu : $IJKL$ est un **parallélogramme**, le **parallélogramme de Varignon** ; ses côtés sont parallèles aux diagonales de $ABCD$, car $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{AC} = \vec{LK}$ (droite des milieux). Si $ABCD$ est lui-même un parallélogramme, $P = Q = G$ est son centre.



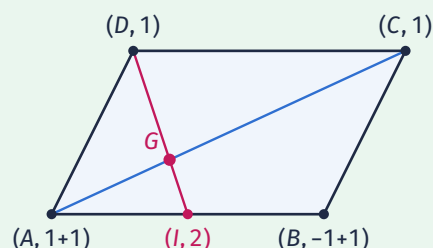
Exemple : un grand classique : la diagonale coupée au tiers

Soit $ABCD$ un parallélogramme et I le milieu de $[AB]$. Montrons que (DI) coupe (AC) en G tel que $\vec{AG} = \frac{1}{3}\vec{AC}$.

Idée : $D = \text{Bar}\{(A, 1); (B, -1); (C, 1)\}$ (section 6) et $I = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 1)\}$: en réunissant ces deux systèmes, les masses de B s'annulent.

Rédaction. Soit $G = \text{Bar}\{(A, 2); (C, 1)\}$, le point de (AC) tel que $\vec{AG} = \frac{1}{3}\vec{AC}$. On dédouble $(A, 2)$ en $(A, 1)$, $(A, 1)$ et on ajoute $(B, -1)$, $(B, 1)$ (masse totale nulle) : $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, -1); (C, 1); (A, 1); (B, 1)\}$. On regroupe les trois premiers (somme 1) et les deux derniers (somme 2) : $G = \text{Bar}\{(D, 1); (I, 2)\}$, donc $G \in (DI)$ et $\vec{DG} = \frac{2}{3}\vec{DI}$. Les droites (AC) et (DI) sont distinctes ($D \notin (AC)$) et passent par G : c'est leur point d'intersection, et

$$\vec{AG} = \frac{1}{3}\vec{AC}, \quad \vec{IG} = \frac{1}{3}\vec{ID}.$$



9 Un point dans un triangle

Théorème (coordonnées barycentriques)

Soit A, B, C trois points **non alignés**. Tout point M du plan est un barycentre de A, B, C : si $(x; y)$ sont les coordonnées de M dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$, c'est-à-dire si $\vec{AM} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$, alors

$$M = \text{Bar}\{(A, 1 - x - y); (B, x); (C, y)\}.$$

Les coefficients (α, β, γ) tels que $M = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ sont uniques **à un facteur non nul près** : ce sont des **coordonnées barycentriques** de M (uniques si l'on impose $\alpha + \beta + \gamma = 1$).

Démonstration. A, B, C ne sont pas alignés, donc $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires et $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$ est un repère : le couple $(x; y)$ existe et il est unique. Le barycentre de $(A, 1 - x - y), (B, x), (C, y)$ (somme 1) est défini par $\vec{AG} = x\vec{AB} + y\vec{AC} = \vec{AM}$: c'est M . **Unicité :** si $M = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ avec $s = \alpha + \beta + \gamma \neq 0$, alors $\vec{AM} = \frac{\beta}{s}\vec{AB} + \frac{\gamma}{s}\vec{AC}$, donc $\frac{\beta}{s} = x$ et $\frac{\gamma}{s} = y$ (unicité des coordonnées), puis $\frac{\alpha}{s} = 1 - x - y$: $(\alpha, \beta, \gamma) = s(1 - x - y, x, y)$. $\square$

Théorème (intérieur d'un triangle)

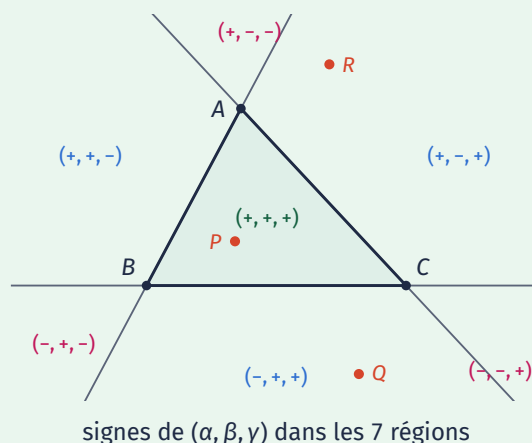
Soit $M = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$, avec A, B, C non alignés. Le point M appartient au triangle plein ABC (intérieur et côtés) si et seulement si α, β, γ sont **de même signe** (au sens large). Il est **strictement à l'intérieur** si et seulement si α, β, γ sont non nuls et de même signe. Enfin, $\alpha = 0 \iff M \in (BC)$.

Démonstration. Par homogénéité, on suppose $\alpha + \beta + \gamma = 1$. ($\Leftarrow$) Si $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ et $\beta + \gamma > 0$, alors $H = \text{Bar}\{(B, \beta); (C, \gamma)\} \in [BC]$ et $M = \text{Bar}\{(A, \alpha); (H, \beta + \gamma)\} \in [AH]$ (associativité, coefficients positifs) : M est dans le triangle (si $\beta + \gamma = 0$, $M = A$). ($\Rightarrow$) Si $M \neq A$ est dans le triangle, la demi-droite $[AM)$ coupe $[BC]$ en H avec $M \in [AH]$: $H = \text{Bar}\{(B, b); (C, c)\}$ et $M = \text{Bar}\{(A, a); (H, h)\}$ avec $a, b, c, h \geq 0$ et $b + c = a + h = 1$; par associativité, $M = \text{Bar}\{(A, a); (B, hb); (C, hc)\}$, et par unicité $(\alpha, \beta, \gamma) = (a, hb, hc)$, de coefficients positifs. Enfin, $M \in (BC) \iff M = \text{Bar}\{(B, \beta'); (C, \gamma')\} = \text{Bar}\{(A, 0); (B, \beta'); (C, \gamma')\} \iff \alpha = 0$ (unicité). $\square$

La carte des signes. Les droites $(BC), (CA), (AB)$ découpent le plan en 7 régions ; dans chacune, le signe de (α, β, γ) (avec $\alpha + \beta + \gamma = 1$) est constant. Le coefficient α change de signe quand M traverse (BC) : il est positif du côté de A . La combinaison $(-, -, -)$ est impossible.

Exemples (figure) :

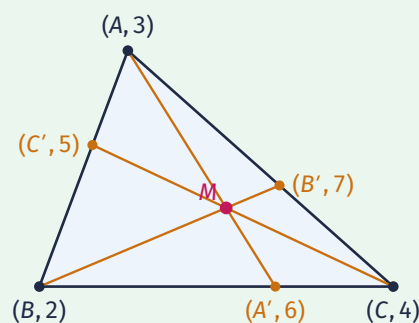
- $\vec{AP} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC}$: $P = \text{Bar}\{(A, \frac{1}{4}); (B, \frac{1}{2}); (C, \frac{1}{4})\} = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 2); (C, 1)\}$: **intérieur** ;
- $\vec{AQ} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AC}$: $Q = \text{Bar}\{(A, -1); (B, 1); (C, 2)\}$: au-delà de (BC) ;
- $\vec{AR} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AC}$: $R = \text{Bar}\{(A, 5); (B, -2); (C, 1)\}$: au-delà de (CA) .


Méthode : lire des rapports sur les côtés

Si $M = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ avec $\beta + \gamma \neq 0$, l'associativité donne $M = \text{Bar}\{(A, \alpha); (A', \beta + \gamma)\}$ avec $A' = \text{Bar}\{(B, \beta); (C, \gamma)\}$: la droite (AM) coupe (BC) en A' , et

$$\vec{BA'} = \frac{\gamma}{\beta + \gamma} \vec{BC}, \quad \vec{AM} = \frac{\beta + \gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \vec{AA'}.$$

Exemple : $M = \text{Bar}\{(A, 3); (B, 2); (C, 4)\}$, intérieur au triangle. (AM) coupe (BC) en $A' = \text{Bar}\{(B, 2); (C, 4)\}$: $\vec{BA'} = \frac{4}{6}\vec{BC}$, donc $\frac{BA'}{A'C} = 2$; et $M = \text{Bar}\{(A, 3); (A', 6)\}$, donc $\vec{AM} = \frac{6}{9}\vec{AA'}$ et $\frac{AM}{MA'} = 2$. De même, (BM) coupe (CA) en $B' = \text{Bar}\{(A, 3); (C, 4)\}$, avec $\frac{AB'}{B'C} = \frac{4}{3}$, et (CM) coupe (AB) en $C' = \text{Bar}\{(A, 3); (B, 2)\}$, avec $\frac{AC'}{C'B} = \frac{2}{3}$.



10 Lignes de niveau

Si f associe un nombre $f(M)$ à chaque point M du plan, la **ligne de niveau** k de f est l'ensemble des points M tels que $f(M) = k$, comme les courbes de niveau d'une carte de randonnée. Grâce à la réduction, les lignes de niveau de $M \mapsto \|\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB}\|$ sont très simples.

Théorème (lignes de niveau de $M \mapsto \|\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} + \gamma\vec{MC}\|$)

Soit $k \in \mathbb{R}$, des points pondérés (A, α) , (B, β) (et éventuellement (C, γ)) de somme s , et l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M tels que $\|\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} + \gamma\vec{MC}\| = k$.

- Si $s \neq 0$, G étant le barycentre : $\|\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} + \gamma\vec{MC}\| = |s| MG$, donc $\mathcal{E}$ est le **cercle** de centre G et de rayon $\frac{k}{|s|}$ si $k > 0$; le **point** G si $k = 0$; l'**ensemble vide** si $k < 0$.
- Si $s = 0$, le vecteur $\vec{w} = \alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} + \gamma\vec{MC}$ ne dépend pas de M : $\mathcal{E}$ est le **plan** si $\|\vec{w}\| = k$, et l'**ensemble vide** sinon.

Démonstration. Si $s \neq 0$, la réduction donne $\|s\vec{MG}\| = |s| MG$, et $|s| MG = k \iff MG = \frac{k}{|s|}$; une distance est positive, d'où les trois cas. Si $s = 0$, la norme $\|\vec{w}\|$ est un nombre fixé. $\square$

Théorème (égalité de deux normes)

Soit $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ et $H = \text{Bar}\{(C, \gamma); (D, \delta)\}$, avec $|\alpha + \beta| = |\gamma + \delta| \neq 0$. L'ensemble des points M tels que $\|\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB}\| = \|\gamma\vec{MC} + \delta\vec{MD}\|$ est la **médiatrice** de $[GH]$ si $G \neq H$, et le plan entier si $G = H$. (Même énoncé avec un, trois ou quatre points dans chaque somme, dès que les sommes des coefficients ont la même valeur absolue.)

Démonstration. L'égalité s'écrit $|\alpha + \beta| MG = |\gamma + \delta| MH$, soit $MG = MH$: M est équidistant de G et H . $\square$

Théorème (colinéarité à un vecteur)

Soit $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\mathcal{D}$ l'ensemble des points M tels que $\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} + \gamma\vec{MC}$ soit colinéaire à $\vec{u}$. Si $s \neq 0$, $\mathcal{D}$ est la **droite** passant par G et dirigée par $\vec{u}$ (car $s\vec{MG}$ est colinéaire à $\vec{u} \iff \vec{GM}$ l'est). Si $s = 0$, le vecteur est constant : $\mathcal{D}$ est le plan s'il est colinéaire à $\vec{u}$, l'ensemble vide sinon.

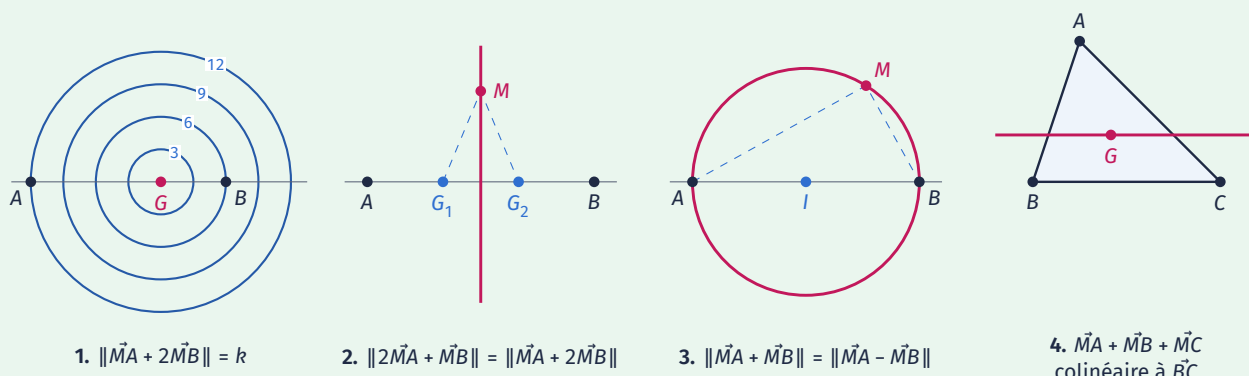
Méthode : Comment déterminer une ligne de niveau

1. Calculer la **somme des coefficients** de chaque somme vectorielle.
2. Si elle n'est pas nulle, introduire le barycentre et **réduire** : la norme devient $|s| MG$; si elle est nulle, calculer le **vecteur constant** en choisissant M égal à l'un des points.
3. Traduire la condition : $MG = r$, $MG = MH$, $\vec{GM}$ colinéaire à $\vec{u}$...
4. Reconnaître : cercle, point, médiatrice, droite, plan ou vide.
5. Conclure en donnant le centre et le rayon (ou les deux points de la médiatrice, ou un point et un vecteur directeur), puis faire une figure.

Modèle de rédaction. « Soit Γ l'ensemble des points M tels que $\|\vec{MA} + 2\vec{MB}\| = 6$. La somme des coefficients vaut $1 + 2 = 3 \neq 0$; soit $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$. Pour tout point M , $\vec{MA} + 2\vec{MB} = 3\vec{MG}$, donc $\|\vec{MA} + 2\vec{MB}\| = 3MG$. Ainsi $M \in \Gamma \iff 3MG = 6 \iff MG = 2$: Γ est le cercle de centre G et de rayon 2. »

Exemple : quatre lignes de niveau (A, B fixés avec $AB = 6$; puis un triangle ABC)

- 1. Cercles.** $\|\vec{MA} + 2\vec{MB}\| = 6$: somme 3 ; avec $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$, $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AB}$ et $AG = 4$. L'égalité s'écrit $3MG = 6$, soit $MG = 2$: c'est le cercle de centre G et de rayon 2. Contrôle : $GB = 2$, donc B est sur ce cercle, et en effet $\|\vec{BA} + 2\vec{BB}\| = AB = 6$. Pour $k = 3, 6, 9, 12$, on obtient des cercles concentriques de rayons 1, 2, 3, 4 (figure 1) ; celui de niveau 12 passe par A, car $\|\vec{2AB}\| = 12$.
- 2. Médiatrice.** $\|2\vec{MA} + \vec{MB}\| = \|\vec{MA} + 2\vec{MB}\|$: les sommes valent 3 et 3. Avec $G_1 = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 1)\}$ et $G_2 = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$, la condition devient $3MG_1 = 3MG_2$: c'est la médiatrice de $[G_1G_2]$. Or $AG_1 = 2$ et $AG_2 = 4$: $[G_1G_2]$ et $[AB]$ ont le même milieu I et le même support : c'est la **médiatrice de $[AB]$** (figure 2). De même, dans un triangle de centre de gravité G, $\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 3MA \iff 3MG = 3MA$: médiatrice de $[AG]$.
- 3. Une somme nulle cachée.** $\|\vec{MA} + \vec{MB}\| = \|\vec{MA} - \vec{MB}\|$: à gauche, $2MI$ (I milieu de $[AB]$) ; à droite, le vecteur constant $\vec{BA}$, de norme AB. La condition $2MI = AB$ donne $IM = \frac{AB}{2} = 3$: c'est le **cercle de diamètre $[AB]$** (figure 3). En revanche, $\|\vec{MA} - \vec{MB}\| = k$ décrit le plan si $k = 6$, et l'ensemble vide sinon.
- 4. Droites.** $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$ est colinéaire à $\vec{BC}$ si et seulement si M est sur la **parallèle à (BC) passant par G** (figure 4). Mais $2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}$ (somme nulle) vaut, avec $M = A$, $-\vec{AB} - \vec{AC} = -2\vec{AA'}$ (A' milieu de $[BC]$), qui n'est pas colinéaire à $\vec{BC}$ puisque $A \notin (BC)$: aucun point ne convient.



11

Pour aller plus loin
Théorèmes de Ménélaüs et de Ceva

Soit ABC un triangle et $P \in (BC)$, $Q \in (CA)$, $R \in (AB)$ trois points distincts des sommets. On définit les réels p, q, r (différents de 0 et de 1) par $\vec{PB} = p\vec{PC}$, $\vec{QC} = q\vec{QA}$, $\vec{RA} = r\vec{RB}$.

Ménélaüs (vers l'an 100) : P, Q, R sont alignés $\iff pqr = 1$.

Ceva (1678) : si (AP) , (BQ) , (CR) sont concourantes, alors $pqr = -1$; réciproquement, si $pqr = -1$, ces trois droites sont concourantes ou parallèles.

La clé : $\vec{PB} = p\vec{PC} \iff \vec{PB} - p\vec{PC} = \vec{0} \iff P = \text{Bar}\{(B, 1); (C, -p)\}$ (car $1 - p \neq 0$) ; de même $Q = \text{Bar}\{(C, 1); (A, -q)\}$ et $R = \text{Bar}\{(A, 1); (B, -r)\}$.

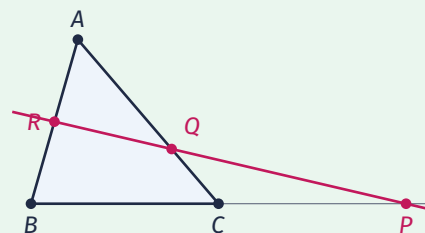
Démonstration de Ménélaüs. Par homogénéité, $Q = \text{Bar}\{(C, p); (A, -pq)\}$. Dans le système formé de $(B, 1)$, $(C, -p)$, (C, p) et $(A, -pq)$, les masses de C s'annulent. Si $pq \neq 1$, sa somme $1 - pq$ n'est pas nulle ; son barycentre X vaut, en regroupant de deux façons, $X = \text{Bar}\{(P, 1 - p); (Q, p - pq)\} \in (PQ)$ et $X = \text{Bar}\{(A, -pq); (B, 1)\} \in (AB)$. Les droites (PQ) et (AB) sont distinctes ($P \notin (AB)$), donc X est leur point commun, et $\vec{XA} = \frac{1}{pq}\vec{XB}$. Ainsi : P, Q, R alignés $\iff R = X \iff r = \frac{1}{pq} \iff pqr = 1$. Si

$pq = 1$, la réduction donne, pour tout M , $\vec{MB} - \vec{MA} = (1 - p)\vec{MP} + (p - 1)\vec{MQ}$, soit $\vec{AB} = (1 - p)\vec{QP} : (PQ) \parallel (AB)$, donc $R \notin (PQ)$, et $pqr = r \neq 1$: les deux propositions sont fausses. $\square$

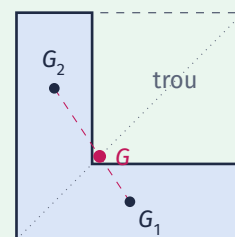
Démonstration de la réciproque de Ceva. Si $pqr = -1$, posons $a = pq$, $b = 1$, $c = -p$: (b, c) est proportionnel à $(1, -p)$, $(c, a) = -p(1, -q)$ et $(a, b) = pq(1, -r)$ car $-pqr = 1$. Les sommes partielles $1 - p$, $-p(1 - q)$, $pq + 1 = \frac{r-1}{r}$ ne sont pas nulles. Si $a + b + c \neq 0$, $G = \text{Bar}\{(A, a); (B, b); (C, c)\} = \text{Bar}\{(A, a); (P, b + c)\}$ est sur (AP) , et de même sur (BQ) et (CR) : concours. Si $a + b + c = 0$, le vecteur constant $\vec{w} = a\vec{MA} + b\vec{MB} + c\vec{MC}$ vaut $a\vec{PA}$ (en $M = P$, avec $b\vec{PB} + c\vec{PC} = \vec{0}$), de même $b\vec{QB}$ et $c\vec{RC}$: les trois droites sont parallèles à $\vec{w}$. (Le sens direct se prouve en écrivant le point de concours comme barycentre de A, B, C , section 9.) $\square$

Exemples. Les médianes : $p = q = r = -1$ et $pqr = -1$.

La section 7 : $A' = \text{Bar}\{(B, 2); (C, 3)\}$ donne $2A'B + 3A'C = \vec{0}$, soit $p = -\frac{3}{2}$; de même $q = -\frac{1}{3}$ et $r = -2$: $pqr = -1$, et les droites concourent bien. **Ménélaüs :** si R est le milieu de $[AB]$ ($r = -1$) et $AQ = \frac{2}{3}AC$ ($q = -\frac{1}{2}$), la droite (RQ) coupe (BC) en P tel que $pqr = 1$, soit $p = 2$: $\vec{PB} = 2\vec{PC}$, et C est le milieu de $[BP]$ (figure).



Le centre de gravité d'une plaque. Une plaque homogène a son centre de gravité en son centre de symétrie, et sa masse est proportionnelle à son aire. Une plaque formée de deux morceaux a donc pour centre de gravité le barycentre des centres des morceaux, pondérés par leurs aires. **Exemple :** la plaque en L formée de $R_1 = [0, 6] \times [0, 2]$ (aire 12, centre $G_1(3; 1)$) et de $R_2 = [0, 2] \times [2, 6]$ (aire 8, centre $G_2(1; 4)$) : $G = \text{Bar}\{(G_1, 12); (G_2, 8)\}$ a pour coordonnées $(\frac{36+8}{20}; \frac{12+32}{20}) = (\frac{11}{5}; \frac{11}{5})$. Il est sur l'axe de symétrie $y = x$, mais **hors de la plaque !** **Avec un trou :** c'est aussi le carré $[0, 6]^2$ (aire 36, centre $O_1(3; 3)$) privé du carré $[2, 6]^2$ (aire 16, centre $O_2(4; 4)$) : $\text{Bar}\{(O_1, 36); (O_2, -16)\}$ a pour abscisse $\frac{108-64}{20} = \frac{11}{5}$. Un coefficient négatif, c'est un trou.



Un repère barycentrique. Fixons un triangle ABC . D'après la section 9, chaque point M correspond à un **unique** triplet (α, β, γ) de somme 1 : le triangle est un « repère barycentrique ». Les droites ont des équations très simples : $(BC) : \alpha = 0$; $(CA) : \beta = 0$; $(AB) : \gamma = 0$; la médiane issue de $A : \beta = \gamma$ (car $\text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \beta)\} = \text{Bar}\{(A, \alpha); (A', 2\beta)\}$, A' milieu de $[BC]$) ; la parallèle à (BC) passant par le centre de gravité : $\alpha = \frac{1}{3}$ (car $\vec{AM} = \beta\vec{AB} + \gamma\vec{AC}$ avec $\beta + \gamma = \frac{2}{3}$). Le centre de gravité a pour coordonnées $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ et le milieu de $[AB]$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$.

12

Les pièges classiques

X Faux	✓ Vrai
« soit $G = \text{Bar}\{(A, 2); (B, -2)\}$ »	la somme des coefficients est nulle : ce barycentre n'existe pas ($A \neq B$) ; on vérifie toujours « somme $\neq 0$ » d'abord
$\vec{AG} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\vec{AB}$	$\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\vec{AB}$: le coefficient de l'autre point ; G est plus près du plus lourd
« $\text{Bar}\{(A, 3); (B, -1)\}$ est sur $[AB]$ »	signes contraires : hors de $[AB]$, du côté de A ($ 3 > -1 $) : $\vec{AG} = -\frac{1}{2}\vec{AB}$

« $2\vec{AG} + \vec{GB} = \vec{0}$, donc $G = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 1)\}$ »	on écrit d'abord tout avec l'origine G : $-2\vec{GA} + \vec{GB} = \vec{0}$, donc $G = \text{Bar}\{(A, -2); (B, 1)\}$, et $\vec{AG} = -\vec{AB}$
« $\text{Bar}\{(A, 2); (B, 3)\} = \text{Bar}\{(A, 4); (B, 5)\}$ » (on a ajouté 2)	l'homogénéité est multiplicative : $\text{Bar}\{(A, 2); (B, 3)\} = \text{Bar}\{(A, 4); (B, 6)\}$; ajouter change le point
« $\text{Bar}\{(A, -1); (B, -2); (C, -3)\}$ est hors du triangle (coefficients négatifs) »	il est à l'intérieur : c'est $\text{Bar}\{(A, 1); (B, 2); (C, 3)\}$ (on multiplie par -1) ; seul le même signe compte
$\ \vec{MA} + \vec{MB}\ = MA + MB$	$\ \vec{MA} + \vec{MB}\ = 2MI$, I milieu de $[AB]$: on réduit avant de prendre la norme
$\ 2\vec{MA} - 3\vec{MB}\ = -MG$ (avec $G = \text{Bar}\{(A, 2); (B, -3)\}$)	$\ 2\vec{MA} - 3\vec{MB}\ = \ -\vec{MG}\ = -1 MG = MG$: la valeur absolue de la somme
$x_G = \alpha x_A + \beta x_B$	$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha + \beta}$ (sauf si $\alpha + \beta = 1$)
« $\text{Bar}\{(A, 1); (B, -1); (C, 2)\}$: je regroupe $(A, 1)$ et $(B, -1)$ »	somme partielle nulle : impossible ; on regroupe $(A, 1)$ et $(C, 2)$, ou $(B, -1)$ et $(C, 2)$
« $\ \alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB}\ = k$ est toujours un cercle »	si $\alpha + \beta = 0$: le plan ou le vide ; si $k = 0$: un point ; si $k < 0$: le vide
« $\ \vec{MA} - \vec{MB}\ = AB$ est le cercle de diamètre $[AB]$ »	$\vec{MA} - \vec{MB} = \vec{BA}$ pour tout M : c'est le plan entier ; le cercle de diamètre $[AB]$ est $\ \vec{MA} + \vec{MB}\ = AB$
« $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$ n'est vrai que pour $M = O$ »	c'est vrai pour tout point M : on choisit le point M qui arrange (souvent un sommet)
centre de gravité : $\vec{AG} = \frac{1}{3}\vec{AA'}$	$\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AA'}$: G est aux deux tiers de la médiane en partant du sommet

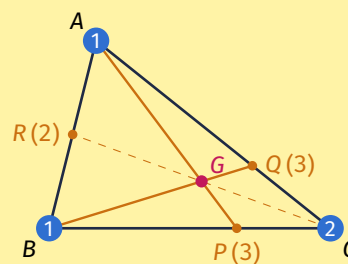
13

Les astuces des concours

★ Astuce de concours : la méthode des masses pour lire un rapport

On pose des **masses** sur les sommets pour que chaque point donné soit le barycentre de deux d'entre elles ; l'associativité donne alors tous les rapports, sans calcul de vecteurs.

Exemple : triangle ABC , $P \in [BC]$ avec $BP = 2PC$, $Q \in [CA]$ avec $AQ = 2QC$. Où se coupent (AP) et (BQ) ?
 $P = \text{Bar}\{(B, 1); (C, 2)\}$ et $Q = \text{Bar}\{(A, 1); (C, 2)\}$: les masses 1 en A , 1 en B , 2 en C conviennent. Soit $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, 2)\}$ (masse totale 4) : $G = \text{Bar}\{(A, 1); (P, 3)\} = \text{Bar}\{(B, 1); (Q, 3)\}$. Donc G est le point d'intersection, $\boxed{AG = \frac{3}{4}AP}$ et $BG = \frac{3}{4}BQ$. Bonus : $G = \text{Bar}\{(R, 2); (C, 2)\}$ (R milieu de $[AB]$) : (CG) passe par R , et G est le milieu de $[CR]$.



★ **Astuce de concours : accorder les masses par homogénéité**

Si les deux points donnés imposent deux masses différentes au même sommet, on multiplie chaque système pour obtenir une masse commune (un multiple commun). **Exemple** : $P \in [BC]$ avec $BP = 3PC$ et $Q \in [CA]$ avec $5CQ = 2QA$: $P = \text{Bar}\{(B, 1); (C, 3)\} = \text{Bar}\{(B, 5); (C, 15)\}$ et $Q = \text{Bar}\{(C, 5); (A, 2)\} = \text{Bar}\{(C, 15); (A, 6)\}$. Avec $G = \text{Bar}\{(A, 6); (B, 5); (C, 15)\}$ (masse totale 26) : $G = \text{Bar}\{(A, 6); (P, 20)\} = \text{Bar}\{(B, 5); (Q, 21)\}$, donc (AP) et (BQ) se coupent en G , avec $\frac{AG}{GP} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$ et $\frac{BG}{GQ} = \frac{21}{5}$; et (CG) coupe (AB) en $\text{Bar}\{(A, 6); (B, 5)\}$.

★ **Astuce de concours : choisir le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$**

Dans un triangle, ce repère (pas forcément orthonormé) transforme tout en calcul : $A(0; 0)$, $B(1; 0)$, $C(0; 1)$, et $\text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ a pour coordonnées $(\frac{\beta}{s}; \frac{\gamma}{s})$. **Exemple** : $E = \text{Bar}\{(A, -1); (B, 2)\}$, F milieu de $[AC]$ et $K = \text{Bar}\{(B, 2); (C, 1)\}$ sont-ils alignés ? $E(2; 0)$, $F(0; \frac{1}{2})$, $K(\frac{2}{3}; \frac{1}{3})$: $\vec{EF}(-2; \frac{1}{2})$, $\vec{EK}(-\frac{4}{3}; \frac{1}{3})$ et $\det(\vec{EF}, \vec{EK}) = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$: **oui**, sur la droite $x + 4y = 2$ (Ménélaüs : $p = -\frac{1}{2}$, $q = -1$, $r = 2$, $pqr = 1$).

★ **Astuce de concours : d'abord la somme, puis des entiers**

Avant tout calcul, on vérifie que la somme des coefficients n'est pas nulle (sinon : vecteur constant, pas de barycentre), puis on chasse les fractions par homogénéité : $\text{Bar}\{(A, \frac{1}{2}); (B, \frac{1}{3}); (C, -\frac{1}{6})\} = \text{Bar}\{(A, 3); (B, 2); (C, -1)\}$ (on multiplie par 6 ; somme 4). Et un point défini par $\vec{AM} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$ s'écrit directement $M = \text{Bar}\{(A, 1 - x - y); (B, x); (C, y)\}$.

★ **Astuce de concours : un même point écrit de deux façons**

Pour montrer que deux droites (UV) et (WZ) se coupent en un point précis, on cherche un barycentre qui s'écrit à la fois $\text{Bar}\{(U, \dots); (V, \dots)\}$ et $\text{Bar}\{(W, \dots); (Z, \dots)\}$; on ajoute au besoin des **masses qui s'annulent**. **Exemple (un point fixe)** : pour $m \notin \{-1, 1\}$, soit $P_m = \text{Bar}\{(A, 1); (B, m)\}$ et $Q_m = \text{Bar}\{(C, 1); (B, -m)\}$. Le système $\{(A, 1); (B, m); (C, 1); (B, -m)\}$ a pour barycentre $\text{Bar}\{(A, 1); (C, 1)\} = J$, milieu de $[AC]$, et aussi $\text{Bar}\{(P_m, 1 + m); (Q_m, 1 - m)\}$: **toutes les droites $(P_m Q_m)$ passent par J** , quel que soit m .

★ **Astuce de concours : minimiser une norme : réduire, puis regarder une distance**

$\|\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB}\| = |\alpha + \beta| MG$: minimiser la norme, c'est rendre MG le plus petit possible. **Exemple** (repère orthonormé) : $A(0; 0)$, $B(3; 0)$, et M décrit la droite $\Delta : y = 4$. Avec $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 2)\} = (2; 0)$ et $M(x; 4)$: $\|\vec{MA} + 2\vec{MB}\| = 3MG = 3\sqrt{(x-2)^2 + 16} \geq 12$, avec égalité pour $x = 2$: le minimum vaut 12, atteint en $M(2; 4)$, au pied de la perpendiculaire à Δ issue de G .

14

L'essentiel du chapitre en une page

Barycentre de deux points ($\alpha + \beta \neq 0$)

$$G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\} \iff \alpha \vec{GA} + \beta \vec{GB} = \vec{0}.$$

$$\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \vec{AB}, \quad \vec{BG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \vec{BA}, \quad |\alpha| GA = |\beta| GB.$$

$$\vec{AG} = t \vec{AB} \iff G = \text{Bar}\{(A, 1 - t); (B, t)\}.$$

$\alpha = \beta$: milieu ; $\alpha + \beta = 0$ ($A \neq B$) : **pas** de barycentre.

Homogénéité : on multiplie les coefficients par $k \neq 0$.

Position : même signe $\Rightarrow G \in [AB]$; signes contraires $\Rightarrow$ hors de $[AB]$, du côté du plus grand |coefficient|.

Réduction (s = somme des coefficients)

$$s \neq 0 : \alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} + \gamma \vec{MC} = s \vec{MG} \text{ pour tout } M.$$

$$s = 0 : \text{vecteur constant} ; \alpha \vec{MA} - \alpha \vec{MB} = \alpha \vec{BA}, \\ \alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} + \gamma \vec{MC} = \beta \vec{AB} + \gamma \vec{AC}.$$

Coordonnées (repère quelconque)

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha + \beta + \gamma}, \text{ même formule pour } y_G.$$

$$A, B, C \text{ alignés} \iff \det(\vec{AB}, \vec{AC}) = xy' - x'y = 0.$$

Trois points et plus

$$\vec{AG} = \frac{\beta}{s} \vec{AB} + \frac{\gamma}{s} \vec{AC} \text{ (construction par un parallélogramme).}$$

$$\text{Centre de gravité : } \text{Bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, 1)\},$$

$$\vec{AG} = \frac{2}{3} \vec{AA'}.$$

$$D = \text{Bar}\{(A, 1); (B, -1); (C, 1)\} \iff ABCD \text{ parallélogramme.}$$

$$n \text{ points : } \sum \alpha_k \vec{GA_k} = \vec{0} ; \text{ fusion}$$

$$(A, \alpha) + (A, \alpha') = (A, \alpha + \alpha').$$

$$\text{Isobarycentre de } ABCD : \text{milieu de } [IK] \text{ et de } [JL] ;$$

$$IJKL \text{ est un parallélogramme (Varignon).}$$

Associativité (somme partielle $\neq 0$)

$$H = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\} \Rightarrow \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\} = \text{Bar}\{(H, \alpha + \beta); (C, \gamma)\}, \text{ donc } G \in (CH).$$

Concours : $A' = \text{Bar}\{(B, \beta); (C, \gamma)\}$, B', C' avec les **mêmes masses** $\Rightarrow (AA'), (BB'), (CC')$ passent par G .

Alignement : un point obtenu en regroupant des masses en E et F est sur (EF) .

Droites et triangle (A, B, C non alignés)

$$(AB) = \{\text{Bar}\{(A, 1 - t); (B, t)\} ; t \in \mathbb{R}\} ; [AB] : t \in [0, 1].$$

$$\vec{AM} = x \vec{AB} + y \vec{AC} \iff M = \text{Bar}\{(A, 1 - x - y); (B, x); (C, y)\}.$$

$$M \text{ dans le triangle} \iff \alpha, \beta, \gamma \text{ de même signe ; } \alpha = 0 \iff M \in (BC).$$

$$(AM) \cap (BC) = A' = \text{Bar}\{(B, \beta); (C, \gamma)\}, \quad \vec{AM} = \frac{\beta + \gamma}{s} \vec{AA'}.$$

Lignes de niveau

$$\|\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB}\| = k, s \neq 0 : MG = \frac{k}{|s|} : \text{cercle } (k > 0), \text{ point } G (k = 0), \text{ vide } (k < 0) ; s = 0 : \text{plan ou vide.}$$

$$\|\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB}\| = \|\gamma \vec{MC} + \delta \vec{MD}\| \text{ avec}$$

$$|\alpha + \beta| = |\gamma + \delta| \neq 0 : \text{médiatrice de } [GH].$$

$$\|\vec{MA} + \vec{MB}\| = \|\vec{MA} - \vec{MB}\| : \text{cercle de diamètre } [AB].$$

$$\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB} \text{ colinéaire à } \vec{u} : \text{droite passant par } G, \text{ dirigée par } \vec{u}.$$

À retenir pour les concours

Masses : poser des masses sur les sommets, regrouper, lire les rapports.

$$\vec{PB} = p \vec{PC} \iff P = \text{Bar}\{(B, 1); (C, -p)\} ; \text{Ménélaüs :}$$

$$P, Q, R \text{ alignés} \iff pqr = 1 ; \text{Ceva :}$$

$$\text{concourantes} \Rightarrow pqr = -1.$$

Plaque : barycentre des centres, pondérés par les aires (un trou : aire négative).

$$\|\alpha \vec{MA} + \beta \vec{MB}\| \text{ minimale} \iff MG \text{ minimale.}$$

Bon courage ! La régularité bat le talent.

Maths Olympiad

Partie B • Le parcours

30 exercices sur 4 niveaux, du plus simple au niveau concours

Notations : dans un triangle ABC , A' , B' , C' sont (sauf mention contraire) les milieux de $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Dès que des distances interviennent, le repère est orthonormé. Aucun produit scalaire n'est utilisé.

15 Niveau I • Bases

Exercice 1 Sur une droite graduée ★

corrigé p. 39

Sur une droite graduée, les points A et B ont pour abscisses -2 et 6 .

- Justifier l'existence de chacun des points suivants, exprimer $\vec{AG}$ en fonction de $\vec{AB}$, puis donner son abscisse et le placer : $G_1 = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 3)\}$, $G_2 = \text{Bar}\{(A, 5); (B, 3)\}$, $G_3 = \text{Bar}\{(A, 5); (B, -1)\}$, $G_4 = \text{Bar}\{(A, -1); (B, 5)\}$ et I , isobarycentre de A et B .
- Existe-t-il un point G tel que $7\vec{GA} = 7\vec{GB}$? (Chasles.)
- Trouver des entiers α , β tels que le point d'abscisse x soit $\text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$: a) $x = 0$; b) $x = -10$; c) $x = 5$.
- Montrer que, si $\alpha + \beta \neq 0$, l'abscisse de $\text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ est $\frac{-2\alpha+6\beta}{\alpha+\beta}$; retrouver celle de G_4 .

Exercice 2 Traduire une égalité vectorielle ★

corrigé p. 39

A et B sont deux points distincts.

- Écrire G comme barycentre de A et B (coefficients entiers) et exprimer $\vec{AG}$ en fonction de $\vec{AB}$: a) $3\vec{GA} + 5\vec{GB} = \vec{0}$; b) $2\vec{GA} = 7\vec{GB}$; c) $\vec{AG} = -\frac{3}{4}\vec{AB}$; d) $\vec{BG} = 3\vec{AB}$; e) $\vec{GA} + 2\vec{GB} = 3\vec{BA}$.
- Lequel de ces points est $\text{Bar}\{(A, -6); (B, 15)\}$? $\text{Bar}\{(A, \frac{1}{3}); (B, -\frac{1}{7})\}$? Lesquels sont sur $[AB]$?

Exercice 3 Le signe des coefficients ★

corrigé p. 39

$A \neq B$; $G_1 = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 7)\}$, $G_2 = \text{Bar}\{(A, -3); (B, 1)\}$, $G_3 = \text{Bar}\{(A, 4); (B, -5)\}$, $G_4 = \text{Bar}\{(A, -5); (B, -1)\}$, $G_5 = \text{Bar}\{(A, 9); (B, -1)\}$.

- Sans calcul, dire lesquels de ces points sont sur $[AB]$; pour les autres, dire s'ils sont « au-delà de A » ou « au-delà de B ». Lequel des points A , B est le plus proche de chacun d'eux ?
- Vérifier en exprimant chaque $\vec{AG}_k$ en fonction de $\vec{AB}$; placer les cinq points pour $AB = 2$ cm.
- Pour quels réels α le point $\text{Bar}\{(A, \alpha); (B, 2)\}$ est-il sur $[AB]$? plus proche de B que de A ?

Exercice 4 Réduire une somme vectorielle ★

corrigé p. 40

A et B sont deux points distincts.

- Réduire, pour tout point M : $\vec{u} = 2\vec{MA} + 5\vec{MB}$, $\vec{v} = 4\vec{MA} - 3\vec{MB}$, $\vec{w} = -\vec{MA} - 2\vec{MB}$ et $\vec{z} = -2\vec{MA} + 2\vec{MB}$ (on introduira les barycentres utiles G , H , K , que l'on placera à l'aide de $\vec{AB}$).
- Déterminer : a) le point M tel que $2\vec{MA} + 5\vec{MB} = 7\vec{AB}$; b) l'ensemble des points M tels que $-2\vec{MA} + 2\vec{MB} = 2\vec{AB}$, puis tels que $-2\vec{MA} + 2\vec{MB} = \vec{BA}$; c) le point M tel que $4\vec{MA} - 3\vec{MB} = 2\vec{MA} + 5\vec{MB}$ (comme barycentre de G et H , puis de A et B).

Exercice 5 Coordonnées : deux points ★

corrigé p. 40

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne $A(4; 1)$ et $B(-2; 4)$.

1. Coordonnées de $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$, de $H = \text{Bar}\{(A, 3); (B, -2)\}$ et du milieu I de $[AB]$?
2. Montrer que $P(2; 2)$ est un barycentre de A et B (préciser les coefficients), mais pas $Q(1; 1)$.
3. Écrire comme barycentres de A et B les points de (AB) d'ordonnée 0 et d'abscisse 10.

Exercice 6 Trois points : construire ★

corrigé p. 41

ABC est un triangle.

1. Justifier l'existence de $G = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 3); (C, 1)\}$, montrer que $\vec{AG} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{AC}$ et construire G .
2. Soit $H = \text{Bar}\{(A, 2); (B, -1); (C, 1)\}$. Montrer que $\vec{AH} = \frac{1}{2}\vec{BC}$; nature de $ABA'H$? Construire H .
3. Soit $K = \text{Bar}\{(A, -1); (B, 2); (C, 1)\}$. Exprimer $\vec{BK}$ en fonction de $\vec{AC}$ et construire K .
4. Le point $\text{Bar}\{(A, 2); (B, -3); (C, 1)\}$ existe-t-il ?

Exercice 7 Trois points : réduire ★

corrigé p. 41

ABC est un triangle de centre de gravité G .

1. Réduire $\vec{u} = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$; montrer que $\vec{v} = 3\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 5\vec{MK}$ avec $\vec{AK} = \frac{2}{5}\vec{AA'}$; montrer que $\vec{w} = 2\vec{MA} - 3\vec{MB} + \vec{MC}$ ne dépend pas de M et l'exprimer à l'aide de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.
2. Construire le point P tel que $3\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = \vec{BC}$.
3. Déterminer l'ensemble des points M tels que $\vec{w} = \vec{0}$, puis le point M tel que $\vec{w} = \vec{u}$.

Exercice 8 Coordonnées : trois points ★

corrigé p. 41

Dans un repère, on donne $A(1; -3)$, $B(3; 4)$ et $C(-1; 5)$.

1. Calculer les coordonnées du centre de gravité G de ABC et de $H = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 2); (C, -1)\}$.
2. Coordonnées de $K = \text{Bar}\{(B, 2); (C, -1)\}$? Vérifier que H est le milieu de $[AK]$; l'expliquer sans calcul.
3. Pour quel réel m le point $\text{Bar}\{(A, m); (B, 1); (C, 1)\}$ est-il sur l'axe des abscisses ? Lequel ?

16

Niveau 2 • Bac

Exercice 9 Type devoir surveillé (1) : construire et réduire ★★

corrigé p. 42

ABC est un triangle de centre de gravité G .

1. Justifier l'existence de $E = \text{Bar}\{(B, 2); (C, -1)\}$ et $F = \text{Bar}\{(A, 2); (C, 3)\}$; exprimer $\vec{BE}$, $\vec{AF}$; construire E , F .
2. Soit $K = \text{Bar}\{(A, 1); (B, -2); (C, 3)\}$. Montrer que $\vec{AK} = -\vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{AC}$ et construire K .
3. Réduire, pour tout point M : $2\vec{MB} - \vec{MC}$, $2\vec{MA} + 3\vec{MC}$, $\vec{MA} - 2\vec{MB} + 3\vec{MC}$ et $\vec{MB} - \vec{MC}$.
4. a) Montrer que $\vec{ME} + 5\vec{MF} = 6\vec{MG}$ pour tout M . b) En déduire que $G \in [EF]$; exprimer $\vec{EG}$ à l'aide de $\vec{EF}$.
5. Construire le point P tel que $2\vec{PB} - \vec{PC} = 3\vec{PA}$, puis le point N tel que $\vec{NA} - 2\vec{NB} + 3\vec{NC} = 2\vec{CB}$.

Exercice 10 Type devoir surveillé (2) : alignement et concours ★★

corrigé p. 42

$G = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 3); (C, 4)\}$, $P = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 3)\}$, $Q = \text{Bar}\{(B, 3); (C, 4)\}$, $R = \text{Bar}\{(A, 2); (C, 4)\}$ (ABC triangle).

1. Exprimer $\vec{AP}$, $\vec{BQ}$, $\vec{AR}$ à l'aide de $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{AC}$; construire P , Q , R .

- Montrer que G appartient aux droites (CP) , (AQ) et (BR) . Conclure, et exprimer $\vec{CG}$, $\vec{AG}$, $\vec{BG}$ en fonction de $\vec{CP}$, $\vec{AQ}$, $\vec{BR}$.
- Soit $S = \text{Bar}\{(B, 3); (C, -4)\}$. a) Construire S . b) Montrer que $R = \text{Bar}\{(P, 5); (S, 1)\}$; en déduire que P , R , S sont alignés et préciser le point d'intersection des droites (PR) et (BC) .

Exercice 11 Type devoir surveillé (3) : dans un repère ★★

corrigé p. 42

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne $A(-5; -2)$, $B(3; 2)$ et $C(5; 6)$.

- Vérifier que A , B , C ne sont pas alignés. Calculer les coordonnées de $P = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 3)\}$, de $Q = \text{Bar}\{(B, 3); (C, -2)\}$ et de $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 3); (C, -2)\}$.
- a) Vérifier, à l'aide de déterminants, que $G \in (CP)$ et $G \in (AQ)$. b) Déterminer une équation cartésienne de (CP) et de (AQ) , puis résoudre le système formé par ces deux équations. c) Expliquer le résultat par l'associativité.
- Trouver les réels a , b , c de somme 1 tels que $E(2; 3) = \text{Bar}\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$; E est-il intérieur à ABC ?
- Pour quelle valeur de m le point $\text{Bar}\{(A, m); (B, 3); (C, -2)\}$ est-il sur l'axe des abscisses ?

Exercice 12 Type devoir surveillé (4) : ensembles de points ★★

corrigé p. 43

ABC est un triangle isocèle en A tel que $AB = AC = 6$ cm. On pose $G = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 1)\}$ et $H = \text{Bar}\{(A, 1); (C, 2)\}$.

- Construire G et H ; calculer AH . 2. Réduire, pour tout point M : $2\vec{MA} + \vec{MB}$, $\vec{MA} + 2\vec{MC}$, $2\vec{MA} - 2\vec{MB}$ et $2\vec{MA} + \vec{MB} - 3\vec{MC}$.
- Déterminer, puis construire, les ensembles : $\mathcal{E}_1 = \{M / \|2\vec{MA} + \vec{MB}\| = \|\vec{MA} + 2\vec{MC}\|\}$; $\mathcal{E}_2 = \{M / \|\vec{MA} + 2\vec{MC}\| = \|2\vec{MA} - 2\vec{MB}\|\}$; $\mathcal{E}_3 = \{M / \|2\vec{MA} + \vec{MB}\| = \|2\vec{MA} + \vec{MB} - 3\vec{MC}\|\}$.
- Vérifier que $A \in \mathcal{E}_2$ et $C \in \mathcal{E}_3$. Le point A appartient-il à $\mathcal{E}_1$?

Exercice 13 Quatre points dans un parallélogramme ★★

corrigé p. 43

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O ; I est le milieu de $[AB]$.

- Montrer que O est l'isobarycentre de A , B , C , D et que $\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} - \vec{MD} = \vec{0}$ pour tout point M .
- Soit $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, 3); (D, 1)\}$. a) Montrer que $G = \text{Bar}\{(O, 4); (C, 2)\}$, puis que $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AC}$. b) Soit $L = \text{Bar}\{(C, 3); (D, 1)\}$: montrer que $G \in (IL)$, préciser $\vec{IG}$ et construire L et G .
- Déterminer l'ensemble des points M tels que $\vec{MA} + \vec{MB} + 3\vec{MC} + \vec{MD}$ soit colinéaire à $\vec{BD}$.

Exercice 14 Droite, segment, demi-droite ★★

corrigé p. 43

A et B sont deux points distincts.

- Pour m réel, on considère $G_m = \text{Bar}\{(A, m-1); (B, 3)\}$. a) Pour quels m ce point existe-t-il ? Montrer qu'alors $\vec{AG}_m = \frac{3}{m+2}\vec{AB}$. b) Pour quelle valeur de m a-t-on $G_m = B$? G_m milieu de $[AB]$? c) Pour quels m a-t-on $G_m \in [AB]$? d) Quel est l'ensemble de tous les points G_m ?
- Déterminer les ensembles $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ des points $\text{Bar}\{(A, t^2); (B, 1)\}$ et $\text{Bar}\{(A, 2+t^2); (B, -1)\}$ ($t \in \mathbb{R}$).

Exercice 15 Un point dans un triangle ★★

corrigé p. 44

Rappel (cours) : le point de coordonnées $(x; y)$ dans $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$ est $\text{Bar}\{(A, 1-x-y); (B, x); (C, y)\}$; il est intérieur à ABC (bords compris) si et seulement si ces coefficients sont de même signe.

- Écrire comme barycentres de A , B , C (coefficients entiers) les points P , Q , R définis par $\vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{AC}$, $\vec{BQ} = 2\vec{BC}$ et $\vec{CR} = 2\vec{AB}$. Lesquels sont à l'intérieur du triangle ?
- La droite (AP) coupe (BC) en N . Montrer que $N = \text{Bar}\{(B, 2); (C, 1)\}$ et que P est le milieu de $[AN]$.
- Pour quels réels m le point $\text{Bar}\{(A, m); (B, 2); (C, 3-m)\}$ est-il intérieur au triangle ? sur un côté ?

Exercice 16 Droites, point, ensemble vide ★★

corrigé p. 44

ABC est un triangle et $G' = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 3)\}$. Déterminer et représenter les ensembles :

$\mathcal{D}_1 = \{M / 2\vec{MA} + 3\vec{MB} \text{ est colinéaire à } \vec{AC}\}$; $\mathcal{D}_2 = \{M / \vec{MA} - 3\vec{MB} + 2\vec{MC} \text{ est colinéaire à } \vec{BC}\}$;

$\mathcal{D}_3 = \{M / 2\vec{MA} + 3\vec{MB} \text{ est colinéaire à } \vec{MC}\}$; $\mathcal{D}_4 = \{M / \|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 0\}$; $\mathcal{D}_5 = \{M / \|2\vec{MA} + 3\vec{MB}\| = \|\vec{MA} - \vec{MB}\|\}$.

17

Niveau 3 • Approfondissement**Exercice 17** La méthode des masses ★★★

corrigé p. 44

ABC est un triangle ; $P \in [AB]$ et $Q \in [AC]$ vérifient $AP = \frac{2}{5}AB$ et $AQ = \frac{3}{4}AC$; les droites (BQ) et (CP) se coupent en K .

1. Écrire P comme barycentre de A et B , puis Q comme barycentre de A et C , en donnant à A le même coefficient.
2. En déduire que $K = \text{Bar}\{(A, 3); (B, 2); (C, 9)\}$, puis les rapports $\frac{BK}{KQ}$ et $\frac{CK}{KP}$.
3. La droite (AK) coupe (BC) en R : calculer $\frac{BR}{RC}$ et $\frac{AK}{KR}$.

Exercice 18 Quatre points, trois droites ★★★

corrigé p. 45

$ABCD$ est un quadrilatère convexe, $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 2); (C, 3); (D, 4)\}$; I, J, K, L, P, Q sont les barycentres respectifs de $(A, 1)$ et $(B, 2)$, de $(C, 3)$ et $(D, 4)$, de $(A, 1)$ et $(C, 3)$, de $(B, 2)$ et $(D, 4)$, de $(A, 1)$ et $(D, 4)$, de $(B, 2)$ et $(C, 3)$.

1. Montrer que les droites (IJ) , (KL) et (PQ) sont concourantes en G .
2. Préciser la position de G sur chacun des segments $[IJ]$, $[KL]$ et $[PQ]$.

Exercice 19 Lignes de niveau dans un triangle ★★★

corrigé p. 45

ABC est un triangle de centre de gravité G , et $H = \text{Bar}\{(A, 1); (B, -4)\}$.

1. Montrer que $2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} = 2A'\vec{A}$ pour tout point M , et que la norme de ce vecteur est $3AG$.
2. Déterminer et construire : $\Gamma_1 = \{M / \|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\|\}$;
 $\Gamma_2 = \{M / \|\vec{MB} + \vec{MC}\| = \|2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\|\}$; $\Gamma_3 = \{M / \|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} - 4\vec{MB}\|\}$;
 $\Gamma_4 = \{M / \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} \text{ et } 2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} \text{ sont colinéaires}\}$.
3. Montrer que A est le seul point commun à Γ_1 et Γ_2 (utiliser $MA' \leq MG + GA'$).

Exercice 20 Un coefficient qui varie ★★★

corrigé p. 45

ABC est un triangle ; pour m réel, $G_m = \text{Bar}\{(A, m); (B, 1-m); (C, 1)\}$ et $H_m = \text{Bar}\{(A, m^2); (B, 1); (C, 1)\}$.

1. Justifier que G_m existe pour tout m et montrer que $B'\vec{G}_m = \frac{1-m}{2}\vec{AB}$. En déduire l'ensemble des points G_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$, puis lorsque m décrit $[0; 1]$.
2. Pour quels m le point G_m est-il à l'intérieur du triangle (bords compris) ? Comparer avec 1.
3. Déterminer l'ensemble des points H_m ($m \in \mathbb{R}$).

Exercice 21 Lignes de niveau dans un repère ★★★

corrigé p. 46

Le plan est muni d'un repère orthonormé ; $A(0; 3)$, $B(4; -1)$, $C(-2; -3)$; $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 3)\}$ et K est le milieu de $[BC]$.

1. Calculer les coordonnées de G et de K .
2. Déterminer une équation de chacun des ensembles : $\Gamma = \{M / \|\vec{MA} + 3\vec{MB}\| = 8\}$; $\Delta = \{M / \|\vec{MA} + 3\vec{MB}\| = \|2\vec{MB} + 2\vec{MC}\|\}$; $\mathcal{D} = \{M / \vec{MA} + 3\vec{MB} \text{ est colinéaire à } \vec{u}(1; 2)\}$.

3. a) Déterminer les points d'intersection S_1 et S_2 de Γ et Δ . b) Quelle est la nature du quadrilatère GS_1KS_2 ? 4. Représenter Γ , Δ et $\mathcal{D}$.

Exercice 22 Mêmes centres de gravité ★★★

corrigé p. 46

1. ABC est un triangle et $k \in [0; 1]$; $\vec{BA}_1 = k\vec{BC}$, $\vec{CB}_1 = k\vec{CA}$, $\vec{AC}_1 = k\vec{AB}$. Écrire A_1 , B_1 , C_1 comme barycentres, puis montrer que les triangles ABC et $A_1B_1C_1$ ont le même centre de gravité.
2. Réciproque : si $\vec{BA}_1 = x\vec{BC}$, $\vec{CB}_1 = y\vec{CA}$, $\vec{AC}_1 = z\vec{AB}$ et si les centres de gravité sont égaux, $x = y = z$.
3. $ABCDEF$ est un hexagone ; $M_1, \dots, M_6$ sont les milieux de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DE]$, $[EF]$, $[FA]$. Montrer que les triangles $M_1M_3M_5$ et $M_2M_4M_6$ ont le même centre de gravité.

Exercice 23 Le théorème du trapèze ★★★

corrigé p. 46

$ABCD$ est un trapèze de bases $[AB]$ et $[CD]$, avec $\vec{DC} = k\vec{AB}$ ($k > 0$, $k \neq 1$). Ses diagonales se coupent en O , les droites (AD) et (BC) en E ; I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[CD]$.

1. Montrer que $k\vec{MA} - k\vec{MB} + \vec{MC} - \vec{MD} = \vec{0}$ pour tout point M .
2. En déduire que $\text{Bar}\{(A, k); (C, 1)\} = \text{Bar}\{(B, k); (D, 1)\}$, puis que ce point est O . Montrer de même que $E = \text{Bar}\{(A, k); (D, -1)\} = \text{Bar}\{(B, k); (C, -1)\}$.
3. Montrer que $O = \text{Bar}\{(I, 2k); (J, 2)\}$ et $E = \text{Bar}\{(I, 2k); (J, -2)\}$. Conclure. Que se passe-t-il si $k = 1$?

18

Niveau 4 • Concours

Exercice 24 Relations de Van Aubel et de Gergonne ★★★

corrigé p. 47

P est intérieur au triangle ABC (hors des côtés) ; (AP) , (BP) , (CP) coupent (BC) , (CA) , (AB) en D , E , F ; $P = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ avec $\alpha, \beta, \gamma > 0$ (cours).

1. Montrer que $D = \text{Bar}\{(B, \beta); (C, \gamma)\}$ (de même pour E , F) ; exprimer $\frac{DB}{DC}$ et $\frac{AP}{PD}$ à l'aide de α, β, γ .
2. Démontrer la relation de Van Aubel $\frac{AP}{PD} = \frac{AE}{EC} + \frac{AF}{FB}$, puis la relation $\frac{PD}{AD} + \frac{PE}{BE} + \frac{PF}{CF} = 1$.
3. Montrer que $\frac{AP}{PD} + \frac{BP}{PE} + \frac{CP}{PF} \geq 6$ et $\frac{AP}{PD} \times \frac{BP}{PE} \times \frac{CP}{PF} \geq 8$. Cas d'égalité ? 4. Application : $AF = 2FB$ et $2AE = 3EC$; calculer $\frac{AP}{PD}$ et $\frac{BD}{DC}$.

Exercice 25 Le triangle intérieur ★★★

corrigé p. 47

$D \in [BC]$, $E \in [CA]$, $F \in [AB]$ vérifient $BD = \frac{1}{4}BC$, $CE = \frac{1}{4}CA$, $AF = \frac{1}{4}AB$. Les droites (AD) , (BE) , (CF) délimitent un triangle PQR : $P = (AD) \cap (BE)$, $Q = (BE) \cap (CF)$, $R = (CF) \cap (AD)$.

1. Écrire D , E , F comme barycentres ; montrer que $P = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 9); (C, 3)\}$; de même Q , R .
2. Montrer que $\vec{AR} = \frac{4}{13}\vec{AD}$ et $\vec{AP} = \frac{12}{13}\vec{AD}$ (R et P partagent $[AD]$ dans les rapports 4 : 8 : 1).
3. On admet que, dans un repère orthonormé, l'aire d'un triangle MNK est $\frac{1}{2} |\det(\vec{MN}, \vec{MK})|$. a) Montrer que si $\vec{u} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$ et $\vec{v} = x'\vec{AB} + y'\vec{AC}$, alors $\det(\vec{u}, \vec{v}) = (xy' - x'y) \det(\vec{AB}, \vec{AC})$. b) En déduire que $\text{aire}(PQR) = \frac{4}{13} \text{aire}(ABC)$.
4. Avec des points aux tiers des côtés ($BD = \frac{1}{3}BC$, ...), montrer que le rapport des aires vaut $\frac{1}{7}$.

Exercice 26 Droites passant par le centre de gravité ★★★

corrigé p. 47

G est le centre de gravité du triangle ABC . Une droite Δ passant par G coupe (AB) en M et (AC) en N ($M \neq A$, $N \neq A$) ; on note u, v les réels tels que $\vec{AG} = u\vec{AM}$ et $\vec{AG} = v\vec{AN}$.

1. Montrer que $M = \text{Bar}\{(A, u-1); (B, 1)\}$ et $N = \text{Bar}\{(A, v-1); (C, 1)\}$.
2. Montrer que $u + v = 3$ (si $G = \text{Bar}\{(M, \lambda); (N, \mu)\}$, écrire G comme barycentre de A, B, C et utiliser l'unicité des coefficients à un facteur près). Réciproquement, si $u + v = 3$, montrer que $G \in (MN)$.

3. On suppose $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$. À l'aide de l'exercice 25 (question 3), montrer que $\frac{\text{aire}(AMN)}{\text{aire}(ABC)} = \frac{1}{9}$, puis que ce rapport est compris entre $\frac{4}{9}$ et $\frac{1}{2}$. Quand ces valeurs sont-elles atteintes ? 4. Si $\vec{AM} = \frac{3}{5}\vec{AB}$, où Δ coupe-t-elle (AC) ?

Exercice 27 Deux lieux de barycentres ★★★★★

corrigé p. 48

1. ABC est un triangle ; pour t réel, $G_t = \text{Bar}\{(A, t^2 + 1); (B, t); (C, -t)\}$. a) Montrer que $\vec{AG}_t = f(t)\vec{CB}$, avec $f(t) = \frac{t}{t^2+1}$. b) Montrer que $f(\mathbb{R}) = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$. c) En déduire l'ensemble $\mathcal{L}$ des points G_t ($t \in \mathbb{R}$). d) Pour combien de valeurs de t obtient-on un même point de $\mathcal{L}$?
2. A et B sont deux points, Γ un cercle de centre O et de rayon r . À tout point M de Γ on associe $P = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 2); (M, 3)\}$. Soit $K = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$ et Ω le milieu de $[KO]$. Montrer, par double inclusion, que l'ensemble des points P (M décrivant Γ) est le cercle de centre Ω et de rayon $\frac{r}{2}$.

Exercice 28 Parallélogramme et coefficient négatif ★★★★★

corrigé p. 48

ABCD est un parallélogramme ; on rappelle (cours) que $D = \text{Bar}\{(A, 1); (B, -1); (C, 1)\}$. E est le milieu de $[BC]$ et F le point de $[CD]$ tel que $CF = \frac{1}{3}CD$.

1. Montrer que $F = \text{Bar}\{(A, 1); (B, -1); (C, 3)\}$.
2. Les droites (AE) et (BF) se coupent en P. Montrer que $P = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 3); (C, 3)\}$; en déduire $\frac{AP}{PE} = \frac{BP}{PF}$.
3. Les droites (AF) et (BD) se coupent en Q. Montrer que $\vec{BQ} = \frac{3}{5}\vec{BD}$ et $\vec{AQ} = \frac{3}{5}\vec{AF}$. 4. Calculer $\frac{\text{aire}(ABP)}{\text{aire}(ABCD)}$ (repère (A; $\vec{AB}$, $\vec{AD}$) et exercice 25).

Exercice 29 Le point de Nagel ★★★★★

corrigé p. 49

ABC est un triangle ; $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ et $p = \frac{a+b+c}{2}$ est son demi-périmètre.

1. Montrer qu'il existe un unique point D de $[BC]$ tel que $AB + BD = AC + CD$, et que $BD = p - c$, $DC = p - b$. On définit de même $E \in [CA]$ et $F \in [AB]$ par $BC + CE = BA + AE$ et $CA + AF = CB + BF$.
2. Montrer que $D = \text{Bar}\{(B, p - b); (C, p - c)\}$; écrire de même E et F.
3. En déduire que (AD), (BE), (CF) sont concourantes en $N = \text{Bar}\{(A, p - a); (B, p - b); (C, p - c)\}$ (point de Nagel) et que $\frac{AN}{ND} = \frac{a}{p-a}$.
4. Exemple : $B(0; 0)$, $C(14; 0)$, $A(5; 12)$. Calculer a , b , c , les coordonnées de D, N ; vérifier $N \in (AD)$.

Exercice 30 Le défi de la couverture ★★★★★

corrigé p. 49

ABC est un triangle, $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$; la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe $[BC]$ en A_1 .

1. Théorème de la bissectrice. a) H et K sont les projetés orthogonaux de A_1 sur (AB) et sur (AC) : justifier que $A_1H = A_1K$. b) En calculant de deux façons les aires des triangles ABA_1 et ACA_1 , montrer que $\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$.
2. En déduire que $A_1 = \text{Bar}\{(B, b); (C, c)\}$.
3. Soit $J = \text{Bar}\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$. Montrer que J appartient à la bissectrice issue de A, puis à celles issues de B et de C. Conclure : le centre I du cercle inscrit dans ABC est $\text{Bar}\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$.
4. Calculer les coordonnées de I pour le triangle de l'exercice 29. 5. Droite de Nagel. Avec le point N de l'exercice 29 et le centre de gravité G, montrer que $G = \text{Bar}\{(I, 2); (N, 1)\}$. En déduire que I, G, N sont alignés et que $GN = 2GI$; vérifier sur l'exemple.

Partie C • La banque

36 exercices supplémentaires classés par thème, du niveau Bases au niveau Concours

19 Barycentre de deux points

Si $\alpha + \beta \neq 0$, $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ est l'unique point tel que $\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} = \vec{0}$; $\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\vec{AB}$ et, pour tout point M , $\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} = (\alpha + \beta)\vec{MG}$. Si $\alpha + \beta = 0$, il n'y a pas de barycentre et $\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} = \alpha\vec{BA}$ ne dépend pas de M .

Exercice 31 Des coefficients qui se simplifient ★

corrigé p. 50

Soient A et B deux points tels que $AB = 6$ cm.

1. Pour chaque système : admet-il un barycentre G ? Si oui, le simplifier (coefficients entiers si possible), exprimer $\vec{AG}$ en fonction de $\vec{AB}$, dire si $G \in [AB]$ et placer G sur une même figure.

$$\mathcal{S}_1 = \{(A, \sqrt{3}); (B, \sqrt{12})\}; \quad \mathcal{S}_2 = \left\{\left(A, \frac{1}{\sqrt{2}-1}\right); (B, \sqrt{2}+1)\right\}; \quad \mathcal{S}_3 = \left\{\left(A, \frac{2}{3}\right); (B, -\frac{1}{6})\right\};$$

$$\mathcal{S}_4 = \{(A, 3m^2 + 3); (B, m^2 + 1)\} \text{ (} m \text{ réel)}; \quad \mathcal{S}_5 = \{(A, 1 - \sqrt{2}); (B, 1 + \sqrt{2})\};$$

$$\mathcal{S}_6 = \{(A, \sqrt{2} - 1); (B, 1 - \sqrt{2})\}.$$

2. Le partage doré. Soit $D = \text{Bar}\{(A, \sqrt{5} - 1); (B, 2)\}$. a) Montrer que $\vec{AD} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\vec{AB}$. b) Montrer que $AD^2 = AB \times DB$. c) Calculer $\frac{DA}{DB}$.

Exercice 32 Transférer une masse ★

corrigé p. 50

Soient A et B deux points tels que $AB = 5$ cm, $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 4)\}$ et $H = \text{Bar}\{(A, 7); (B, -2)\}$.

- Exprimer $\vec{AG}$ et $\vec{AH}$ en fonction de $\vec{AB}$, puis placer G et H .
- Pour tout point M , réduire $\vec{u} = \vec{MA} + 4\vec{MB}$ et $\vec{v} = 7\vec{MA} - 2\vec{MB}$, calculer $\vec{u} - \vec{v}$ et en déduire $\vec{HG}$ en fonction de $\vec{AB}$. Le système $\{(A, 6); (B, -6)\}$ a-t-il un barycentre ? Interpréter (« transfert » d'une masse 6 de B vers A).
- Soit $s \neq 0$ et, pour x réel, $G_x = \text{Bar}\{(A, x); (B, s - x)\}$. a) Montrer que $G_x \vec{G}_y = \frac{x-y}{s}\vec{AB}$ pour tous réels x, y . b) Pour $s = 5$, quand a-t-on $G_x \in [AB]$? Pour quel x a-t-on $G_x = K$, où $K \in [AB]$ et $AK = 3,5$ cm ?

Exercice 33 Deux points conjugués ★★

corrigé p. 51

Soient A et B deux points distincts, I le milieu de $[AB]$ et k un réel strictement positif, différent de 1. On pose $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, k)\}$ et $G' = \text{Bar}\{(A, 1); (B, -k)\}$.

1. Justifier l'existence de G et G' , montrer que $\vec{GA} = -k\vec{GB}$ et $\vec{G'A} = k\vec{G'B}$, puis situer G et G' par rapport au segment $[AB]$.
2. Dans le repère $(I; \vec{IB})$ de la droite (AB) , calculer les abscisses x et x' de G et G' ; montrer que $xx' = 1$ (relation de Newton), puis que $A = \text{Bar}\{(G, 1+k); (G', 1-k)\}$ et $B = \text{Bar}\{(G, 1+k); (G', k-1)\}$.
3. *Construction.* Soit $\vec{u}$ non colinéaire à $\vec{AB}$, et P, Q, Q' tels que $\vec{AP} = k\vec{u}$, $\vec{BQ} = -\vec{u}$, $\vec{BQ'} = \vec{u}$. Montrer que $G = \text{Bar}\{(P, 1); (Q, k)\}$ et $G' = \text{Bar}\{(P, 1); (Q', -k)\}$, puis que $G = (PQ) \cap (AB)$ et $G' = (PQ') \cap (AB)$.
4. Application : $AB = 4$ cm et $k = 3$. Calculer AG, AG', IG et IG' , puis faire la construction de la question 3.

Exercice 34 Échanger les coefficients ★★

corrigé p. 51

Soient A et B deux points distincts, I le milieu de $[AB]$, et α, β deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$. On pose $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ et $H = \text{Bar}\{(A, \beta); (B, \alpha)\}$.

1. Exprimer $\vec{AG}$ et $\vec{AH}$ en fonction de $\vec{AB}$. En déduire que I est le milieu de $[GH]$. À quelle condition a-t-on $G = H$?
2. Application : $AB = 5$ cm, $\alpha = 6$ et $\beta = -1$. Placer G, H et I , et contrôler le résultat de la question 1.
3. a) Montrer que le symétrique G_1 de G par rapport à A est $\text{Bar}\{(A, \alpha + 2\beta); (B, -\beta)\}$. b) Montrer que le symétrique B_1 de B par rapport à G est $\text{Bar}\{(A, 2\alpha); (B, \beta - \alpha)\}$. c) Placer G_1 et B_1 dans la situation de la question 2.

Exercice 35 Les moyennes sont des barycentres ★★★

corrigé p. 52

Sur une droite graduée, A et B ont pour abscisses a et b , avec $0 < a < b$; le barycentre de $\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$ a pour abscisse $\frac{\alpha a + \beta b}{\alpha + \beta}$.

1. Montrer que $H = \text{Bar}\{(A, b); (B, a)\}$, $Q = \text{Bar}\{(A, \sqrt{b}); (B, \sqrt{a})\}$, $C = \text{Bar}\{(A, a); (B, b)\}$ et le milieu I de $[AB]$ ont pour abscisses $h = \frac{2ab}{a+b}$, $g = \sqrt{ab}$, $c = \frac{a^2+b^2}{a+b}$ et $m = \frac{a+b}{2}$ (moyennes harmonique, géométrique, arithmétique).
2. Pour $w > 0$, on note $p(w)$ l'abscisse de $P_w = \text{Bar}\{(A, w); (B, 1)\}$. a) Calculer $p(w) - p(w')$ ($w, w' > 0$) et montrer que p est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ (plus la masse en A est grande, plus P_w est proche de A).
b) Écrire H, Q, I et C sous la forme P_w , puis en déduire que $a < h < g < m < c < b$.
3. Montrer que $g^2 = hm$ et que I est le milieu de $[HC]$ (comparer avec l'exercice 34). Placer les points lorsque $a = 1$ et $b = 4$.

Exercice 36 Approcher B pas à pas ★★★

corrigé p. 52

Soient A et B deux points distincts. On définit une suite de points $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $G_0 = A$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $G_{n+1} = \text{Bar}\{(G_n, 2); (B, 1)\}$.

1. On prend $AB = 9$ cm. Calculer AG_1 , AG_2 et AG_3 , puis placer ces points.
2. a) Exprimer $\vec{AG}_{n+1}$ en fonction de $\vec{AG}_n$ et de $\vec{AB}$. b) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\vec{AG}_n = \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)\vec{AB}$. c) En déduire que $G_n = \text{Bar}\{(A, 2^n); (B, 3^n - 2^n)\}$.
3. Montrer que tous les points G_n appartiennent à $[AB]$, sont distincts de B , et que $G_n B = \left(\frac{2}{3}\right)^n AB$. Quel est le plus petit entier n tel que $G_n B < \frac{AB}{100}$?

20

Trois points et plus

Si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, $G = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$ vérifie $\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} + \gamma\vec{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\vec{MG}$ pour tout M , donc $\vec{AG} = \frac{\beta\vec{AB} + \gamma\vec{AC}}{\alpha + \beta + \gamma}$; cela s'étend à n points.

Exercice 37 Trois barycentres dans un triangle ★

corrigé p. 53

Soit ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$.

1. Justifier l'existence de $G = \text{Bar}\{(A, 3); (B, -1); (C, 4)\}$, écrire $\vec{AG}$ à l'aide de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$, construire G .
2. Même question pour $H = \text{Bar}\{(A, 1); (B, -3); (C, -3)\}$; montrer que $\vec{AH} = \frac{6}{5}\vec{AI}$.
3. Le système $\{(A, 3); (B, -1); (C, -2)\}$ a-t-il un barycentre ? Soit $K = \text{Bar}\{(B, 1); (C, 2)\}$. Montrer que, pour tout point M , $3\vec{MA} - \vec{MB} - 2\vec{MC} = 3\vec{KA}$.
4. Soit $D = \text{Bar}\{(B, -1); (C, 4)\}$. Exprimer $\vec{AD}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$. En déduire que G est le milieu de $[AD]$, puis que D est le point d'intersection des droites (AG) et (BC) .

Exercice 38 Dans un rectangle ★

corrigé p. 53

Soit $ABCD$ un rectangle de centre O , avec $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm; K, J sont les milieux de $[AB]$, $[CD]$.

1. Soit $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 2); (C, 3); (D, -2)\}$. Montrer que $\vec{AG} = \frac{5}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AD}$ et construire G .
2. Montrer que, pour tout M , $\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC} - \vec{MD} = 2\vec{JK}$ et $2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MD} = \vec{CA}$; calculer leurs normes.
3. a) Trouver le point P tel que $\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} + \vec{PD} = 2\vec{JK}$. b) Existe-t-il N tel que $\vec{NA} + 2\vec{NB} + \vec{NC} = 4\vec{ND}$?

Exercice 39 Équilibrer un plateau carré ★★

corrigé p. 54

Un plateau carré $ABCD$ (côté 6 dm, centre O , masse négligeable) porte 1, 3, 3, 5 kg en A, B, C, D ; son point d'équilibre est $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 3); (C, 3); (D, 5)\}$; K, J sont les milieux de $[AB]$, $[CD]$.

1. Montrer que, pour tout point M , $\vec{MA} + 3\vec{MB} + 3\vec{MC} + 5\vec{MD} = 8\vec{MO} + 4\vec{MJ}$. En déduire que $\vec{OG} = \frac{1}{3}\vec{OJ}$ et placer G .
2. Où poser une masse supplémentaire de 6 kg pour ramener le point d'équilibre en O ?
3. Quelle plus petite masse peut-on poser sur le plateau pour ramener l'équilibre en O ? Où ?

4. On remplace les 1 kg posés en A par x kg ($x > 0$). Montrer que $x\vec{OA} + 3\vec{OB} + 3\vec{OC} + 5\vec{OD} = (x - 3)\vec{OA} - 2\vec{OB}$; pour quel x le point d'équilibre est-il sur (BD) ? Le placer.

Exercice 40 Cinq droites dans un pentagone ★★

corrigé p. 54

Soit $ABCDE$ un pentagone convexe et G l'isobarycentre de ses cinq sommets. On note M_1 le milieu de $[AB]$ et T_1 le centre de gravité du triangle CDE .

1. Montrer que, pour tout point M , $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} + \vec{ME} = 2\vec{MM}_1 + 3\vec{MT}_1$. En déduire que $G = \text{Bar}\{(M_1, 2); (T_1, 3)\}$ et exprimer $\vec{M_1G}$ en fonction de $\vec{M_1T_1}$.
2. À chaque côté du pentagone, on associe la droite qui joint son milieu au centre de gravité du triangle formé par les trois autres sommets. Montrer que ces cinq droites sont concourantes.

Exercice 41 Les centres de gravité d'un quadrilatère ★★★

corrigé p. 55

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe, G l'isobarycentre de A, B, C, D , et G_A, G_B, G_C, G_D les centres de gravité respectifs des triangles BCD, CDA, DAB et ABC .

1. Montrer que $G = \text{Bar}\{(A, 1); (G_A, 3)\}$. En déduire que les droites $(AG_A), (BG_B), (CG_C), (DG_D)$ sont concourantes et que $\vec{GG_A} = -\frac{1}{3}\vec{GA}$.
2. Montrer que $\vec{G_AG_B} = -\frac{1}{3}\vec{AB}$. Que dire des côtés du quadrilatère $G_A G_B G_C G_D$? Montrer que si $ABCD$ est un parallélogramme, $G_A G_B G_C G_D$ en est un aussi.
3. Un quadrilatère effacé. Il ne reste que G_A, G_B, G_C, G_D . Montrer que G est l'isobarycentre de ces quatre points et que $A = \text{Bar}\{(G, 4); (G_A, -3)\}$. Comment reconstruire $ABCD$?

Exercice 42 Trois parallèles aux côtés ★★★

corrigé p. 55

Soit ABC un triangle, a, b, c trois réels strictement positifs, $s = a + b + c$ et $G = \text{Bar}\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$.

1. Soient $P = \text{Bar}\{(A, a); (B, b + c)\}$ et $Q = \text{Bar}\{(A, a); (C, b + c)\}$. Montrer que $\vec{PG} = \frac{c}{s}\vec{BC}$ et $\vec{PQ} = \frac{b+c}{s}\vec{BC}$. En déduire que la parallèle à (BC) passant par G coupe (AB) en P et (AC) en Q , et que $\frac{PQ}{BC} = \frac{b+c}{s}$.
2. De même, les parallèles à (CA) et à (AB) passant par G coupent (BC) en R et (BA) en S , (CA) en T et (CB) en U . Écrire R, S, T, U comme barycentres et démontrer que $\frac{PQ}{BC} + \frac{RS}{CA} + \frac{TU}{AB} = 2$.
3. Montrer que G est le milieu de $[PQ]$ si et seulement si $b = c$. En déduire que G est le milieu de $[PQ], [RS]$ et $[TU]$ si et seulement si G est le centre de gravité de ABC .
4. Faire la figure pour $a = 2, b = 3, c = 5$ et vérifier la relation de la question 2.

21

Associativité et alignement

On ne change pas le barycentre d'un système en remplaçant plusieurs points par leur barycentre partiel, affecté de la somme (non nulle) de leurs coefficients. Alignement : écrire un point comme barycentre des deux autres ; concours : trouver un point commun à toutes les droites.

Exercice 43 Combiner deux systèmes ★

corrigé p. 56

Soit ABC un triangle et A', B', C' les milieux de $[BC], [CA], [AB]$. On pose $G_1 = \text{Bar}\{(A, 4); (B, 1); (C, 1)\}$ et $G_2 = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, 4)\}$.

1. Montrer que $G_1 = \text{Bar}\{(A, 4); (A', 2)\}$ et $G_2 = \text{Bar}\{(C, 4); (C', 2)\}$, puis construire G_1 et G_2 .

- En regroupant de deux façons les points du système $\{(A, 4); (B, 1); (C, 1); (A, 1); (B, 1); (C, 4)\}$, montrer que $M = \text{Bar}\{(A, 5); (B, 2); (C, 5)\}$ est le milieu de $[G_1 G_2]$.
- Soit $N = \text{Bar}\{(A, 7); (B, 1); (C, -2)\}$. Montrer que $N = \text{Bar}\{(G_1, 12); (G_2, -6)\}$ (utiliser le système $\{(A, 8); (B, 2); (C, 2); (A, -1); (B, -1); (C, -4)\}$). En déduire que G_1 est le milieu de $[NG_2]$ et que N, G_1, M, G_2 sont alignés.

Exercice 44 Une parallèle qui concourt ★

corrigé p. 56

Soit ABC un triangle, $G = \text{Bar}\{(A, 3); (B, 1); (C, -1)\}$, et B', C' tels que $\vec{AB'} = -\frac{1}{2}\vec{AC}$, $\vec{AC'} = \frac{1}{4}\vec{AB}$.

- Montrer que $B' = \text{Bar}\{(A, 3); (C, -1)\}$ et $C' = \text{Bar}\{(A, 3); (B, 1)\}$.
- Par associativité, montrer que G appartient aux droites (BB') et (CC') , et exprimer $\vec{BG}$ en fonction de $\vec{BB'}$ et $\vec{CG}$ en fonction de $\vec{CC'}$.
- Pourquoi ne peut-on pas regrouper $(B, 1)$ et $(C, -1)$? Montrer que $\vec{AG} = \frac{1}{3}\vec{CB}$. Conclure : les droites (BB') , (CC') et la parallèle à (BC) passant par A sont concourantes. Faire une figure.

Exercice 45 Des droites issues de B ★★

corrigé p. 57

Soit ABC un triangle et A' le milieu de $[BC]$. Pour $t \in]0, 1[$, on note P_t le point de $[AC]$ tel que $\vec{AP_t} = t\vec{AC}$, et X_t le point d'intersection des droites (BP_t) et (AA') .

- Montrer que $P_t = \text{Bar}\{(A, 1-t); (C, t)\}$, $A' = \text{Bar}\{(B, t); (C, t)\}$, puis $X_t = \text{Bar}\{(A, 1-t); (B, t); (C, t)\}$, $\vec{AX_t} = \frac{2t}{1+t}\vec{AA'}$ et $\vec{BX_t} = \frac{1}{1+t}\vec{BP_t}$.
- Calculer $\frac{\vec{AX_t}}{\vec{AA'}}$ pour $t = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$: les droites (BP_t) partagent-elles la médiane $[AA']$ en parts égales ? Pour quel t a-t-on $\vec{AX_t} = \frac{3}{4}\vec{AA'}$? Le point X_t peut-il être A' ?

Exercice 46 Les diagonales d'un quadrilatère ★★

corrigé p. 57

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe dont les diagonales se coupent en O , avec $\vec{AO} = \frac{2}{3}\vec{AC}$ et $\vec{BO} = \frac{3}{4}\vec{BD}$. On note I et J les milieux de $[AB]$ et $[CD]$.

- Montrer que $O = \text{Bar}\{(A, 1); (C, 2)\} = \text{Bar}\{(B, 1); (D, 3)\}$, puis que, pour tous réels $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, $O = \text{Bar}\{(A, \lambda); (C, 2\lambda); (B, \mu); (D, 3\mu)\}$.
- Avec $\lambda = \mu = 1$, on pose $R = \text{Bar}\{(C, 2); (D, 3)\}$. Montrer que $O = \text{Bar}\{(I, 2); (R, 5)\}$. En déduire que la droite (IO) coupe (CD) en R , et exprimer $\vec{CR}$ en fonction de $\vec{CD}$ et $\vec{OR}$ en fonction de $\vec{IR}$.
- En choisissant λ et μ , montrer que (JO) coupe (AB) en un point U , barycentre de A et B à préciser.

Exercice 47 Le centre de gravité d'un fil ★★★

corrigé p. 57

Un fil de fer homogène a la forme du contour d'un triangle ABC ; $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $s = a + b + c$, et A', B', C' sont les milieux de $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Chaque côté a pour centre de gravité son milieu et une masse proportionnelle à sa longueur (on l'admet) : le centre de gravité du fil est $S = \text{Bar}\{(A', a); (B', b); (C', c)\}$.

- En remplaçant (A', a) par $\left\{(B, \frac{a}{2}); (C, \frac{a}{2})\right\}$, etc., montrer que $S = \text{Bar}\{(A, b+c); (B, c+a); (C, a+b)\}$.
- Montrer que S est le centre de gravité G de ABC si et seulement si ABC est équilatéral.
- Soit $J = \text{Bar}\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$. Montrer que $S = \text{Bar}\{(G, 3); (J, -1)\}$. En déduire que S, G, J sont alignés et que $\vec{GS} = \frac{1}{2}\vec{JG}$. (Le point J est le centre du cercle inscrit : voir l'exercice 30.)
- Application : $A(0; 0), B(8; 0), C(0; 6)$ (repère orthonormé). Calculer a, b, c, S, G, J ; figure.

Exercice 48 Concours et alignement ★★★

corrigé p. 58

Soit ABC un triangle et $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 2); (C, 4)\}$. On pose :

$$A_1 = \text{Bar}\{(B, 2); (C, 4)\}, \quad B_1 = \text{Bar}\{(A, 1); (C, 4)\}, \quad C_1 = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 2)\};$$

$$A_2 = \text{Bar}\{(B, 2); (C, -4)\}, \quad B_2 = \text{Bar}\{(A, 1); (C, -4)\}, \quad C_2 = \text{Bar}\{(A, 1); (B, -2)\}.$$

1. Montrer que (AA_1) , (BB_1) , (CC_1) concourent en G ; préciser la position de G sur chacune.
2. Placer A_2 , B_2 , C_2 . Montrer que $A_2 = \text{Bar}\{(B_1, 5); (C_1, -3)\} = (B_1C_1) \cap (BC)$. Et pour B_2 , C_2 ?
3. Montrer que $-2\vec{MA}_2 + 3\vec{MB}_2 - \vec{MC}_2 = \vec{0}$ pour tout M ; en déduire que A_2 , B_2 , C_2 sont alignés.
4. Montrer que A_1 et A_2 sont conjugués par rapport à B et C (exercice 33). Construire A_2 , B_2 , C_2 à la règle seule.

22

Coordonnées du barycentre

Coordonnées : moyennes pondérées ; alignement de E, F, K : $\det(\vec{EF}, \vec{EK}) = 0$.

Exercice 49 Calculer des coordonnées ★

corrigé p. 59

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne $A(-3; 2)$, $B(5; -2)$ et $C(1; 6)$.

1. Calculer les coordonnées de $G_1 = \text{Bar}\{(A, 3); (B, 1)\}$ et de $G_2 = \text{Bar}\{(A, 1); (B, -3)\}$; vérifier que $\vec{AG}_1 = \frac{1}{4}\vec{AB}$ et $\vec{AG}_2 = \frac{3}{2}\vec{AB}$.
2. Calculer les coordonnées de $G_3 = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, 4)\}$ et de $G_4 = \text{Bar}\{(A, 2); (B, -1); (C, 1)\}$. Contrôler G_3 à l'aide du milieu I de $[AB]$.
3. Pourquoi $(A, 2)$, $(B, -1)$, $(C, -1)$ n'ont-ils pas de barycentre ? Calculer les coordonnées de $2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}$ pour $M(x; y)$.
4. Le repère est orthonormé : calculer G_1A et G_1B , et expliquer pourquoi $G_1B = 3G_1A$.

Exercice 50 Le point manquant ★

corrigé p. 59

1. Dans un repère, $A(1; -2)$ et $G(3; 0)$. Déterminer le point B tel que $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$.
2. $C(-1; 4)$, $D(5; 1)$, $E(1; 3)$. Montrer que C, D, E sont alignés ; trouver α tel que $E = \text{Bar}\{(C, \alpha); (D, 1)\}$.
3. $P(2; -1)$, $Q(-1; 5)$, $R(0; 3)$, $S(3; 0)$. Lequel des points R, S est un barycentre de P et Q ? L'écrire avec des coefficients entiers.
4. Déterminer le point T tel que $P = \text{Bar}\{(T, 3); (Q, -1)\}$, puis l'écrire comme barycentre de P et Q .

Exercice 51 Coefficients et demi-plans ★★

corrigé p. 59

Dans un repère, on donne $A(-1; -1)$, $B(5; 1)$, $C(1; 5)$, et I le milieu de $[BC]$.

1. Justifier que ABC est un triangle. Écrire $M(2; 2)$ sous la forme $\text{Bar}\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$, avec $a + b + c = 1$. En déduire que M est intérieur au triangle, qu'il est sur (AI) , et calculer $\frac{AM}{AI}$.
2. Même travail pour $N(5; 5)$: où se trouve N ?
3. Montrer que $M(x; y) = \text{Bar}\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$ avec $a + b + c = 1$ si et seulement si

$$a = \frac{6 - x - y}{8}, \quad b = \frac{3x - y + 2}{16}, \quad c = \frac{3y - x + 2}{16}.$$

4. Donner une équation de (BC) , (CA) , (AB) et interpréter le signe de a, b, c . Situer $P(-3; 2)$.

Exercice 52 Barycentres à coordonnées entières ★★

corrigé p. 60

Dans un repère, $A(1; -2)$ et $B(7; 4)$; pour $m \neq -1$, G_m est le barycentre de (A, m) et $(B, 1)$.

1. Montrer que $\vec{AG}_m = \frac{1}{m+1}\vec{AB}$ et que $G_m\left(1 + \frac{6}{m+1}; -2 + \frac{6}{m+1}\right)$.
2. Déterminer les entiers m pour lesquels G_m a des coordonnées entières, et placer ces points.
3. Montrer que les points de (AB) à coordonnées entières sont les $(1 + k; -2 + k)$, $k \in \mathbb{Z}$. $E(5; 2)$ est-il l'un des G_m , m entier? L'écrire comme barycentre de A et B à coefficients entiers.
4. Montrer que tout point entier de (AB) est barycentre de A et B à coefficients entiers de somme 6.

Exercice 53 Retrouver un triangle ★★★

corrigé p. 60

D'un triangle ABC effacé, il reste : P milieu de $[AB]$, $Q = \text{Bar}\{(B, 1); (C, 2)\}$, $R = \text{Bar}\{(C, 1); (A, -2)\}$, avec $P(3; 0)$, $Q(1; 3)$, $R(3; -3)$ dans un repère d'origine O .

1. Écrire les trois relations liant $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ à $\vec{OP}$, $\vec{OQ}$, $\vec{OR}$. En éliminant B et C , montrer que $A = \text{Bar}\{(P, 2); (Q, -3); (R, -2)\}$, puis reconstituer A, B, C .
2. Cas général : $P = \text{Bar}\{(A, 1); (B, p)\}$, $Q = \text{Bar}\{(B, 1); (C, q)\}$, $R = \text{Bar}\{(C, 1); (A, r)\}$ ($p, q, r \neq -1$). Montrer que

$$(1 + pqr)\vec{OA} = (1 + p)\vec{OP} - p(1 + q)\vec{OQ} + pq(1 + r)\vec{OR} \quad \text{pour tout point } O.$$

En déduire que, si $1 + pqr \neq 0$, le triangle ABC est entièrement déterminé par P, Q, R .

3. Si $1 + pqr = 0$, montrer (avec $O = Q$) que P, Q, R sont alignés. Conclusion pour trois points donnés non alignés?
4. Cas $p = q = r = k \neq -1$: montrer que $A = \text{Bar}\{(P, 1); (Q, -k); (R, k^2)\}$ et que la reconstruction est toujours possible. Cas des milieux?

Exercice 54 Aires et déterminants ★★★

corrigé p. 61

Le repère est orthonormé ; on admet que $\text{aire}(XYZ) = \frac{1}{2} |\det(\vec{XY}, \vec{XZ})|$. Soit ABC un triangle d'aire $\mathcal{S}$ et $M = \text{Bar}\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$, avec $a + b + c = 1$.

1. Exemple : $A(-2; -1)$, $B(6; 1)$, $C(0; 5)$, $M = \text{Bar}\{(A, 4); (B, 5); (C, 2)\}$. Calculer $\mathcal{S}$, M et les aires de MBC , MCA , MAB . Remarque?
2. Montrer que $\vec{MB} = a\vec{AB} + c\vec{CB}$ et $\vec{MC} = a\vec{AC} + b\vec{BC}$, puis que $\det(\vec{MB}, \vec{MC}) = a \det(\vec{AB}, \vec{AC})$.
3. En déduire $\text{aire}(MBC) = |a| \mathcal{S}$, $\text{aire}(MCA) = |b| \mathcal{S}$, $\text{aire}(MAB) = |c| \mathcal{S}$, puis que tout point M intérieur au triangle est $\text{Bar}\{(A, \text{aire}(MBC)); (B, \text{aire}(MCA)); (C, \text{aire}(MAB))\}$.
4. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $\text{aire}(MBC) = \mathcal{S}$ (utiliser le point A^* tel que $\vec{AA^*} = \vec{AB} + \vec{AC}$).

23

Lignes de niveau

On **réduit** d'abord chaque somme vectorielle, puis on reconnaît l'ensemble.

Exercice 55 Cercle, point, plan ou vide ★

corrigé p. 61

A et B sont deux points tels que $AB = 10$; $G = \text{Bar}\{(A, 4); (B, 1)\}$ et $H = \text{Bar}\{(A, 1); (B, -6)\}$.

1. Calculer AG et AH , et placer G et H sur la droite (AB) .
2. Déterminer et construire $\Gamma_1 = \{M : \|4\vec{MA} + \vec{MB}\| = 15\}$, $\Gamma_2 = \{M : \|\vec{MA} - 6\vec{MB}\| = 0\}$ et $\Gamma_3 = \{M : \|\vec{MA} - 6\vec{MB}\| = 10\}$.
3. Pour quels réels k l'ensemble $\{M : \|4\vec{MA} - 4\vec{MB}\| = k\}$ est-il vide ? le plan tout entier ?
4. Lequel des ensembles Γ_1, Γ_3 passe par B ? Montrer par l'absurde que Γ_1 et Γ_3 sont disjoints.

Exercice 56 Lignes de niveau dans un carré ★

corrigé p. 62

$ABCD$ est un carré de côté 4, de centre O ; I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[BC]$. Repère orthonormé $(A; \vec{i}, \vec{j})$, avec $B(4; 0)$ et $D(0; 4)$.

1. Vérifier que $B = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, 1); (D, -1)\}$ et que $D = \text{Bar}\{(A, 1); (B, -1); (C, 1); (D, 1)\}$.
2. Déterminer et représenter les ensembles de points M tels que :
 $\mathcal{E}_1 : \|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}\| = 8$; $\mathcal{E}_2 : \|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} - \vec{MD}\| = 4$;
 $\mathcal{E}_3 : \|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} - \vec{MD}\| = \|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}\|$; $\mathcal{E}_4 : \|\vec{MA} + \vec{MC}\| = \|2\vec{MB}\|$.
3. Montrer que $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ ont exactement deux points communs, I et J , et qu'ils sont sur $\mathcal{E}_4$.

Exercice 57 Disques et demi-plans ★★

corrigé p. 62

Repère orthonormé ; $A(-3; -1)$, $B(3; -1)$, $C(0; 5)$; G centre de gravité de ABC , I milieu de $[AB]$.

1. Calculer G et I . Déterminer $\mathcal{D} = \{M : \|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| \leq 6\}$.
2. Déterminer $\mathcal{P}_1 = \{M : \|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| \geq \|3\vec{MC}\|\}$, et montrer que $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}_1$ est réduit à un point T .
3. Déterminer $\mathcal{P}_2 = \{M : \|\vec{MA} + \vec{MB}\| \leq \|2\vec{MC}\|\}$ et représenter $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}_2$. Contient-il O, I, T, A ?
4. Montrer que $\mathcal{D} = \{M : \|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| \leq \|\vec{MA} - \vec{MB}\|\}$, puis décrire $\{M : 3 \leq \|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| \leq 6\}$.

Exercice 58 Le cercle circonscrit, ligne de niveau ★★

corrigé p. 62

Repère orthonormé ; $A(-4; 0)$, $B(4; 0)$, $C(2; 6)$; I est le milieu de $[AB]$.

1. Montrer que $\Omega(0; 2)$ est le centre du cercle Γ circonscrit à ABC ; calculer son rayon R .
2. Trouver a, b, c , de somme 12, tels que $\Omega = \text{Bar}\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$.
3. En déduire que $\Gamma = \{M : \|5\vec{MA} + 3\vec{MB} + 4\vec{MC}\| = 24\sqrt{5}\}$; le vérifier directement pour $M = C$.
4. Déterminer une équation de $\Delta = \{M : \|5\vec{MA} + 3\vec{MB} + 4\vec{MC}\| = \|12\vec{MC}\|\}$.
5. a) Écrire le cercle de centre I passant par C sous la forme $\{M : \|\vec{MA} + \vec{MB}\| = k\}$. b) Montrer que Γ n'est égal à aucun ensemble $\{M : \|\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB}\| = k\}$ (avec $\alpha + \beta \neq 0$).

Exercice 59 Optimiser avec les lignes de niveau ★★★

corrigé p. 63

Repère orthonormé ; $A(1; 3)$, $B(5; -1)$, $C(2; 3)$ et, pour tout point M , $f(M) = \|3\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC}\|$.

1. Montrer que $f(M) = 2MG$ pour un point G à préciser. Que sont les lignes de niveau $\{M : f(M) = k\}$?
2. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x + y = 5$. a) Pour $M(t; 5 - t)$, exprimer $f(M)^2$ en fonction de t . b) Discuter, selon $k > 0$, le nombre de points communs à $\mathcal{D}$ et à la ligne de niveau $f = k$. c) En déduire le minimum de f sur $\mathcal{D}$ et le point M_0 où il est atteint ; interpréter.
3. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(5; 5)$ et de rayon $\frac{5}{2}$. a) Montrer que $\frac{5}{2} \leq MG \leq \frac{15}{2}$ sur $\mathcal{C}$. b) En déduire le minimum et le maximum de f sur $\mathcal{C}$, et les points M_1, M_2 où ils sont atteints.

Exercice 60 Les hauteurs par les lignes de niveau ★★★

corrigé p. 63

Dans un triangle ABC , on pose $A^* = \text{Bar}\{(A, -1); (B, 1); (C, 1)\}$, $B^* = \text{Bar}\{(A, 1); (B, -1); (C, 1)\}$ et $C^* = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, -1)\}$.

1. Montrer que C est le milieu de $[A^*B^*]$ et que $A^*\vec{B}^* = 2\vec{BA}$. Résultats analogues pour A et B ?
2. Montrer que $\Delta_C = \{M : \|-\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\|\}$ est la médiatrice de $[A^*B^*]$, puis la hauteur de ABC issue de C . Définir de même Δ_A et Δ_B .
3. En déduire que les trois hauteurs sont concourantes en un point H , et que l'ensemble des points M tels que $\|-\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC}\|$ est $\{H\}$.
4. Application : $A(-2; 0)$, $B(4; 0)$, $C(0; 4)$ (repère orthonormé). Calculer A^* , B^* , C^* , H ; vérifier que $HA^* = HB^* = HC^*$. Quel est l'ensemble $\{M : \|-\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = 2\sqrt{10}\}$?

24

Défis de concours

Grands théorèmes, plaques, partages et lieux : le barycentre en concours.

Exercice 61 Le théorème de Desargues ★★★★★

corrigé p. 64

Les droites (AA') , (BB') , (CC') joignant les sommets de deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont distinctes et concourantes en un point O distinct des six sommets.

1. Justifier l'existence de réels a, b, c tels que $O = \text{Bar}\{(A, a); (A', 1 - a)\} = \text{Bar}\{(B, b); (B', 1 - b)\} = \text{Bar}\{(C, c); (C', 1 - c)\}$, puis que, pour tout M : $a\vec{MA} + (1 - a)\vec{MA}' = b\vec{MB} + (1 - b)\vec{MB}' = c\vec{MC} + (1 - c)\vec{MC}'$.
2. On suppose $a \neq b$. Montrer que $P = \text{Bar}\{(A, a); (B, -b)\}$ est aussi $\text{Bar}\{(A', a - 1); (B', 1 - b)\}$, et en déduire que (AB) et $(A'B')$ se coupent en P . Et si $a = b$?
3. a, b, c sont deux à deux distincts ; on définit de même $Q = (BC) \cap (B'C')$ et $R = (CA) \cap (C'A')$. Montrer que $(a - b)\vec{MP} + (b - c)\vec{MQ} + (c - a)\vec{MR} = \vec{0}$ pour tout M , et en déduire que P, Q, R sont alignés.
4. Application : $O(0; 0)$, $A(4; 0)$, $B(0; 4)$, $C(-2; 2)$, $A'(6; 0)$, $B'(0; 2)$, $C'(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2})$: calculer a, b, c, P, Q, R .

Exercice 62 Le théorème de Radon ★★★★★

corrigé p. 64

A, B, C, D sont quatre points distincts du plan.

1. Montrer qu'il existe des réels $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ non tous nuls, de somme nulle, tels que $\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} + \gamma\vec{MC} + \delta\vec{MD} = \vec{0}$ pour tout M (considérer $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$).
2. Justifier qu'un coefficient au moins est > 0 et un au moins < 0 . Montrer que le barycentre K des points de coefficient > 0 (avec leurs coefficients) est aussi celui des points de coefficient < 0 (avec les opposés).
3. On suppose que trois des quatre points ne sont jamais alignés. a) Montrer qu'aucun coefficient n'est nul et que la relation est unique à un facteur près. b) En déduire qu'on est dans **un et un seul** des cas : un point est intérieur au triangle des trois autres ; deux segments joignant les points se coupent en un point intérieur à chacun.
4. Applications : a) $A(0;0), B(4;0), C(4;4), D(0;2)$; b) $A(0;0), B(6;0), C(0;6), E(1;1)$. Relation, cas, point K ?

Exercice 63 La plaque quadrilatère ★★★★★

corrigé p. 65

On admet : (P1) une plaque triangulaire homogène a pour centre de gravité celui du triangle ; (P2) une plaque homogène formée de deux plaques disjointes d'aires s_1, s_2 et de centres G_1, G_2 a pour centre $\text{Bar}\{(G_1, s_1); (G_2, s_2)\}$. Le quadrilatère $ABCD$ est convexe, ses diagonales se coupent en O , G est le centre de la plaque.

1. Montrer que $\frac{\text{aire}(ABD)}{\text{aire}(CBD)} = \frac{OA}{OC}$.
2. En découpant selon $[BD]$, montrer que $3\vec{MG} = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} - \vec{MO}$ pour tout M , puis que G est le centre de gravité de ACO' (O' : symétrique de O par rapport au milieu de $[BD]$).
3. Montrer que G est l'isobarycentre des sommets si et seulement si $ABCD$ est un parallélogramme.
4. $A(0;0), B(4;-1), C(3;6), D(0;3)$ (repère orthonormé) : calculer O, O', G ; contrôler selon $[AC]$.

Exercice 64 Partager un champ en deux ★★★★★

corrigé p. 66

ABC est un triangle d'aire $\mathcal{S}$, I le milieu de $[BC]$, $P \in [BC]$ et $\vec{CP} = t\vec{CB}$, avec $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$.

1. Montrer que, si $\vec{CM} = m\vec{CB}$ et $\vec{CN} = n\vec{CA}$ avec $m, n \in [0, 1]$, alors $\text{aire}(CMN) = mn\mathcal{S}$.
2. La parallèle à (AP) passant par I coupe (AC) en Q . Montrer que $\vec{CQ} = \frac{1}{2t}\vec{CA}$ et que (PQ) **partage le triangle en deux parties de même aire**.
3. Application : $A(1;5), B(0;0), C(8;0), P(2;0)$: calculer Q et vérifier le partage.
4. On suppose $t \geq \frac{2}{3}$. Les parallèles à (AP) par U et V ($\vec{CU} = \frac{1}{3}\vec{CB}$, $\vec{CV} = \frac{2}{3}\vec{CB}$) coupent (AC) en Q_1, Q_2 . Montrer que (PQ_1) et (PQ_2) partagent le triangle en trois parties de même aire.

Exercice 65 Le lieu du milieu ★★★★★

corrigé p. 66

Dans le triangle ABC , $b = CA < c = AB$ et A' est le milieu de $[BC]$. Pour $\lambda \in [0, b]$, $M \in [BA]$ et $N \in [CA]$ vérifient $BM = CN = \lambda$, et K est le milieu de $[MN]$. On pose $\vec{u} = \frac{1}{c}\vec{BA}$ et $\vec{v} = \frac{1}{b}\vec{CA}$.

1. Montrer que $M = \text{Bar}\{(B, c - \lambda); (A, \lambda)\}$, $N = \text{Bar}\{(C, b - \lambda); (A, \lambda)\}$ et $A'K = \frac{\lambda}{2}(\vec{u} + \vec{v})$.
2. En déduire que le lieu de K est un segment $[A'E]$, avec $E \in [AB]$ et $AE = \frac{c-b}{2}$.

3. Montrer que $\vec{u} + \vec{v}$ dirige la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ (construire un losange).
4. La droite $(A'E)$ coupe (AC) en F . Montrer que $AE = AF$ et $BE = CF = \frac{b+c}{2}$.
5. Application : $A(0; 0)$, $B(6; 8)$, $C(5; 0)$ (repère orthonormé) : A' , E , F ?

Exercice 66 Lieux définis par des aires ★★★★★*corrigé p. 67*

Le triangle ABC a pour aire $\mathcal{S}$ et pour centre de gravité G ; A_0 , B_0 , C_0 sont les milieux des côtés. Pour M dans le triangle (bords compris), $S_A = \text{aire}(MBC)$, $S_B = \text{aire}(MCA)$, $S_C = \text{aire}(MAB)$ (exercice 54).

1. Justifier que $S_A + S_B + S_C = \mathcal{S}$ et $M = \text{Bar}\{(A, S_A); (B, S_B); (C, S_C)\}$. Point M tel que $S_A = 2S_B = 3S_C$?
2. Ensemble des points M du triangle tels que : a) $S_B = S_C$; b) $S_A = S_B + S_C$; c) S_A, S_B, S_C en progression arithmétique.
3. Montrer que $\{M : S_A \geq S_B \geq S_C\}$ est le triangle AC_0G ; son aire ? Conséquence pour les médianes ?
4. Déterminer les points M du plan tels que MBC, MCA, MAB aient la même aire (voir l'exercice 60).

Partie D • Corrigés

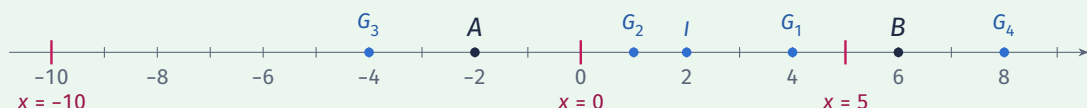
Des solutions détaillées, rédigées comme sur une copie

25 Corrigés du niveau 1

■ Corrigé de l'exercice 1

1. **Les sommes des coefficients (4, 8, 4, 4, 2) sont non nulles : les cinq points existent.** On utilise $\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\vec{AB}$, avec $AB = 6 - (-2) = 8$: l'abscisse de G est $-2 + 8 \times \frac{\beta}{\alpha+\beta}$.

$$\vec{AG}_1 = \frac{3}{4}\vec{AB} : \text{abscisse } \boxed{4} ; \vec{AG}_2 = \frac{3}{8}\vec{AB} : \boxed{1} ; \vec{AG}_3 = \frac{-1}{4}\vec{AB} : \boxed{-4} ; \vec{AG}_4 = \frac{5}{4}\vec{AB} : \boxed{8} ; \vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB} : \boxed{2}.$$



2. **Par Chasles** : $7\vec{GA} = 7\vec{GB} \iff 7(\vec{GA} + \vec{BG}) = \vec{0} \iff 7\vec{BA} = \vec{0}$, ce qui est faux car $A \neq B$, quel que soit G. Il n'existe **aucun** tel point : la somme des coefficients est nulle.
3. Le point M d'abscisse x vérifie $\vec{AM} = \frac{x+2}{8}\vec{AB}$; on cherche $\frac{\beta}{\alpha+\beta} = \frac{x+2}{8}$.
- a) $\frac{\beta}{\alpha+\beta} = \frac{1}{4} \iff \alpha = 3\beta : (A, 3) ; (B, 1)$. b) $\frac{\beta}{\alpha+\beta} = -1 \iff \alpha = -2\beta : (A, 2) ; (B, -1)$. c) $\frac{\beta}{\alpha+\beta} = \frac{7}{8} \iff 7\alpha = \beta : (A, 1) ; (B, 7)$.
4. $x_G = x_A + \frac{\beta}{\alpha+\beta}(x_B - x_A) = -2 + \frac{8\beta}{\alpha+\beta} = \frac{-2\alpha-2\beta+8\beta}{\alpha+\beta} = \frac{-2\alpha+6\beta}{\alpha+\beta}$. Pour G_4 : $\frac{2+30}{4} = 8 \checkmark$.

■ Corrigé de l'exercice 2

1. **Méthode** : tout ramener à une relation $\alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} = \vec{0}$ (Chasles si besoin), puis $\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\vec{AB}$.
- a) $G = \text{Bar}\{(A, 3); (B, 5)\}$, $\vec{AG} = \frac{5}{8}\vec{AB}$. b) $2\vec{GA} - 7\vec{GB} = \vec{0} : G = \text{Bar}\{(A, 2); (B, -7)\}$ (somme $-5 \neq 0$), $\vec{AG} = \frac{-7}{-5}\vec{AB} = \frac{7}{5}\vec{AB}$. c) $4\vec{AG} + 3\vec{AB} = \vec{0} \iff 4\vec{AG} + 3\vec{AG} + 3\vec{GB} = \vec{0} \iff 7\vec{GA} - 3\vec{GB} = \vec{0} : G = \text{Bar}\{(A, 7); (B, -3)\}$. d) $\vec{BG} = 3\vec{AB} \iff \vec{BA} + \vec{AG} = 3\vec{AB} \iff \vec{AG} = 4\vec{AB} = 4\vec{AG} + 4\vec{GB} \iff 3\vec{GA} - 4\vec{GB} = \vec{0} : G = \text{Bar}\{(A, 3); (B, -4)\}$, $\vec{AG} = 4\vec{AB}$. e) $3\vec{BA} = 3\vec{BG} + 3\vec{GA}$, donc la relation s'écrit $\vec{GA} + 2\vec{GB} - 3\vec{GA} + 3\vec{GB} = \vec{0}$, soit $-2\vec{GA} + 5\vec{GB} = \vec{0} : G = \text{Bar}\{(A, -2); (B, 5)\}$, $\vec{AG} = \frac{5}{3}\vec{AB}$.
2. **Homogénéité** : $(-6, 15) = 3 \times (-2, 5)$: c'est le point e) ; $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{7}) \times 21 = (7, -3)$: c'est le point c). Seul a) a des coefficients de même signe : **seul le point a) est sur [AB]** (les autres ont $\frac{\beta}{\alpha+\beta} \notin [0; 1]$).

■ Corrigé de l'exercice 3

1. **Règle du cours** : coefficients de même signe $\Rightarrow G \in [AB]$; signes contraires $\Rightarrow G$ hors de $[AB]$, du côté du point de plus grand coefficient en valeur absolue ; et comme $|\alpha|GA = |\beta|GB$, G est plus proche du point le plus « lourd ».

$G_1(2, 7)$ et $G_4(-5, -1)$ sont sur $[AB]$; $G_2(-3, 1)$ et $G_5(9, -1)$ sont au-delà de A ; $G_3(4, -5)$ est au-delà de B . Plus proches de B : G_1, G_3 ; plus proches de A : G_2, G_4, G_5 .

2. $\vec{AG}_1 = \frac{7}{9}\vec{AB}$, $\vec{AG}_2 = \frac{1}{-2}\vec{AB} = -\frac{1}{2}\vec{AB}$, $\vec{AG}_3 = \frac{-5}{-1}\vec{AB} = 5\vec{AB}$, $\vec{AG}_4 = \frac{-1}{-6}\vec{AB} = \frac{1}{6}\vec{AB}$, $\vec{AG}_5 = -\frac{1}{8}\vec{AB}$ ✓. Figure en vraie grandeur ($AB = 2$ cm) :



3. Le point existe $\iff \alpha \neq -2$, et alors $\vec{AG} = \frac{2}{\alpha+2}\vec{AB}$. $G \in [AB] \iff 0 \leq \frac{2}{\alpha+2} \leq 1 \iff \alpha + 2 \geq 2$ (le quotient positif impose $\alpha + 2 > 0$) : $\boxed{\alpha \geq 0}$. Comme $\beta = 2 \neq 0$, $G \neq A$, et $|\alpha| GA = 2 GB$: $GB < GA \iff |\alpha| < 2$. Plus proche de $B \iff \boxed{-2 < \alpha < 2}$.

■ Corrigé de l'exercice 4

1. On réduit dès que la somme des coefficients est non nulle ; si elle est nulle, Chasles donne un vecteur constant.

$2 + 5 = 7 \neq 0$: avec $G = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 5)\}$, $\boxed{\vec{u} = 7\vec{MG}}$, et $\vec{AG} = \frac{5}{7}\vec{AB}$. $4 - 3 = 1$: avec $H = \text{Bar}\{(A, 4); (B, -3)\}$, $\boxed{\vec{v} = \vec{MH}}$, et $\vec{AH} = \frac{-3}{1}\vec{AB} = -3\vec{AB}$.

$-1 - 2 = -3$: avec $K = \text{Bar}\{(A, -1); (B, -2)\} = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$, $\boxed{\vec{w} = -3\vec{MK}}$, et $\vec{AK} = \frac{2}{3}\vec{AB}$. $-2 + 2 = 0$: $\vec{z} = 2(\vec{AM} + \vec{MB}) = \boxed{2\vec{AB}}$, indépendant de M .

2. a) $7\vec{MG} = 7\vec{AB} \iff \vec{GM} = \vec{BA}$: M est l'image de G par la translation de vecteur $\vec{BA}$, et $\vec{AM} = \frac{5}{7}\vec{AB} - \vec{AB} = \boxed{-\frac{2}{7}\vec{AB}}$.

b) $2\vec{AB} = 2\vec{AB}$ est vrai pour tout M : c'est **le plan tout entier**. $2\vec{AB} = \vec{BA} \iff 3\vec{AB} = \vec{0}$, faux : **ensemble vide**.

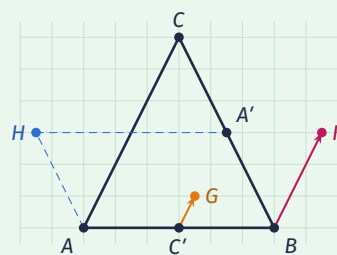
c) $\vec{MH} = 7\vec{MG} \iff 7\vec{MG} - \vec{MH} = \vec{0} \iff \boxed{M = \text{Bar}\{(G, 7); (H, -1)\}}$ (somme $6 \neq 0$). Directement : $2\vec{MA} - 8\vec{MB} = \vec{0}$, donc $M = \text{Bar}\{(A, 2); (B, -8)\} = \boxed{\text{Bar}\{(A, -1); (B, 4)\}}$, $\vec{AM} = \frac{4}{3}\vec{AB}$ (cohérent : $(G, 7)$ « vaut » $(A, 2)$, $(B, 5)$ et $(H, -1)$ « vaut » $(A, -4)$, $(B, 3)$).

■ Corrigé de l'exercice 5

1. $G\left(\frac{4-4}{3}; \frac{1+8}{3}\right) = \boxed{(0; 3)}$; H (somme 1) : $(12 + 4; 3 - 8) = \boxed{(16; -5)}$; $I\left(1; \frac{5}{2}\right)$.
2. $\vec{AB}(-6; 3)$, $\vec{AP}(-2; 1)$: $\det(\vec{AP}, \vec{AB}) = (-2) \times 3 - 1 \times (-6) = 0$, donc $P \in (AB)$, et $\vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{AB}$: $\boxed{P = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 1)\}}$. $\vec{AQ}(-3; 0)$: $\det(\vec{AQ}, \vec{AB}) = -9 \neq 0$: $Q \notin (AB)$; or tout barycentre de A et B est sur (AB) : Q **n'en est pas un**.
3. $M \in (AB) \iff \vec{AM} = t\vec{AB}$ ($t \in \mathbb{R}$) $\iff M(4 - 6t; 1 + 3t)$, et alors $M = \text{Bar}\{(A, 1 - t); (B, t)\}$. Ordonnée nulle : $t = -\frac{1}{3}$, $\boxed{(6; 0) = \text{Bar}\{(A, 4); (B, -1)\}}$. Abscisse 10 : $t = -1$, $\boxed{(10; -2) = \text{Bar}\{(A, 2); (B, -1)\}}$. (Et G est le point de (AB) sur l'axe des ordonnées.)

■ Corrigé de l'exercice 6

1. $2 + 3 + 1 = 6 \neq 0$: G existe. On introduit A par Chasles :
 $2\vec{GA} + 3(\vec{GA} + \vec{AB}) + (\vec{GA} + \vec{AC}) = \vec{0}$, soit $6\vec{AG} = 3\vec{AB} + \vec{AC}$:
 $\vec{AG} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{AC}$. Construction : on part du milieu C' de $[AB]$ et on trace le vecteur $\frac{1}{6}\vec{AC}$.
2. Somme 2 : $\vec{AH} = \frac{-\vec{AB} + \vec{AC}}{2} = \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{AC}) = \frac{1}{2}\vec{BC} = \vec{BA}'$. Donc
 $\vec{AB} = \vec{HA}'$: $ABA'H$ est un parallélogramme (A, B, A' non alignés).
3. Somme 2 : $\vec{AK} = \frac{2\vec{AB} + \vec{AC}}{2} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$, d'où $\vec{BK} = \frac{1}{2}\vec{AC}$.
4. $2 - 3 + 1 = 0$: ce barycentre n'existe pas.



■ Corrigé de l'exercice 7

1. $\vec{u} = 3\vec{MG}$ (G isobarycentre de A, B, C). $3 + 1 + 1 = 5 \neq 0$: avec $K = \text{Bar}\{(A, 3); (B, 1); (C, 1)\}$, $\vec{v} = 5\vec{MK}$;
 par associativité, $(B, 1)$ et $(C, 1)$ se regroupent en $(A', 2)$: $K = \text{Bar}\{(A, 3); (A', 2)\}$, d'où $\vec{AK} = \frac{2}{5}\vec{AA'}$.
 $2 - 3 + 1 = 0$: on introduit A : $\vec{w} = 2\vec{MA} - 3(\vec{MA} + \vec{AB}) + (\vec{MA} + \vec{AC}) = -3\vec{AB} + \vec{AC}$, qui ne dépend pas de M .
2. $5\vec{PK} = \vec{BC} \iff \vec{KP} = -\frac{1}{5}\vec{BC}$: on place K sur $[AA']$ ($AK = \frac{2}{5}AA'$), puis P par $\vec{AP} = \frac{2}{5}\vec{AA'} + \frac{1}{5}\vec{CB}$.
3. $-3\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{0}$ signifierait $\vec{AC} = 3\vec{AB}$: A, B, C seraient alignés. Donc l'ensemble est vide. Ensuite :
 $3\vec{MG} = -3\vec{AB} + \vec{AC} \iff \vec{GM} = \vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC}$: un seul point.

■ Corrigé de l'exercice 8

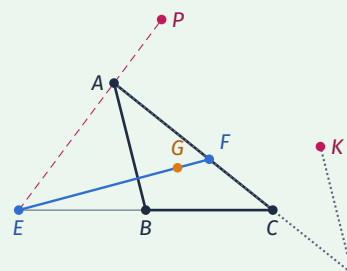
1. $G\left(\frac{1+3-1}{3}; \frac{-3+4+5}{3}\right) = (1; 2)$; H (somme 2) : $\left(\frac{1+6+1}{2}; \frac{-3+8-5}{2}\right) = (4; 0)$.
2. K (somme 1) : $(6 + 1; 8 - 5) = (7; 3)$. Milieu de $[AK]$: $\left(\frac{1+7}{2}; \frac{-3+3}{2}\right) = (4; 0) = H$ ✓. Sans calcul :
 par associativité, $(B, 2)$ et $(C, -1)$ (somme 1 $\neq 0$) se remplacent par $(K, 1)$: $H = \text{Bar}\{(A, 1); (K, 1)\}$,
 milieu de $[AK]$.
3. Il faut $m + 2 \neq 0$. L'ordonnée est $\frac{-3m+4+5}{m+2}$, nulle $\iff m = 3$: $m = 3$, et le point est $\left(\frac{3+3-1}{5}; 0\right) = (1; 0)$.

26

Corrigés du niveau 2

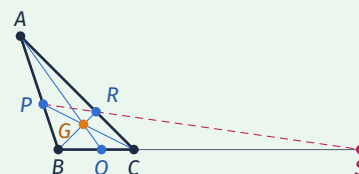
■ Corrigé de l'exercice 9

- $2 - 1 = 1 \neq 0$: E existe et $\vec{BE} = \frac{-1}{1}\vec{BC} = -\vec{BC}$: E est le symétrique de C par rapport à B . $2 + 3 = 5 \neq 0$: $\vec{AF} = \frac{3}{5}\vec{AC}$.
- Somme $1 - 2 + 3 = 2 \neq 0$: $\vec{AK} = \frac{-2\vec{AB} + 3\vec{AC}}{2} = -\vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{AC}$ (en pointillés sur la figure : $\frac{3}{2}\vec{AC}$ puis $-\vec{AB}$).
- $2\vec{MB} - \vec{MC} = \vec{ME}$; $2\vec{MA} + 3\vec{MC} = 5\vec{MF}$; $\vec{MA} - 2\vec{MB} + 3\vec{MC} = 2\vec{MK}$; $\vec{MB} - \vec{MC} = \vec{CB}$ (somme nulle).
- a) Pour tout M : $\vec{ME} + 5\vec{MF} = (2\vec{MB} - \vec{MC}) + (2\vec{MA} + 3\vec{MC}) = 2(\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}) = 6\vec{MG}$.
 b) Avec $M = G$: $\vec{GE} + 5\vec{GF} = \vec{0}$, donc $G = \text{Bar}\{(E, 1); (F, 5)\}$; coefficients positifs : $G \in [EF]$ et $\vec{EG} = \frac{5}{6}\vec{EF}$. Le centre de gravité est sur (EF) .
- $2\vec{PB} - \vec{PC} = \vec{PE}$: la relation s'écrit $\vec{PE} = 3\vec{PA}$, soit $3\vec{PA} - \vec{PE} = \vec{0}$: $P = \text{Bar}\{(A, 3); (E, -1)\}$, $\vec{AP} = -\frac{1}{2}\vec{AE}$.
 Puis $2\vec{NK} = 2\vec{CB} \iff \vec{KN} = \vec{BC}$: N est l'image de K par la translation de vecteur $\vec{BC}$.



■ Corrigé de l'exercice 10

- $\vec{AP} = \frac{3}{5}\vec{AB}$, $\vec{BQ} = \frac{4}{7}\vec{BC}$, $\vec{AR} = \frac{4}{6}\vec{AC} = \frac{2}{3}\vec{AC}$.
- Associativité** (sommes partielles non nulles) : $(A, 2), (B, 3)$ se regroupent en $(P, 5)$: $G = \text{Bar}\{(P, 5); (C, 4)\} \in (CP)$; de même $G = \text{Bar}\{(A, 2); (Q, 7)\} \in (AQ)$ et $G = \text{Bar}\{(B, 3); (R, 6)\} \in (BR)$. **Les trois droites sont concourantes en G** , avec $\vec{CG} = \frac{5}{9}\vec{CP}$,
 $\vec{AG} = \frac{7}{9}\vec{AQ}$, $\vec{BG} = \frac{6}{9}\vec{BR} = \frac{2}{3}\vec{BR}$.
- a) Somme -1 : $\vec{BS} = \frac{-4}{1}\vec{BC} = -4\vec{BC}$. b) Par homogénéité, $S = \text{Bar}\{(B, -3); (C, 4)\}$ (somme 1). Donc $\text{Bar}\{(P, 5); (S, 1)\} = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 3); (B, -3); (C, 4)\} = \text{Bar}\{(A, 2); (C, 4)\} = R$. Ainsi $R \in (PS)$: P, R, S **sont alignés** (et $\vec{PR} = \frac{1}{6}\vec{PS}$). Le point S est sur (PR) et sur (BC) , droites distinctes ($P \notin (BC)$) : (PR) et (BC) **se coupent en S** .



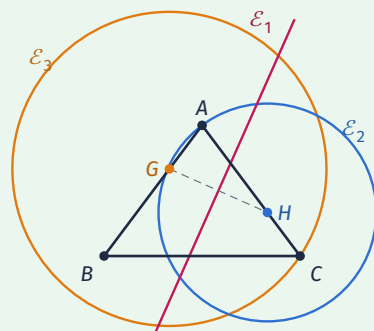
■ Corrigé de l'exercice 11

- $\vec{AB}(8; 4), \vec{AC}(10; 8)$: $\det = 64 - 40 = 24 \neq 0$: non alignés. $P\left(\frac{-5+9}{4}; \frac{-2+6}{4}\right) = (1; 1)$; Q (somme 1) : $(9 - 10; 6 - 12) = (-1; -6)$; G (somme 2) : $\left(\frac{-5+9-10}{2}; \frac{-2+6-12}{2}\right) = (-3; -4)$.
- a) $\vec{CP}(-4; -5), \vec{CG}(-8; -10)$: $\det = 40 - 40 = 0$; $\vec{AQ}(4; -4), \vec{AG}(2; -2)$: $\det = -8 + 8 = 0$: $G \in (CP)$ et $G \in (AQ)$.
 b) $M(x; y) \in (CP) \iff \det(\vec{CM}, \vec{CP}) = 0 \iff -5(x - 5) + 4(y - 6) = 0 \iff 5x - 4y - 1 = 0$;
 $M \in (AQ) \iff -4(x + 5) - 4(y + 2) = 0 \iff x + y + 7 = 0$. Avec $y = -7 - x$: $5x + 28 + 4x - 1 = 0$, $x = -3, y = -4$: les droites (non parallèles) se coupent en G .
 c) $(A, 1), (B, 3)$ se regroupent en $(P, 4)$: $G = \text{Bar}\{(P, 4); (C, -2)\} \in (CP)$; $(B, 3), (C, -2)$ en $(Q, 1)$: $G = \text{Bar}\{(A, 1); (Q, 1)\}$, **milieu de $[AQ]$** .

3. On résout $a + b + c = 1$, $-5a + 3b + 5c = 2$, $-2a + 2b + 6c = 3$. Avec $a = 1 - b - c$: $8b + 10c = 7$ et $4b + 8c = 5$, d'où $6c = 3$: $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{4}$, $c = \frac{1}{2}$. Coefficients strictement positifs : **E est intérieur au triangle.**
4. Il faut $m \neq -1$. Ordonnée nulle $\Leftrightarrow -2m + 6 - 12 = 0 \Leftrightarrow m = -3$; le point est $\left(\frac{15+9-10}{-2}; 0\right) = (-7; 0)$.

■ Corrigé de l'exercice 12

1. $\vec{AG} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ et $\vec{AH} = \frac{2}{3}\vec{AC}$; $AH = \frac{2}{3} \times 6 = 4 \text{ cm}$.
2. $2\vec{MA} + \vec{MB} = 3\vec{MG}$; $\vec{MA} + 2\vec{MC} = 3\vec{MH}$; $2\vec{MA} - 2\vec{MB} = 2\vec{BA}$ (somme nulle) ; $2\vec{MA} + \vec{MB} - 3\vec{MC}$ a une somme nulle : il est constant, égal à sa valeur pour $M = C$, soit $2\vec{CA} + \vec{CB} = 3\vec{CG}$.
3. **On réduit chaque membre, puis on reconnaît un ensemble de distances.**
 $M \in \mathcal{E}_1 \Leftrightarrow 3MG = 3MH \Leftrightarrow MG = MH$:
 $\mathcal{E}_1$ est la médiatrice de $[GH]$.
 $M \in \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow 3MH = 2AB = 12 \Leftrightarrow MH = 4$:
 $\mathcal{E}_2$ est le cercle de centre H de rayon 4 cm.
 $M \in \mathcal{E}_3 \Leftrightarrow 3MG = 3CG \Leftrightarrow MG = GC$:
 $\mathcal{E}_3$ est le cercle de centre G passant par C .
4. $AH = 4$: $A \in \mathcal{E}_2$; $GC = GC$: $C \in \mathcal{E}_3$. $AG = 2$ et $AH = 4$: $AG \neq AH$, donc $A \notin \mathcal{E}_1$.



■ Corrigé de l'exercice 13

1. Les diagonales d'un parallélogramme ont le même milieu O : $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{0}$ et $\vec{OB} + \vec{OD} = \vec{0}$, donc $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$: **O est l'isobarycentre.** Pour tout M : $\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} - \vec{MD} = \vec{BA} + \vec{DC} = \vec{0}$, car $\vec{DC} = \vec{AB}$.
2. a) On écrit $(C, 3)$ comme $(C, 1)$ et $(C, 2)$, puis on regroupe $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$, $(D, 1)$ en $(O, 4)$:
 $G = \text{Bar}\{(O, 4); (C, 2)\}$. Donc $\vec{OG} = \frac{1}{3}\vec{OC}$ et $\vec{AG} = \vec{AO} + \vec{OG} = \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{6}\vec{AC} = \frac{2}{3}\vec{AC}$.
- b) $(A, 1)$, $(B, 1)$ se regroupent en $(I, 2)$ et $(C, 3)$, $(D, 1)$ en $(L, 4)$: $G = \text{Bar}\{(I, 2); (L, 4)\} \in (IL)$, $\vec{IG} = \frac{2}{3}\vec{IL}$;
 L est placé par $\vec{DL} = \frac{3}{4}\vec{DC}$, et G est l'intersection de (AC) et (IL) .
3. $\vec{MA} + \vec{MB} + 3\vec{MC} + \vec{MD} = 6\vec{MG}$, colinéaire à $\vec{BD} \Leftrightarrow M = G$ ou $(MG) \parallel (BD)$: **c'est la parallèle à (BD) passant par G .**

■ Corrigé de l'exercice 14

1. a) G_m existe $\Leftrightarrow (m - 1) + 3 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2$, et alors $\vec{AG}_m = \frac{3}{m+2}\vec{AB}$. b) $G_m = B \Leftrightarrow \frac{3}{m+2} = 1 \Leftrightarrow m = 1$ (le coefficient de A est nul) ; milieu $\Leftrightarrow \frac{3}{m+2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = 4$ (coefficients 3 et 3).
- c) $0 \leq \frac{3}{m+2} \leq 1 \Leftrightarrow m + 2 \geq 3$ (le quotient positif impose $m + 2 > 0$) : $m \geq 1$ (c'est aussi « $m - 1 \geq 0$ », coefficients de même signe).
- d) Les points de (AB) sont les M tels que $\vec{AM} = k\vec{AB}$, $k \in \mathbb{R}$. Le réel $k = \frac{3}{m+2}$ n'est jamais nul, et tout $k \neq 0$ est atteint ($m = \frac{3}{k} - 2 \neq -2$) : **l'ensemble des G_m est la droite (AB) privée de A .**
2. $\mathcal{F}_1$: $\vec{AM} = \frac{1}{t^2+1}\vec{AB}$, et $t^2 + 1 \geq 1$ donne $\frac{1}{t^2+1} \in]0; 1]$; inversement $k \in]0; 1]$ est atteint pour $t = \sqrt{\frac{1}{k} - 1}$: $\mathcal{F}_1 = [AB]$ privé de A .

$\mathcal{F}_2$: somme $1 + t^2 > 0$; $\vec{AM} = \frac{-1}{1+t^2} \vec{AB} = k \vec{AB}$, k décrivant $[-1; 0[$. Avec A_1 symétrique de B par rapport à A ($\vec{AA}_1 = -\vec{AB}$) : $\mathcal{F}_2 = [A_1A]$ privé de A .

■ Corrigé de l'exercice 15

- P a pour coordonnées $(\frac{1}{3}; \frac{1}{6})$: $P = \text{Bar}\left\{\left(A, \frac{1}{2}\right); \left(B, \frac{1}{3}\right); \left(C, \frac{1}{6}\right)\right\} = \text{Bar}\{(A, 3); (B, 2); (C, 1)\}$ (homogénéité, $\times 6$) : **intérieur**.
 $\vec{AQ} = \vec{AB} + 2\vec{BC} = -\vec{AB} + 2\vec{AC}$: $Q = \text{Bar}\{(A, 0); (B, -1); (C, 2)\} = \text{Bar}\{(B, -1); (C, 2)\}$: sur (BC) , hors du triangle ($\vec{CQ} = \vec{BC}$).
 $\vec{AR} = \vec{AC} + 2\vec{AB}$: $R = \text{Bar}\{(A, -2); (B, 2); (C, 1)\}$: signes différents, **extérieur**.
- Soit $N' = \text{Bar}\{(B, 2); (C, 1)\} \in (BC)$. Par associativité, $P = \text{Bar}\{(A, 3); (N', 3)\}$: P est le milieu de $[AN']$, donc $N' \in (AP)$. Ainsi N' est sur (AP) et sur (BC) , droites sécantes : $N' = N$, et P **est le milieu de $[AN]$** ($\vec{BN} = \frac{1}{3} \vec{BC}$).
- La somme vaut $5 \neq 0$ pour tout m . Le coefficient 2 étant positif : intérieur (bords compris) $\Leftrightarrow m \geq 0$ et $3 - m \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 3$. Sur un côté $\Leftrightarrow$ un coefficient nul : $m = 0$ (point de $[BC]$) ou $m = 3$ (point de $[AB]$) ; intérieur strict pour $0 < m < 3$.

■ Corrigé de l'exercice 16

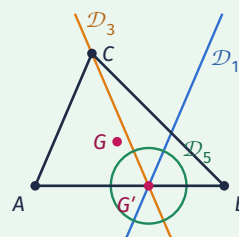
On réduit d'abord chaque somme. $2\vec{MA} + 3\vec{MB} = 5\vec{MG}'$; $\vec{MA} - 3\vec{MB} + 2\vec{MC}$ (somme nulle) $= -3\vec{AB} + 2\vec{AC}$ (valeur pour $M = A$) ; $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$, G centre de gravité ; $\vec{MA} - \vec{MB} = \vec{BA}$.

$\mathcal{D}_1$: $\vec{MG}'$ colinéaire à $\vec{AC} \Leftrightarrow M = G'$ ou $(MG') \parallel (AC)$: **parallèle à (AC) passant par G'** .

$\mathcal{D}_2$: dans la base $(\vec{AB}, \vec{AC})$, $-3\vec{AB} + 2\vec{AC}$ et $\vec{BC} = -\vec{AB} + \vec{AC}$ ont pour coordonnées $(-3; 2)$ et $(-1; 1)$, de déterminant $-3 + 2 = -1 \neq 0$: jamais colinéaires : $\mathcal{D}_2 = \emptyset$.

$\mathcal{D}_3$: $\vec{MG}'$ et $\vec{MC}$ colinéaires $\Leftrightarrow M, G', C$ alignés ($M = C$ et $M = G'$ compris) : **la droite $(G'C)$** ($G' \neq C$ car $G' \in (AB)$).

$\mathcal{D}_4$: $3\vec{MG} = 0 \Leftrightarrow M = G$: $\mathcal{D}_4 = \{G\}$. $\mathcal{D}_5$: $5\vec{MG}' = \vec{AB}$: **cercle de centre G' et de rayon $\frac{1}{5}AB$** .



27 Corrigés du niveau 3

■ Corrigé de l'exercice 17

Méthode des masses : on place sur A, B, C des coefficients (« masses ») compatibles avec les deux points donnés.

- $\vec{AP} = \frac{2}{5} \vec{AB}$: $P = \text{Bar}\{(A, 3); (B, 2)\}$. $\vec{AQ} = \frac{3}{4} \vec{AC}$: $Q = \text{Bar}\{(A, 1); (C, 3)\} = \text{Bar}\{(A, 3); (C, 9)\}$ (homogénéité).
- Soit $K' = \text{Bar}\{(A, 3); (B, 2); (C, 9)\}$ (somme 14). Par associativité, $K' = \text{Bar}\{(P, 5); (C, 9)\} \in (CP)$ et $K' = \text{Bar}\{(B, 2); (Q, 12)\} \in (BQ)$. Les droites (BQ) et (CP) ont un seul point commun, K : donc $K = \text{Bar}\{(A, 3); (B, 2); (C, 9)\}$.

Ensuite $\vec{BK} = \frac{12}{14} \vec{BQ}$ et $\vec{KQ} = \frac{2}{14} \vec{BQ}$: $\frac{BK}{KQ} = 6$; $\vec{CK} = \frac{5}{14} \vec{CP}$, $\vec{KP} = \frac{9}{14} \vec{CP}$: $\frac{CK}{KP} = \frac{5}{9}$.

3. $R' = \text{Bar}\{(B, 2); (C, 9)\} \in (BC)$ et $K = \text{Bar}\{(A, 3); (R', 11)\}$, donc $R' \in (AK) \cap (BC)$, d'où $R' = R$.

$$\vec{BR} = \frac{9}{11}\vec{BC} : \frac{BR}{RC} = \frac{9}{2}; \quad \vec{AK} = \frac{11}{14}\vec{AR} : \frac{AK}{KR} = \frac{11}{3}.$$

■ Corrigé de l'exercice 18

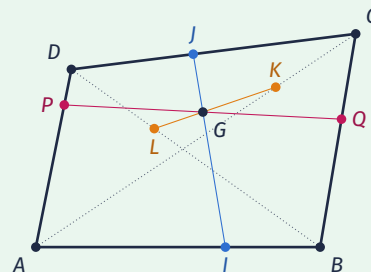
1. **Associativité : on regroupe les points deux à deux, de trois façons** (sommées partielles non nulles) :

$$(A, 1), (B, 2) \rightarrow (I, 3) \quad (C, 3), (D, 4) \rightarrow (J, 7) \quad G = \text{Bar}\{(I, 3); (J, 7)\}$$

$$(A, 1), (C, 3) \rightarrow (K, 4) \quad (B, 2), (D, 4) \rightarrow (L, 6) \quad G = \text{Bar}\{(K, 4); (L, 6)\}$$

$$(A, 1), (D, 4) \rightarrow (P, 5) \quad (B, 2), (C, 3) \rightarrow (Q, 5) \quad G = \text{Bar}\{(P, 5); (Q, 5)\}$$

Donc $G \in (IJ)$, $G \in (KL)$, $G \in (PQ)$: **les trois droites sont concourantes en G.**



2. Coefficients positifs : G est sur chaque segment, avec

$$\vec{IG} = \frac{7}{10}\vec{IJ}, \quad \vec{KG} = \frac{6}{10}\vec{KL} = \frac{3}{5}\vec{KL} \quad \text{et } G \text{ milieu de } [PQ].$$

■ Corrigé de l'exercice 19

1. $2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} = (\vec{MA} - \vec{MB}) + (\vec{MA} - \vec{MC}) = \vec{BA} + \vec{CA} = -(\vec{AB} + \vec{AC}) = -2\vec{AA'} = 2\vec{A'A}$. Sa norme est $2AA' = 2 \times \frac{3}{2}AG = 3AG$.

2. $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG} : M \in \Gamma_1 \iff 3MG = 3AG :$

Γ_1 = cercle de centre G passant par A.

$$\vec{MB} + \vec{MC} = 2\vec{MA'} : M \in \Gamma_2 \iff MA' = A'A :$$

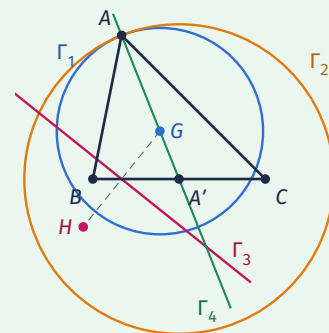
Γ_2 = cercle de centre A' passant par A.

$$1 - 4 = -3 \neq 0 : \vec{MA} - 4\vec{MB} = -3\vec{MH}, \text{ de norme } 3MH :$$

$$M \in \Gamma_3 \iff MG = MH : \Gamma_3 = \text{médiatrice de } [GH] \text{ (avec } \vec{AH} = \frac{4}{3}\vec{AB} \text{ ; ici } |1 + 1 + 1| = |1 - 4|).$$

$$\vec{AH} = \frac{4}{3}\vec{AB} \text{ ; ici } |1 + 1 + 1| = |1 - 4|.$$

$$\Gamma_4 : 3\vec{MG} \text{ colinéaire au vecteur non nul } 2\vec{A'A} \iff M \text{ est sur la droite passant par G dirigée par } \vec{A'A} : \Gamma_4 = \text{la médiane } (AA').$$



3. Soit $R = AG : GA' = \frac{R}{2}$, $A'A = \frac{3R}{2}$, et A est commun aux deux cercles. Si $M \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2 : MA' = \frac{3R}{2} = MG + GA'$; ce cas d'égalité de l'inégalité triangulaire impose $G \in [MA']$: M est sur la demi-droite d'origine G opposée à $[GA']$, à la distance R de G : c'est A. **A est le seul point commun** : les cercles sont tangents en A.

■ Corrigé de l'exercice 20

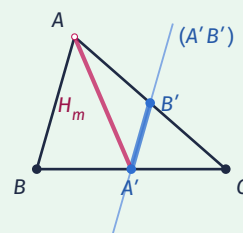
1. La somme vaut $m + (1 - m) + 1 = 2 \neq 0$: G_m existe pour tout m . $\vec{AG}_m = \frac{(1-m)\vec{AB} + \vec{AC}}{2}$, donc $\vec{B'G}_m =$

$$\vec{AG}_m - \frac{1}{2}\vec{AC} = \frac{1-m}{2}\vec{AB}. \text{ Quand } m \text{ décrit } \mathbb{R}, \frac{1-m}{2} \text{ décrit } \mathbb{R} : \text{ l'ensemble est la parallèle à } (AB)$$

passant par B', c'est-à-dire la droite $(A'B')$ (droite des milieux, $B'A' = \frac{1}{2}\vec{AB}$). Pour $m \in [0; 1]$,

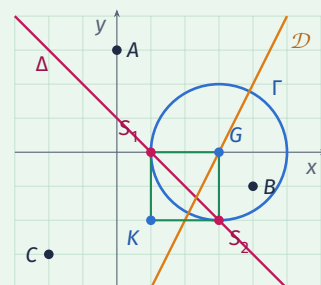
$$\frac{1-m}{2} \in \left[0; \frac{1}{2}\right] : \text{ on obtient le segment } [B'A'] \text{ (} m = 1 : B' ; m = 0 : A' \text{)}.$$

- Le coefficient 1 étant positif : intérieur (bords compris) $\Leftrightarrow m \geq 0$ et $1 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \in [0; 1]$. Cohérent : $[A'B']$ est exactement la partie de la droite $(A'B')$ située dans le triangle.
- Par associativité, $H_m = \text{Bar}\{(A, m^2); (A', 2)\}$, donc $\vec{AH}_m = \frac{2}{m^2+2}\vec{AA'}$; $\frac{2}{m^2+2}$ décrit $]0; 1]$ (la valeur k est atteinte pour $m = \sqrt{\frac{2}{k} - 2}$) : **le segment $[AA']$ privé de A.**



■ Corrigé de l'exercice 21

- $G\left(\frac{0+12}{4}; \frac{3-3}{4}\right) = (3; 0)$; $K(1; -2)$.
- $\vec{MA} + 3\vec{MB} = 4\vec{MG}$ et $2\vec{MB} + 2\vec{MC} = 4\vec{MK}$ ($|4| = |4|$).
 $\Gamma: 4MG = 8 \Leftrightarrow MG^2 = 4 \Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 = 4$: cercle de centre G, de rayon 2.
 $\Delta: MG = MK \Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 = (x-1)^2 + (y+2)^2 \Leftrightarrow -6x + 9 = -2x + 4y + 5 \Leftrightarrow x + y - 1 = 0$ (médiatrice de $[GK]$).
 $\mathcal{D}: \det(\vec{MG}, \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow 2(3-x) + y = 0 \Leftrightarrow y = 2x - 6$: droite passant par G, dirigée par $\vec{u}$.
- a) Avec $y = 1 - x$: $(x-3)^2 + (1-x)^2 = 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x \in \{1; 3\}$: $S_1(1; 0)$, $S_2(3; -2)$.
 b) $\vec{GS}_1 = (-2; 0) = \vec{S}_2\vec{K}$: parallélogramme ; $GS_1 = S_1K = 2$ et $\vec{GS}_1$ horizontal, $\vec{S}_1\vec{K}(0; -2)$ vertical : GS_1KS_2 est un carré. 4. Voir la figure.



■ Corrigé de l'exercice 22

- $B\vec{A}_1 = k\vec{B}\vec{C}$ donne $A_1 = \text{Bar}\{(B, 1-k); (C, k)\}$; de même $B_1 = \text{Bar}\{(C, 1-k); (A, k)\}$ et $C_1 = \text{Bar}\{(A, 1-k); (B, k)\}$ (sommes égales à 1). Par associativité, le centre de gravité $\text{Bar}\{(A_1, 1); (B_1, 1); (C_1, 1)\}$ de $A_1B_1C_1$ est le barycentre de $(B, 1-k)$, (C, k) , $(C, 1-k)$, (A, k) , $(A, 1-k)$, (B, k) , c'est-à-dire de $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$: c'est G.
- De même, le centre de gravité de $A_1B_1C_1$ est $\text{Bar}\{(A, y+1-z); (B, 1-x+z); (C, x+1-y)\}$ (somme 3). S'il est égal à $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, 1)\}$ (somme 3), l'unicité des coefficients à un facteur près (ici 1) donne $y+1-z = 1$, $1-x+z = 1$, $x+1-y = 1$, d'où $x = y = z$.
- $M_1 = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 1)\}$, ..., $M_6 = \text{Bar}\{(F, 1); (A, 1)\}$. Par associativité, le centre de gravité de $M_1M_3M_5$ est $\text{Bar}\{(M_1, 2); (M_3, 2); (M_5, 2)\} = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, 1); (D, 1); (E, 1); (F, 1)\}$, isobarycentre de l'hexagone ; celui de $M_2M_4M_6$ aussi. **Ils sont égaux.**

■ Corrigé de l'exercice 23

- Somme nulle : $k\vec{MA} - k\vec{MB} + \vec{MC} - \vec{MD} = k\vec{BA} + \vec{DC} = -k\vec{AB} + k\vec{AB} = \vec{0}$.
- $k+1 \neq 0$: $\Omega = \text{Bar}\{(A, k); (C, 1)\}$ existe et $k\vec{\Omega A} + \vec{\Omega C} = \vec{0}$. La relation 1. en $M = \Omega$ donne alors $-k\vec{\Omega B} - \vec{\Omega D} = \vec{0}$: $\Omega = \text{Bar}\{(B, k); (D, 1)\}$. Donc $\Omega \in (AC) \cap (BD)$, d'où $\Omega = O$.
 $k-1 \neq 0$: $E' = \text{Bar}\{(A, k); (D, -1)\}$ existe, $k\vec{E'A} - \vec{E'D} = \vec{0}$, et 1. donne $-k\vec{E'B} + \vec{E'C} = \vec{0}$: $E' = \text{Bar}\{(B, k); (C, -1)\}$. Donc $E' \in (AD) \cap (BC)$: $E' = E$.
- Un même point écrit de deux façons.** $O = \text{Bar}\{(O, k+1); (O, k+1)\} = \text{Bar}\{(A, k); (C, 1); (B, k); (D, 1)\}$; en regroupant (A, k) , (B, k) en $(I, 2k)$ et $(C, 1)$, $(D, 1)$ en $(J, 2)$: $O = \text{Bar}\{(I, 2k); (J, 2)\}$. De même (somme $2k-2 \neq 0$) $E = \text{Bar}\{(I, 2k); (J, -2)\}$. Donc O et E sont sur (IJ) : **E, O, I, J sont alignés.** Si $k = 1$, ABCD est un parallélogramme : $(AD) \parallel (BC)$ et E n'existe pas ; O reste le milieu de $[IJ]$.

28 Corrigés du niveau 4

■ Corrigé de l'exercice 24

1. $\beta + \gamma > 0$: $D' = \text{Bar}\{(B, \beta); (C, \gamma)\}$ existe et $D' \in [BC]$. Par associativité, $P = \text{Bar}\{(A, \alpha); (D', \beta + \gamma)\}$, donc $D' \in (AP)$. Ainsi $D' \in (AP) \cap (BC)$, droites sécantes en D : $D = \text{Bar}\{(B, \beta); (C, \gamma)\}$; de même $E = \text{Bar}\{(A, \alpha); (C, \gamma)\}$ et $F = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\}$. Comme $\beta DB = \gamma DC$ et $\alpha PA = (\beta + \gamma) PD$: $\frac{DB}{DC} = \frac{\gamma}{\beta}$ et $\frac{AP}{PD} = \frac{\beta + \gamma}{\alpha}$.
2. De même $\frac{AE}{EC} = \frac{\gamma}{\alpha}$ et $\frac{AF}{FB} = \frac{\beta}{\alpha}$, dont la somme est $\frac{\beta + \gamma}{\alpha} = \frac{AP}{PD}$: c'est la relation de Van Aubel. Avec $s = \alpha + \beta + \gamma$: $\vec{AP} = \frac{\beta + \gamma}{s} \vec{AD}$, donc $\frac{PD}{AD} = \frac{\alpha}{s}$; de même $\frac{PE}{BE} = \frac{\beta}{s}$ et $\frac{PF}{CF} = \frac{\gamma}{s}$: la somme vaut $\frac{\alpha + \beta + \gamma}{s} = 1$.
3. $\frac{AP}{PD} + \frac{BP}{PE} + \frac{CP}{PF} = \left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}\right) + \left(\frac{\gamma}{\beta} + \frac{\beta}{\gamma}\right) + \left(\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha}\right) \geq 2 + 2 + 2 = 6$, car $x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$ pour $x > 0$. Pour le produit : $\beta + \gamma \geq 2\sqrt{\beta\gamma}$ (car $(\sqrt{\beta} - \sqrt{\gamma})^2 \geq 0$), etc., donc $(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)(\alpha + \beta) \geq 8\sqrt{\beta\gamma}\sqrt{\gamma\alpha}\sqrt{\alpha\beta} = 8\alpha\beta\gamma$, et le produit est ≥ 8 . **Égalité** $\iff \alpha = \beta = \gamma \iff P$ est le centre de gravité.
4. $\frac{AF}{FB} = \frac{\beta}{\alpha} = 2$ et $\frac{AE}{EC} = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{3}{2}$: on prend $\alpha = 2, \beta = 4, \gamma = 3$. Alors $\frac{AP}{PD} = \frac{7}{2}$ et $\frac{BD}{DC} = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{3}{4}$.

■ Corrigé de l'exercice 25

1. $\vec{BD} = \frac{1}{4}\vec{BC}$: $D = \text{Bar}\{(B, 3); (C, 1)\}$; de même $E = \text{Bar}\{(C, 3); (A, 1)\}$ et $F = \text{Bar}\{(A, 3); (B, 1)\}$. **Masses** : soit $P' = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 9); (C, 3)\}$. En regroupant $(B, 9), (C, 3)$ en $(D, 12)$: $P' \in (AD)$; en regroupant $(C, 3), (A, 1)$ en $(E, 4)$: $P' \in (BE)$. Donc $P' = P$. Par permutation circulaire $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$: $Q = \text{Bar}\{(A, 3); (B, 1); (C, 9)\}$ et $R = \text{Bar}\{(A, 9); (B, 3); (C, 1)\}$.
2. $R = \text{Bar}\{(A, 9); (D, 4)\}$: $\vec{AR} = \frac{4}{13}\vec{AD}$; $P = \text{Bar}\{(A, 1); (D, 12)\}$: $\vec{AP} = \frac{12}{13}\vec{AD}$. D'où $AR = \frac{4}{13}AD, RP = \frac{8}{13}AD, PD = \frac{1}{13}AD$: rapports 4 : 8 : 1.
3. a) Dans un repère orthonormé, $\det(\vec{u}, \vec{v}) = u_1v_2 - u_2v_1$ est linéaire par rapport à chaque vecteur, et $\det(\vec{w}, \vec{w}) = 0, \det(\vec{AC}, \vec{AB}) = -\det(\vec{AB}, \vec{AC})$; en développant, les termes en xx' et yy' sont nuls et $\det(\vec{u}, \vec{v}) = xy' \det(\vec{AB}, \vec{AC}) + yx' \det(\vec{AC}, \vec{AB}) = (xy' - x'y) \det(\vec{AB}, \vec{AC})$.
b) Dans $(A; \vec{AB}, \vec{AC})$, les coordonnées d'un point sont ses coefficients de B et de C divisés par la somme : $P\left(\frac{9}{13}; \frac{3}{13}\right), Q\left(\frac{1}{13}; \frac{9}{13}\right), R\left(\frac{3}{13}; \frac{1}{13}\right)$. Donc $\vec{PQ} = \left(-\frac{8}{13}; \frac{6}{13}\right), \vec{PR} = \left(-\frac{6}{13}; -\frac{2}{13}\right)$ et $xy' - x'y = \frac{16+36}{169} = \frac{4}{13}$.
Ainsi $\text{aire}(PQR) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{13} |\det(\vec{AB}, \vec{AC})| = \frac{4}{13} \text{aire}(ABC)$.
4. $D = \text{Bar}\{(B, 2); (C, 1)\}, \dots$; de même $P = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 4); (C, 2)\}, Q = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 1); (C, 4)\}, R = \text{Bar}\{(A, 4); (B, 2); (C, 1)\}$: $P\left(\frac{4}{7}; \frac{2}{7}\right), Q\left(\frac{1}{7}; \frac{4}{7}\right), R\left(\frac{2}{7}; \frac{1}{7}\right), \vec{PQ} = \left(-\frac{3}{7}; \frac{2}{7}\right), \vec{PR} = \left(-\frac{2}{7}; -\frac{1}{7}\right)$: $xy' - x'y = \frac{3+4}{49} = \frac{1}{7}$.

■ Corrigé de l'exercice 26

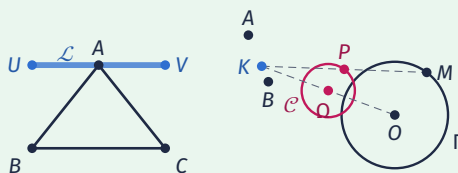
1. $\vec{AM} = \frac{1}{u}\vec{AB}$, donc $M = \text{Bar}\left\{\left(A, 1 - \frac{1}{u}\right); \left(B, \frac{1}{u}\right)\right\} = \text{Bar}\{(A, u-1); (B, 1)\}$ (homogénéité, $\times u$; somme $u \neq 0$). De même pour N .
2. **Sens direct.** $M \neq N$ (sinon $M = N = A$) ; si $G \in (MN)$, il existe λ, μ ($\lambda + \mu \neq 0$) avec $G = \text{Bar}\{(M, \lambda); (N, \mu)\}$. En remplaçant (M, λ) par $\left(A, \frac{\lambda(u-1)}{u}\right), \left(B, \frac{\lambda}{u}\right)$ et (N, μ) par $\left(A, \frac{\mu(v-1)}{v}\right), \left(C, \frac{\mu}{v}\right)$:
$$G = \text{Bar}\left\{\left(A, \frac{\lambda(u-1)}{u} + \frac{\mu(v-1)}{v}\right); \left(B, \frac{\lambda}{u}\right); \left(C, \frac{\mu}{v}\right)\right\} = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, 1)\}.$$
Les coefficients sont proportionnels : il existe $k \neq 0$ tel que $\frac{\lambda}{u} = \frac{\mu}{v} = k$ et $\frac{\lambda(u-1)}{u} + \frac{\mu(v-1)}{v} = k$, soit $k(u-1) + k(v-1) = k$: $u + v = 3$.

Réciproque. Si $u + v = 3$, le barycentre de (M, u) et (N, v) est celui de $(A, u - 1)$, $(B, 1)$, $(A, v - 1)$, $(C, 1)$, c'est-à-dire de $(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 1)$: c'est G , donc $G \in (MN)$.

3. Par l'exercice 25, $\det(\vec{AM}, \vec{AN}) = \frac{1}{uv} \det(\vec{AB}, \vec{AC})$, d'où $\frac{\text{aire}(AMN)}{\text{aire}(ABC)} = \frac{1}{uv}$ ($u, v > 0$). $M \in [AB]$ impose $u \geq 1$, $N \in [AC]$ impose $v = 3 - u \geq 1$: $u \in [1; 2]$. Or $\frac{9}{4} - u(3 - u) = \left(u - \frac{3}{2}\right)^2 \geq 0$ et $u(3 - u) - 2 = (u - 1)(2 - u) \geq 0$: $2 \leq uv \leq \frac{9}{4}$, donc $\frac{4}{9} \leq \frac{\text{aire}(AMN)}{\text{aire}(ABC)} \leq \frac{1}{2}$. $\frac{4}{9}$ est atteint pour $u = v = \frac{3}{2}$, c'est-à-dire $\vec{AM} = \frac{2}{3}\vec{AB}$, $\vec{AN} = \frac{2}{3}\vec{AC}$: $(MN) \parallel (BC)$ (Thalès) ; $\frac{1}{2}$ pour $u = 1$ ou $u = 2$: Δ est une médiane.
4. $u = \frac{5}{3}$, donc $v = \frac{4}{3}$: $\vec{AN} = \frac{3}{4}\vec{AC}$.

■ Corrigé de l'exercice 27

1. a) La somme $t^2 + 1$ est non nulle. $\vec{AG}_t = \frac{t\vec{AB} - t\vec{AC}}{t^2 + 1} = \frac{t}{t^2 + 1} (\vec{AB} + \vec{CA}) = f(t)\vec{CB}$.
- b) $|f(t)| \leq \frac{1}{2} \iff 2|t| \leq t^2 + 1 \iff (|t| - 1)^2 \geq 0$: vrai. Réciproquement, soit $k \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$: si $k = 0$, $f(0) = 0$; sinon $f(t) = k \iff kt^2 - t + k = 0$, de discriminant $1 - 4k^2 \geq 0$: il y a une solution. Donc $f(\mathbb{R}) = \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.
- c) Soient U, V définis par $\vec{AU} = \frac{1}{2}\vec{CB}$ et $\vec{AV} = -\frac{1}{2}\vec{CB}$: $\mathcal{L} = \{M / \vec{AM} = k\vec{CB}, k \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]\}$ est le **segment** $[UV]$, parallèle à (BC) , de milieu A et de longueur BC .
- d) A est obtenu seulement pour $t = 0$; U et V (discriminant nul) pour $t = 1$ et $t = -1$ seulement ; tout autre point pour **deux** valeurs, t et $\frac{1}{t}$ (racines de produit 1 ; d'ailleurs $f\left(\frac{1}{t}\right) = f(t)$).



2. Par associativité, $P = \text{Bar}\{(K, 3); (M, 3)\}$: P est le milieu de $[KM]$, et $\vec{OP} = \vec{OK} + \vec{KP} = \frac{1}{2}\vec{OK} + \frac{1}{2}\vec{KM} = \frac{1}{2}\vec{OM}$. Notons $\mathcal{L}'$ l'ensemble des points P et $\mathcal{C}$ le cercle de centre O , de rayon $\frac{r}{2}$. **Double inclusion.**
- $\mathcal{L}' \subset \mathcal{C}$: si $M \in \Gamma$, $OP = \frac{1}{2}OM = \frac{r}{2}$. $\mathcal{C} \subset \mathcal{L}'$: soit $Q \in \mathcal{C}$; on définit M par $\vec{KM} = 2\vec{KQ}$, de sorte que Q est le milieu de $[KM]$. Le même calcul donne $\vec{OM} = 2\vec{OQ}$, donc $OM = r$: $M \in \Gamma$, et le point associé à M est Q . **Conclusion : l'ensemble des points P est le cercle $\mathcal{C}$.**

■ Corrigé de l'exercice 28

1. $\vec{CF} = \frac{1}{3}\vec{CD}$: $F = \text{Bar}\{(C, 2); (D, 1)\}$. On remplace $(D, 1)$ par $(A, 1)$, $(B, -1)$, $(C, 1)$ (somme 1) : $F = \text{Bar}\{(A, 1); (B, -1); (C, 3)\}$ (somme 3).
2. Soit $P' = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 3); (C, 3)\}$ (somme 7). En regroupant $(B, 3)$, $(C, 3)$ en $(E, 6)$: $P' = \text{Bar}\{(A, 1); (E, 6)\} \in (AE)$. En écrivant $(B, 3)$ comme $(B, -1)$ et $(B, 4)$, puis en regroupant $(A, 1)$, $(B, -1)$, $(C, 3)$ en $(F, 3)$: $P' = \text{Bar}\{(B, 4); (F, 3)\} \in (BF)$. Donc $P' = P$. Ensuite $\vec{AP} = \frac{6}{7}\vec{AE}$: $\frac{AP}{PE} = 6$; $\vec{BP} = \frac{3}{7}\vec{BF}$: $\frac{BP}{PF} = \frac{3}{4}$.
3. Soit $Q' = \text{Bar}\{(B, 2); (D, 3)\} \in (BD)$. En remplaçant $(D, 3)$ par $(A, 3)$, $(B, -3)$, $(C, 3)$: $Q' = \text{Bar}\{(A, 3); (B, -1); (C, 3)\} = \text{Bar}\{(A, 2); (F, 3)\} \in (AF)$. Donc $Q' = Q$: $\vec{BQ} = \frac{3}{5}\vec{BD}$ et $\vec{AQ} = \frac{3}{5}\vec{AF}$.

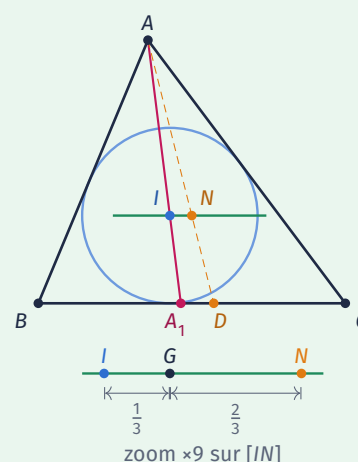
4. Dans $(A; \vec{AB}, \vec{AD})$: $B(1; 0)$, $C(1; 1)$, d'où $P\left(\frac{3+3}{7}; \frac{3}{7}\right)$ et (exercice 25) $\det(\vec{AB}, \vec{AP}) = \frac{3}{7} \det(\vec{AB}, \vec{AD})$.
 Comme $\text{aire}(ABP) = \frac{1}{2} |\det(\vec{AB}, \vec{AP})|$ et $\text{aire}(ABCD) = |\det(\vec{AB}, \vec{AD})|$: $\frac{\text{aire}(ABP)}{\text{aire}(ABCD)} = \frac{3}{14}$.

■ Corrigé de l'exercice 29

- Pour $D \in [BC]$, $DC = a - BD$: $c + BD = b + a - BD \iff BD = \frac{a+b-c}{2} = p - c$, puis $DC = a - (p - c) = p - b$. Les inégalités triangulaires strictes ($c < a + b$, $b < a + c$) donnent $0 < p - c < a$: **il existe un unique point D** , intérieur à $[BC]$. De même $CE = p - a$, $EA = p - c$, $AF = p - b$, $FB = p - a$.
- $D \in [BC]$ et $(p - b)DB = (p - c)DC$ (les deux produits valent $(p - b)(p - c)$), avec $\vec{DB}$, $\vec{DC}$ de sens contraires : $(p - b)\vec{DB} + (p - c)\vec{DC} = \vec{0}$, soit $D = \text{Bar}\{(B, p - b); (C, p - c)\}$. De même $E = \text{Bar}\{(C, p - c); (A, p - a)\}$ et $F = \text{Bar}\{(A, p - a); (B, p - b)\}$.
- Les trois coefficients sont > 0 (question 1), de somme p . Comme $(p - b) + (p - c) = a$, l'associativité donne $N = \text{Bar}\{(A, p - a); (D, a)\} \in (AD)$; de même $N = \text{Bar}\{(B, p - b); (E, b)\} \in (BE)$ et $N = \text{Bar}\{(C, p - c); (F, c)\} \in (CF)$: **les trois droites sont concourantes en N** . Enfin $(p - a)NA = aND$: $\frac{AN}{ND} = \frac{a}{p - a}$.
- $a = 14$, $b = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$, $c = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$, $p = 21$. $BD = p - c = 8$: $D(8; 0)$. $N = \frac{7A + 6B + 8C}{21}$: $N\left(\frac{35 + 112}{21}; \frac{84}{21}\right) = (7; 4)$. $\vec{AD}(3; -12)$, $\vec{AN}(2; -8)$: $\det = -24 + 24 = 0$ ✓, et $\vec{AN} = \frac{2}{3}\vec{AD}$: $\frac{AN}{ND} = 2 = \frac{14}{7}$ ✓.

■ Corrigé de l'exercice 30

- a) Les triangles AHA_1 et AKA_1 , rectangles en H et K , ont la même hypoténuse $[AA_1]$ et des angles égaux en A (bissectrice) : ils sont isométriques, d'où $A_1H = A_1K$.
 b) Soit h la distance de A à (BC) et $d = A_1H = A_1K$. **Chaque aire se calcule de deux façons** : $\text{aire}(ABA_1) = \frac{1}{2}A_1B \times h = \frac{1}{2}AB \times d$ et $\text{aire}(ACA_1) = \frac{1}{2}A_1C \times h = \frac{1}{2}AC \times d$. En divisant : $\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$.



- $A_1 \in [BC]$ et $bA_1B = cA_1C$ (d'après 1.), avec $\vec{A_1B}$, $\vec{A_1C}$ de sens contraires : $b\vec{A_1B} + c\vec{A_1C} = \vec{0}$, soit $A_1 = \text{Bar}\{(B, b); (C, c)\}$.
- $a + b + c \neq 0$. Par associativité, $J = \text{Bar}\{(A, a); (A_1, b + c)\} \in (AA_1)$, bissectrice issue de A . Par 2. appliqué au sommet B , le pied de la bissectrice issue de B est $B_1 = \text{Bar}\{(C, c); (A, a)\}$ (car $\frac{B_1C}{B_1A} = \frac{BC}{BA} = \frac{a}{c}$), donc $J = \text{Bar}\{(B, b); (B_1, c + a)\} \in (BB_1)$; de même pour C . Les bissectrices se coupent en I : $J = I$, $I = \text{Bar}\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$.
- $I = \frac{14A + 15B + 13C}{42} = \left(\frac{70 + 182}{42}; \frac{168}{42}\right) = (6; 4)$ (contrôle : I est à la distance $4 = \frac{\text{aire}}{p} = \frac{84}{21}$ de (BC)).
- Les coefficients de I ont pour somme $2p$, ceux de N ont pour somme p ; en ajoutant ceux de A , de B , de C : $a + (p - a) = p$, etc. Donc $\text{Bar}\{(I, 2p); (N, p)\} = \text{Bar}\{(A, p); (B, p); (C, p)\} = G$, et par homogénéité $G = \text{Bar}\{(I, 2); (N, 1)\}$: $\vec{IG} = \frac{1}{3}\vec{IN}$, d'où I, G, N alignés et $GN = 2GI$. Exemple : $G\left(\frac{19}{3}; 4\right)$, $GI = \frac{1}{3}$, $GN = \frac{2}{3}$ ✓.

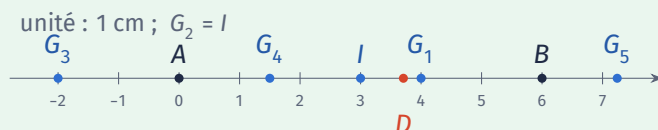
29 Corrigés : deux points pondérés

■ Corrigé de l'exercice 31

1. Méthode : on vérifie que la somme des coefficients est non nulle, puis on simplifie par homogénéité (multiplier tous les coefficients par un même réel $k \neq 0$ ne change pas le barycentre), puis on lit $t = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$ dans $\vec{AG} = t\vec{AB}$. Calculs utiles : $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$; $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2} + 1$; $3m^2 + 3 = 3(m^2 + 1)$ avec $m^2 + 1 > 0$. Coefficients de même signe : $G \in [AB]$; de signes contraires : G est hors de $[AB]$, du côté du coefficient le plus grand en valeur absolue.

Système	Somme	Système simplifié	$\vec{AG} = t\vec{AB}$	Position
$\mathcal{S}_1$	$3\sqrt{3}$	$\{(A, 1); (B, 2)\} (\times \frac{1}{\sqrt{3}})$	$t = \frac{2}{3}$, $AG_1 = 4$ cm	$G_1 \in [AB]$
$\mathcal{S}_2$	$2\sqrt{2} + 2$	$\{(A, 1); (B, 1)\}$	$t = \frac{1}{2}$	$G_2 = I$, milieu de $[AB]$
$\mathcal{S}_3$	$\frac{1}{2}$	$\{(A, 4); (B, -1)\} (\times 6)$	$t = -\frac{1}{3}$, $AG_3 = 2$ cm	hors de $[AB]$, côté A
$\mathcal{S}_4$	$4(m^2 + 1)$	$\{(A, 3); (B, 1)\} (\times \frac{1}{m^2+1})$	$t = \frac{1}{4}$ pour tout m	$G_4 \in [AB]$
$\mathcal{S}_5$	2	impossible (voir ci-dessous)	$t = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \approx 1,21$	hors de $[AB]$, côté B
$\mathcal{S}_6$	0	pas de barycentre		

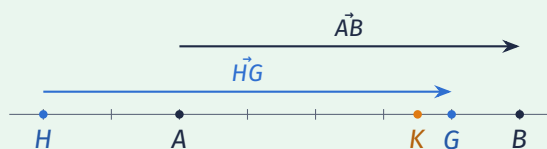
Pour $\mathcal{S}_5$: $AG_5 = 3(1 + \sqrt{2}) \approx 7,24$ cm ; le quotient des coefficients, $\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = -(3 + 2\sqrt{2})$, est irrationnel : aucun système à coefficients entiers ne convient.



2. a) La somme $\sqrt{5} + 1$ n'est pas nulle : $\vec{AD} = \frac{2}{\sqrt{5}+1}\vec{AB} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1}\vec{AB} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\vec{AB}$, d'où $AD \approx 3,71$ cm et $D \in [AB]$ (figure).
- b) $D \in [AB]$, donc $DB = AB - AD = \frac{3-\sqrt{5}}{2}AB$, et $AD^2 = \frac{6-2\sqrt{5}}{4}AB^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}AB^2$: $AD^2 = AB \times DB$ (« partage en extrême et moyenne raison »).
- c) De $(\sqrt{5} - 1)\vec{DA} + 2\vec{DB} = \vec{0}$, on tire $(\sqrt{5} - 1)DA = 2DB$, donc $\frac{DA}{DB} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$: le nombre d'or.

■ Corrigé de l'exercice 32

1. $\vec{AG} = \frac{4}{1+4}\vec{AB} = \frac{4}{5}\vec{AB}$ ($AG = 4$ cm) et $\vec{AH} = \frac{-2}{7-2}\vec{AB} = -\frac{2}{5}\vec{AB}$ ($AH = 2$ cm, du côté de A opposé à B).
2. Les deux sommes de coefficients valent 5 : $\vec{u} = 5\vec{MG}$ et $\vec{v} = 5\vec{MH}$. Par Chasles, $\vec{u} - \vec{v} = -6\vec{MA} + 6\vec{MB} = 6(\vec{AM} + \vec{MB}) = 6\vec{AB}$; mais aussi $\vec{u} - \vec{v} = 5(\vec{HM} + \vec{MG}) = 5\vec{HG}$. Donc $\vec{HG} = \frac{6}{5}\vec{AB}$ ($HG = 6$ cm).



La somme $6 + (-6)$ est nulle : **pas de barycentre**, et $6\vec{MA} - 6\vec{MB} = 6\vec{BA}$ pour tout M . Le système de H s'obtient en ajoutant $\{(A, 6); (B, -6)\}$ à celui de G : $\vec{v} = \vec{u} + 6\vec{BA}$, soit $5\vec{MH} = 5\vec{MG} + 6\vec{BA}$ et

$\vec{GH} = \frac{6}{5}\vec{BA}$. Transférer une masse 6 de B vers A (la masse totale 5 restant la même) déplace le barycentre de $\frac{6}{5}\vec{BA}$, vers A.

3. a) $\vec{AG}_x = \frac{s-x}{s}\vec{AB}$, donc $G_x\vec{G}_y = \vec{AG}_y - \vec{AG}_x = \frac{(s-y)-(s-x)}{s}\vec{AB} = \frac{x-y}{s}\vec{AB}$ (avec $s = 5 : \vec{GH} = G_1\vec{G}_7 = -\frac{6}{5}\vec{AB}$, comme en 2).

b) $G_x \in [AB] \iff 0 \leq \frac{5-x}{5} \leq 1 \iff 0 \leq x \leq 5$ (coefficients x et $5-x$ positifs). Puis $\vec{AG}_x = \frac{5-x}{5} \times 5 = 5-x = 3,5 \iff x = \frac{3}{2} : K = \text{Bar}\left\{\left(A, \frac{3}{2}\right); \left(B, \frac{7}{2}\right)\right\} = \text{Bar}\{(A, 3); (B, 7)\}$.

■ Corrigé de l'exercice 33

1. $1+k > 0$ et $1-k \neq 0$: G et G' existent. Par définition $\vec{GA} + k\vec{GB} = \vec{0}$, d'où $\vec{GA} = -k\vec{GB}$, et $\vec{G'A} - k\vec{G'B} = \vec{0}$, d'où $\vec{G'A} = k\vec{G'B}$. Coefficients positifs : $G \in [AB]$. Coefficients de signes contraires : $G' \notin [AB]$; comme $\vec{AG}' = \frac{k}{k-1}\vec{AB}$, G' est au-delà de B si $k > 1$, au-delà de A si $k < 1$.

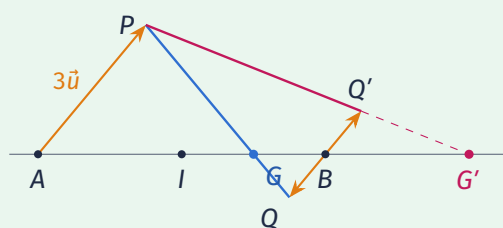
2. A et B ont pour abscisses -1 et 1 : $x = \frac{-1+k}{1+k} = \frac{k-1}{k+1}$ et $x' = \frac{-1-k}{1-k} = \frac{k+1}{k-1}$, d'où $xx' = 1$.

Pour tout point M : $(1+k)\vec{MG} = \vec{MA} + k\vec{MB}$ et $(1-k)\vec{MG}' = \vec{MA} - k\vec{MB}$. En ajoutant : $(1+k)\vec{MG} + (1-k)\vec{MG}' = 2\vec{MA}$; pour $M = A$, $(1+k)\vec{AG} + (1-k)\vec{AG}' = \vec{0}$ avec $(1+k) + (1-k) = 2 \neq 0$: $A = \text{Bar}\{(G, 1+k); (G', 1-k)\}$. En retranchant : $(1+k)\vec{MG} - (1-k)\vec{MG}' = 2k\vec{MB}$, et pour $M = B$: $B = \text{Bar}\{(G, 1+k); (G', k-1)\}$ (somme $2k \neq 0$).

3. Pour tout point M , par Chasles : $\vec{MP} + k\vec{MQ} = \vec{MA} + k\vec{u} + k\vec{MB} - k\vec{u} = \vec{MA} + k\vec{MB} = (1+k)\vec{MG}$; pour $M = G$, $\vec{GP} + k\vec{GQ} = \vec{0} : G = \text{Bar}\{(P, 1); (Q, k)\}$. De même $\vec{MP} - k\vec{MQ}' = \vec{MA} - k\vec{MB} = (1-k)\vec{MG}'$: $G' = \text{Bar}\{(P, 1); (Q', -k)\}$.

$P \neq Q$ (sinon $\vec{AB} = \vec{AP} + \vec{QB} = (k+1)\vec{u}$ serait colinéaire à $\vec{u}$) et $P \notin (AB)$ ($\vec{AP} = k\vec{u}$ n'est pas colinéaire à $\vec{AB}$) : (PQ) et (AB) sont deux droites distinctes, qui contiennent toutes deux G . Donc $G = (PQ) \cap (AB)$; de même $(P \neq Q')$, $G' = (PQ') \cap (AB)$. On construit ainsi G et G' à la règle, sans mesurer.

4. $AG = \frac{3}{4} \times 4 = 3 \text{ cm}$; $AG' = \frac{3}{2} \times 4 = 6 \text{ cm}$, au-delà de B ; $IG = 1 \text{ cm}$ et $IG' = 4 \text{ cm}$. Contrôle : $IB = 2 \text{ cm}$, $x = \frac{1}{2}$, $x' = 2$ et $IG \times IG' = 4 = IB^2$. (Figure : $\vec{u}$ de coordonnées (0,5; 0,6) en cm.)



■ Corrigé de l'exercice 34

1. $\vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\vec{AB}$ et $\vec{AH} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\vec{AB}$, donc $\vec{AG} + \vec{AH} = \vec{AB} = 2\vec{AI}$. Le milieu J de $[GH]$ vérifie $\vec{AJ} = \frac{1}{2}(\vec{AG} + \vec{AH}) = \vec{AI} : J = I$, I est le milieu de $[GH]$. Enfin $G = H \iff \frac{\beta}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \iff \alpha = \beta$ (et alors $G = H = I$).

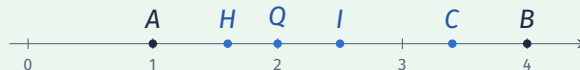
2. $\vec{AG} = -\frac{1}{5}\vec{AB}$ et $\vec{AH} = \frac{6}{5}\vec{AB}$: sur l'axe d'origine A dirigé vers B (unité 1 cm), G, H, I ont pour abscisses -1, 6, 2,5, et $\frac{-1+6}{2} = 2,5$ (figure en 3c).

3. a) $\vec{AG}_1 = -\vec{AG} = \frac{-\beta}{\alpha+\beta}\vec{AB}$. Le système $\{(A, \alpha + 2\beta); (B, -\beta)\}$ a pour somme $\alpha + \beta \neq 0$ et son barycentre K vérifie $\vec{AK} = \frac{-\beta}{\alpha+\beta}\vec{AB} = \vec{AG}_1$: $G_1 = \text{Bar}\{(A, \alpha + 2\beta); (B, -\beta)\}$.
- b) G est le milieu de $[BB_1]$: $\vec{AB}_1 = 2\vec{AG} - \vec{AB} = \frac{2\beta - (\alpha + \beta)}{\alpha + \beta}\vec{AB} = \frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta}\vec{AB}$, ce qui est aussi le vecteur $\vec{AL}$ pour $L = \text{Bar}\{(A, 2\alpha); (B, \beta - \alpha)\}$ (somme $\alpha + \beta$) : $B_1 = \text{Bar}\{(A, 2\alpha); (B, \beta - \alpha)\}$.
- c) $G_1 = \text{Bar}\{(A, 4); (B, 1)\}$: $AG_1 = 1$ cm, du côté de B .
 $B_1 = \text{Bar}\{(A, 12); (B, -7)\}$:
 $\vec{AB}_1 = -\frac{7}{5}\vec{AB}$, $AB_1 = 7$ cm.



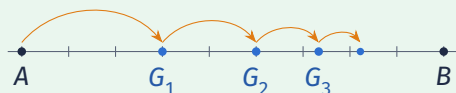
■ Corrigé de l'exercice 35

1. Les sommes de coefficients sont strictement positives. $H : \frac{ba+ab}{a+b} = \frac{2ab}{a+b} = h$. Q : comme $a = \sqrt{a}\sqrt{a}$ et $b = \sqrt{b}\sqrt{b}$, $\frac{\sqrt{b}a+\sqrt{a}b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \sqrt{ab} = g$. $C : \frac{a^2+b^2}{a+b} = c$. $I : \frac{a+b}{2} = m$.
2. a) $p(w) = \frac{wa+b}{w+1}$ et, en réduisant au même dénominateur, $p(w) - p(w') = \frac{(wa+b)(w'+1) - (w'a+b)(w+1)}{(w+1)(w'+1)} = \frac{(w-w')a - (w-w')b}{(w+1)(w'+1)}$. Si $0 < w < w'$, numérateur et dénominateur sont strictement positifs ($b > a$) : $p(w) > p(w')$, donc p est **strictement décroissante** sur $]0, +\infty[$.
- b) Par homogénéité (on divise par $a, \sqrt{a}, b$) : $H = P_{b/a}$, $Q = P_{\sqrt{b/a}}$, $I = P_1$, $C = P_{a/b}$. Avec $t = \frac{b}{a} > 1$: $t > \sqrt{t} > 1 > \frac{1}{t}$, donc, p étant strictement décroissante, $p(t) < p(\sqrt{t}) < p(1) < p(\frac{1}{t})$, soit $h < g < m < c$. Enfin $p(w) - a = \frac{b-a}{w+1} > 0$ et $b - p(w) = \frac{w(b-a)}{w+1} > 0$: $a < h < g < m < c < b$.
3. $hm = \frac{2ab}{a+b} \times \frac{a+b}{2} = ab$: $g^2 = hm$. $\frac{h+c}{2} = \frac{(a+b)^2}{2(a+b)} = m$: I est le milieu de $[HC]$; c'est l'exercice 34, car H et C s'échangent en échangeant les coefficients a et b . Pour $a = 1, b = 4$: $h = 1,6, g = 2, m = 2,5, c = 3,4$ ($g^2 = 4 = 1,6 \times 2,5$).



■ Corrigé de l'exercice 36

1. $G_1 = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 1)\}$: $AG_1 = \frac{1}{3}AB = 3$ cm.
 Puis $G_1G_2 = \frac{1}{3}G_1B = 2$ cm, $AG_2 = 5$ cm ; $G_2G_3 = \frac{1}{3}G_2B = \frac{4}{3}$ cm, $AG_3 = \frac{19}{3} \approx 6,33$ cm.
2. a) La réduction $2\vec{MG}_n + \vec{MB} = 3\vec{MG}_{n+1}$, appliquée en $M = A$, donne $\vec{AG}_{n+1} = \frac{2}{3}\vec{AG}_n + \frac{1}{3}\vec{AB}$.
- b) Raisonnons par récurrence ; notons $\mathcal{P}(n)$: « $\vec{AG}_n = \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)\vec{AB}$ ».
- Initialisation.* $\vec{AG}_0 = \vec{AA} = \vec{0} = \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^0\right)\vec{AB}$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité.* Si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, a) donne $\vec{AG}_{n+1} = \frac{2}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AB} = \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)\vec{AB}$: $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion.* $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.



c) La somme $2^n + (3^n - 2^n) = 3^n$ n'est pas nulle et le barycentre K_n de ce système vérifie $A\vec{K}_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n} \vec{AB} = A\vec{G}_n$: $G_n = \text{Bar}\{(A, 2^n); (B, 3^n - 2^n)\}$.

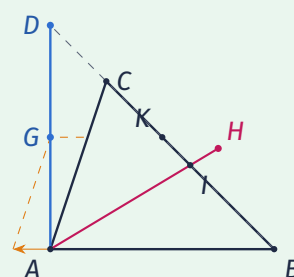
3. $2^n > 0$ et $3^n - 2^n \geq 0$: coefficients de même signe, donc $G_n \in [AB]$. Puis $G_n \vec{B} = \vec{AB} - A\vec{G}_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \vec{AB}$: $G_n B = \left(\frac{2}{3}\right)^n AB > 0$, donc $G_n \neq B$. Enfin $G_n B < \frac{AB}{100} \iff 100 \times 2^n < 3^n$; or $3^{11} = 177\,147 < 204\,800 = 100 \times 2^{11}$ et $3^{12} = 531\,441 > 409\,600 = 100 \times 2^{12}$, et $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ décroît : le plus petit entier est $n = 12$. (Les pas $G_n G_{n+1} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n AB$ diminuent.)

30

Corrigés : trois points et plus

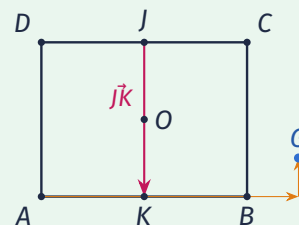
■ Corrigé de l'exercice 37

- $3 - 1 + 4 = 6 \neq 0$: G existe, et $A\vec{G} = \frac{-\vec{AB} + 4\vec{AC}}{6}$, soit $A\vec{G} = -\frac{1}{6}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$: G est le quatrième sommet du parallélogramme construit sur $-\frac{1}{6}\vec{AB}$ et $\frac{2}{3}\vec{AC}$ issus de A .
- $1 - 3 - 3 = -5 \neq 0$: $A\vec{H} = \frac{-3\vec{AB} - 3\vec{AC}}{-5} = \frac{3}{5}(\vec{AB} + \vec{AC}) = \frac{3}{5} \times 2\vec{AI}$, d'où $A\vec{H} = \frac{6}{5}\vec{AI}$: H est sur la médiane (AI) , un peu au-delà de I .
- $3 - 1 - 2 = 0$: **pas de barycentre**. Pour tout M , par Chasles : $3\vec{MA} - \vec{MB} - 2\vec{MC} = (\vec{MA} - \vec{MB}) + 2(\vec{MA} - \vec{MC}) = \vec{BA} + 2\vec{CA} = -(\vec{AB} + 2\vec{AC})$. Or $A\vec{K} = \frac{\vec{AB} + 2\vec{AC}}{3}$, donc $3\vec{MA} - \vec{MB} - 2\vec{MC} = -3A\vec{K} = 3\vec{KA}$.
- $-1 + 4 = 3 \neq 0$: $A\vec{D} = \frac{-\vec{AB} + 4\vec{AC}}{3} = 2A\vec{G}$. Donc G est le milieu de $[AD]$. Le point D , barycentre de B et C , est sur (BC) ; il est aussi sur (AG) puisque $A\vec{D} = 2A\vec{G}$. Les droites (AG) et (BC) sont distinctes ($A \notin (BC)$), donc $D = (AG) \cap (BC)$.
(Figure : $A(0;0)$, $B(4;0)$, $C(1;3)$; $G(0;2)$, $H(3;\frac{9}{5})$, $D(0;4)$, $K(2;2)$.)



■ Corrigé de l'exercice 38

- La somme $1 + 2 + 3 - 2 = 4$ n'est pas nulle et $A\vec{G} = \frac{2A\vec{B} + 3A\vec{C} - 2A\vec{D}}{4}$. Comme $ABCD$ est un parallélogramme, $A\vec{C} = \vec{AB} + \vec{AD}$, d'où $A\vec{G} = \frac{5}{4}\vec{AB} + \frac{1}{4}\vec{AD}$: G est à 10 cm de (AD) et à 1,5 cm de (AB) , hors du rectangle.

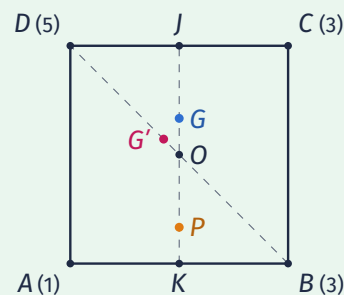


- $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MK}$ et $\vec{MC} + \vec{MD} = 2\vec{MJ}$, donc $\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC} - \vec{MD} = 2(\vec{MK} - \vec{MJ}) = 2\vec{JK}$, de norme $2JK = 2BC = 12$ cm. Puis $2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MD} = (\vec{MA} - \vec{MB}) + (\vec{MA} - \vec{MD}) = \vec{BA} + \vec{DA} = -\vec{AC} = \vec{CA}$, de norme $AC = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ cm (Pythagore). Ces vecteurs ne dépendent pas de M : les sommes de coefficients sont nulles.

3. a) O est le milieu des diagonales : $\vec{PA} + \vec{PC} = \vec{PB} + \vec{PD} = 2\vec{PO}$; l'égalité s'écrit $4\vec{PO} = 2\vec{JK}$, soit $\vec{OP} = \frac{1}{2}\vec{KJ}$. Comme O est le milieu de $[KJ]$, $\boxed{P = J}$.
- b) La somme $1 + 2 + 1 - 4$ est nulle : $\vec{NA} + 2\vec{NB} + \vec{NC} - 4\vec{ND} = \vec{DA} + 2\vec{DB} + \vec{DC} = 3\vec{DB}$ (car $\vec{DA} + \vec{DC} = \vec{DB}$), vecteur constant de norme 30 cm. L'égalité équivaut à $3\vec{DB} = \vec{0}$, qui est fausse : **aucun point N ne convient.**

■ Corrigé de l'exercice 39

1. O est le milieu de $[AC]$ et de $[BD]$, J celui de $[CD]$: pour tout M , $\vec{MA} + 3\vec{MB} + 3\vec{MC} + 5\vec{MD} = (\vec{MA} + \vec{MC}) + 3(\vec{MB} + \vec{MD}) + 2(\vec{MC} + \vec{MD}) = \boxed{8\vec{MO} + 4\vec{MJ}}$. Le membre de gauche vaut $12\vec{MG}$; pour $M = O$: $12\vec{OG} = 4\vec{OJ}$, d'où $\boxed{\vec{OG} = \frac{1}{3}\vec{OJ}}$ ($OG = 1$ dm).
2. Le nouveau point d'équilibre est O si et seulement si $\vec{OA} + 3\vec{OB} + 3\vec{OC} + 5\vec{OD} + 6\vec{OP} = \vec{0}$, c'est-à-dire $12\vec{OG} + 6\vec{OP} = \vec{0}$, soit $\vec{OP} = -2\vec{OG} = -\frac{2}{3}\vec{OJ} = \boxed{\frac{2}{3}\vec{OK}}$: $P \in [OK]$, à 2 dm de O .
3. Avec une masse $m > 0$ en P : le point d'équilibre est $O \iff 12\vec{OG} + m\vec{OP} = \vec{0} \iff m\vec{OP} = -4\vec{OJ} = 4\vec{OK} \iff \vec{OP} = \frac{4}{m}\vec{OK}$. Le point P est sur la demi-droite $[OK)$, et sur le plateau si et seulement si $OP \leq OK$, c'est-à-dire $\frac{4}{m} \leq 1$, soit $m \geq 4$. La plus petite masse est $\boxed{4 \text{ kg, posée en } K}$.



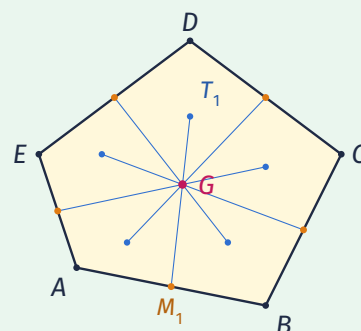
4. Puisque $\vec{OC} = -\vec{OA}$ et $\vec{OD} = -\vec{OB}$: $x\vec{OA} + 3\vec{OB} + 3\vec{OC} + 5\vec{OD} = \boxed{(x-3)\vec{OA} - 2\vec{OB}}$. Le nouveau point d'équilibre G' vérifie $(x+11)\vec{OG'} = (x-3)\vec{OA} - 2\vec{OB}$; il est sur (BD) si et seulement si $\vec{OG'}$ est colinéaire à $\vec{OB}$, c'est-à-dire ($\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ n'étant pas colinéaires) si et seulement si $\boxed{x = 3}$. Alors $14\vec{OG'} = -2\vec{OB}$: $\boxed{\vec{OG'} = \frac{1}{7}\vec{OD}}$.

■ Corrigé de l'exercice 40

1. $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MM_1}$ (M_1 milieu de $[AB]$) et $\vec{MC} + \vec{MD} + \vec{ME} = 3\vec{MT_1}$ (T_1 centre de gravité de CDE). En ajoutant, $\boxed{\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} + \vec{ME} = 2\vec{MM_1} + 3\vec{MT_1}}$. Le membre de gauche vaut $5\vec{MG}$; pour $M = G$: $2\vec{GM_1} + 3\vec{GT_1} = \vec{0}$, donc $\boxed{G = \text{Bar}\{(M_1, 2); (T_1, 3)\}}$ et $\boxed{M_1\vec{G} = \frac{3}{5}M_1\vec{T_1}}$.

2. Le même calcul vaut pour chaque côté (on renomme les sommets) : G est sur chacune des cinq droites. Elles sont bien définies : le milieu d'un côté est sur le bord du pentagone, alors que le centre de gravité des trois autres sommets est intérieur à leur triangle, donc au pentagone (convexe). Les cinq droites sont **concurrentes en G** .

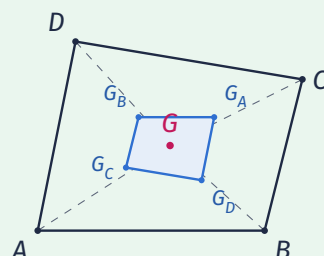
(Figure : $A(0;0)$, $B(5;-1)$, $C(7;3)$, $D(3;6)$, $E(-1;3)$, $G(\frac{14}{5}, \frac{11}{5})$.)



■ Corrigé de l'exercice 41

1. Pour tout point M : $4\vec{MG} = \vec{MA} + (\vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD}) = \vec{MA} + 3\vec{MG}_A$. Pour $M = G$: $\vec{GA} + 3\vec{GG}_A = \vec{0}$, donc $G = \text{Bar}\{(A, 1); (G_A, 3)\}$ et $\vec{GG}_A = -\frac{1}{3}\vec{GA}$. De même pour B, C, D : les quatre droites sont **concurrentes en G** (elles sont bien définies : $A \neq G_A$, car $ABCD$ étant convexe, A n'est pas intérieur au triangle BCD).

2. $G_A\vec{G}_B = \vec{GG}_B - \vec{GG}_A = -\frac{1}{3}(\vec{GB} - \vec{GA}) = -\frac{1}{3}\vec{AB}$. Les côtés de $G_A G_B G_C G_D$ sont parallèles à ceux de $ABCD$, trois fois plus courts, et de sens contraire. Si $\vec{AB} = \vec{DC}$, alors $G_A\vec{G}_B = -\frac{1}{3}\vec{DC} = G_D\vec{G}_C$: $G_A G_B G_C G_D$ est un parallélogramme.
(Figure : $A(0; 0)$, $B(6; 0)$, $C(7; 4)$, $D(1; 5)$, $G(\frac{7}{2}; \frac{9}{4})$.)



3. D'après 1, $\vec{GG}_A + \vec{GG}_B + \vec{GG}_C + \vec{GG}_D = -\frac{1}{3}(\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD}) = \vec{0}$: G est l'isobarycentre des G_k . Puis $4\vec{AG} - 3\vec{AG}_A = \vec{AG} - 3\vec{GG}_A = \vec{AG} + \vec{GA} = \vec{0}$: $A = \text{Bar}\{(G, 4); (G_A, -3)\}$. Reconstruction : on construit G , isobarycentre des G_k , puis A, B, C, D par $\vec{GA} = -3\vec{GG}_A$, etc.

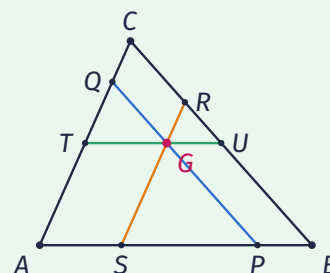
■ Corrigé de l'exercice 42

1. Les systèmes de G, P, Q ont pour somme s : $s\vec{AG} = b\vec{AB} + c\vec{AC}$, $s\vec{AP} = (b+c)\vec{AB}$ et $s\vec{AQ} = (b+c)\vec{AC}$. Donc $s\vec{PG} = s(\vec{AG} - \vec{AP}) = c(\vec{AC} - \vec{AB}) = c\vec{BC}$: $\vec{PG} = \frac{c}{s}\vec{BC}$; et $s\vec{PQ} = (b+c)(\vec{AC} - \vec{AB})$:

$$\vec{PQ} = \frac{b+c}{s}\vec{BC}.$$

Soit Δ la parallèle à (BC) passant par G . Comme $\vec{PG}$ est colinéaire à $\vec{BC}$, $P \in \Delta$; or $P \in (AB)$, et Δ n'est pas parallèle à (AB) : P est le point d'intersection de Δ et (AB) . De même $\vec{GQ} = \vec{PQ} - \vec{PG} = \frac{b}{s}\vec{BC}$, donc $Q = \Delta \cap (AC)$. Enfin

$$\frac{PQ}{BC} = \frac{b+c}{s}.$$

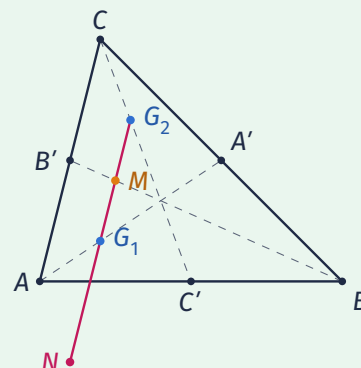


2. Par permutation circulaire $(A, a) \rightarrow (B, b) \rightarrow (C, c) \rightarrow (A, a)$: $R = \text{Bar}\{(B, b); (C, c+a)\}$, $S = \text{Bar}\{(B, b); (A, c+a)\}$, $\frac{RS}{CA} = \frac{c+a}{s}$; $T = \text{Bar}\{(C, c); (A, a+b)\}$, $U = \text{Bar}\{(C, c); (B, a+b)\}$, $\frac{TU}{AB} = \frac{a+b}{s}$. Donc $\frac{PQ}{BC} + \frac{RS}{CA} + \frac{TU}{AB} = \frac{(b+c)+(c+a)+(a+b)}{s} = 2$.
3. G milieu de $[PQ] \iff \vec{PG} = \frac{1}{2}\vec{PQ} \iff \frac{c}{s} = \frac{b+c}{2s} \iff b = c$. De même pour $[RS]$ ($c = a$) et $[TU]$ ($a = b$). Donc G est le milieu des trois segments $\iff a = b = c \iff G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, 1)\}$ (homogénéité ; réciproquement, les coefficients d'un point sont uniques à un facteur près) : **G est le centre de gravité.**
4. $(a, b, c) = (2, 3, 5)$, $s = 10$: $\frac{PQ}{BC} + \frac{RS}{CA} + \frac{TU}{AB} = \frac{8}{10} + \frac{7}{10} + \frac{5}{10} = 2$. Figure : $A(0; 0)$, $B(6; 0)$, $C(2; 4,5)$, $G(2,8; 2,25)$, $P(4,8; 0)$, $Q(1,6; 3,6)$, $R(3,2; 3,15)$, $S(1,8; 0)$, $T(1; 2,25)$, $U(4; 2,25)$; on lit par exemple $TU = 3 = \frac{1}{2}AB$.

31 Corrigés : associativité

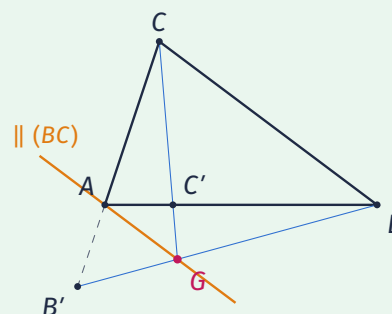
■ Corrigé de l'exercice 43

- $A' = \text{Bar}\{(B, 1); (C, 1)\}$ (somme $2 \neq 0$) : par associativité, $G_1 = \text{Bar}\{(A, 4); (A', 2)\}$, donc $\vec{AG}_1 = \frac{2}{6}\vec{AA'} = \frac{1}{3}\vec{AA'}$. De même $C' = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 1)\}$ et $G_2 = \text{Bar}\{(C, 4); (C', 2)\}$: $\vec{CG}_2 = \frac{1}{3}\vec{CC'}$.
- Premier regroupement** : $\{(A, 4); (B, 1); (C, 1)\}$ a pour barycentre G_1 (somme 6), et $\{(A, 1); (B, 1); (C, 4)\}$ a pour barycentre G_2 (somme 6) ; le système entier a donc pour barycentre $\text{Bar}\{(G_1, 6); (G_2, 6)\}$, le milieu de $[G_1G_2]$. **Second regroupement** : on fusionne les points égaux, $(A, 4)$ et $(A, 1)$ donnent $(A, 5)$, etc. : le barycentre est M . Donc M est le milieu de $[G_1G_2]$.
- Par homogénéité, $G_1 = \text{Bar}\{(A, 8); (B, 2); (C, 2)\}$ (somme 12) et $G_2 = \text{Bar}\{(A, -1); (B, -1); (C, -4)\}$ (somme -6). En regroupant ainsi le système proposé, son barycentre est $\text{Bar}\{(G_1, 12); (G_2, -6)\}$; en fusionnant les points égaux, c'est le barycentre N de $\{(A, 7); (B, 1); (C, -2)\}$ (somme $6 \neq 0$). Donc $N = \text{Bar}\{(G_1, 2); (G_2, -1)\}$: $2N\vec{G}_1 - N\vec{G}_2 = \vec{0}$, soit $N\vec{G}_2 = 2N\vec{G}_1$: G_1 est le milieu de $[NG_2]$. Ainsi N et M sont sur la droite (G_1G_2) : N, G_1, M, G_2 sont alignés. (Figure : $A(0;0), B(5;0), C(1;4)$.)



■ Corrigé de l'exercice 44

- $\text{Bar}\{(A, 3); (C, -1)\}$ (somme 2) est le point E tel que $\vec{AE} = -\frac{1}{2}\vec{AC}$: c'est B' . $\text{Bar}\{(A, 3); (B, 1)\}$ (somme 4) est le point F tel que $\vec{AF} = \frac{1}{4}\vec{AB}$: c'est C' .
- La somme $3 + 1 - 1 = 3$ n'est pas nulle. En regroupant $(A, 3)$ et $(C, -1)$ (somme $2 \neq 0$) : $G = \text{Bar}\{(B, 1); (B', 2)\}$, donc $G \in (BB')$ et $\vec{BG} = \frac{2}{3}\vec{BB'}$. En regroupant $(A, 3)$ et $(B, 1)$: $G = \text{Bar}\{(C', 4); (C, -1)\}$, donc $G \in (CC')$ et $\vec{CG} = \frac{4}{3}\vec{CC'}$.
- $(B, 1)$ et $(C, -1)$ ont une somme de coefficients nulle : ils n'ont pas de barycentre partiel. Mais, par définition de G , $3\vec{GA} + \vec{GB} - \vec{GC} = \vec{0}$, et $\vec{GB} - \vec{GC} = \vec{CB}$, d'où $3\vec{GA} + \vec{CB} = \vec{0}$: $\vec{AG} = -\frac{1}{3}\vec{CB}$. Donc G est sur la parallèle à (BC) passant par A . Conclusion : (BB') , (CC') et la parallèle à (BC) issue de A concourent en G (figure : $A(0;0), B(5;0), C(1;3), G(\frac{4}{3}; -1)$). Une somme partielle nulle fournit une direction au lieu d'un point.

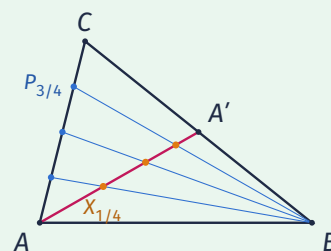


■ Corrigé de l'exercice 45

1. $A\vec{P}_t = t\vec{AC}$ donne $P_t = \text{Bar}\{(A, 1-t); (C, t)\}$; deux coefficients égaux non nuls donnent le milieu : $A' = \text{Bar}\{(B, t); (C, t)\}$. Soit $X = \text{Bar}\{(A, 1-t); (B, t); (C, t)\}$ (somme $1+t \neq 0$). En regroupant $(A, 1-t)$ et (C, t) : $X = \text{Bar}\{(P_t, 1); (B, t)\} \in (BP_t)$. En regroupant (B, t) et (C, t) : $X = \text{Bar}\{(A, 1-t); (A', 2t)\} \in (AA')$. Les droites (BP_t) et (AA') sont distinctes ($B \notin (AA')$) : $X = X_t$. D'où $A\vec{X}_t = \frac{2t}{1+t}A\vec{A'}$ et

$$B\vec{X}_t = \frac{1}{1+t}B\vec{P}_t.$$

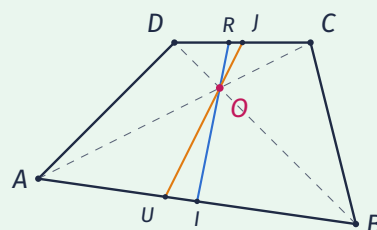
2. $t = \frac{1}{4} : \frac{1/2}{5/4} = \frac{2}{5}$; $t = \frac{1}{2} : \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}$ ($X_{1/2}$ est le centre de gravité) ; $t = \frac{3}{4} : \frac{3/2}{7/4} = \frac{6}{7}$. Les écarts $\frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$ et $\frac{6}{7} - \frac{2}{3} = \frac{4}{21}$ diffèrent : **non**, le partage de la médiane n'est pas régulier ($t \mapsto \frac{2t}{1+t}$ n'est pas affine). Puis $\frac{2t}{1+t} = \frac{3}{4} \iff 8t = 3 + 3t \iff t = \frac{3}{5}$. Enfin $X_t = A' \iff 2t = 1+t \iff t = 1$, exclu : **non**. (Figure : $A(0;0)$, $B(6;0)$, $C(1;4)$, $t = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$.)



■ Corrigé de l'exercice 46

1. $\vec{AO} = \frac{2}{1+2}\vec{AC}$ et $\vec{BO} = \frac{3}{1+3}\vec{BD}$: $O = \text{Bar}\{(A, 1); (C, 2)\} = \text{Bar}\{(B, 1); (D, 3)\}$. Pour tout point M : $\lambda\vec{MA} + 2\lambda\vec{MC} = 3\lambda\vec{MO}$ et $\mu\vec{MB} + 3\mu\vec{MD} = 4\mu\vec{MO}$. En ajoutant : $\lambda\vec{MA} + \mu\vec{MB} + 2\lambda\vec{MC} + 3\mu\vec{MD} = (3\lambda + 4\mu)\vec{MO}$, avec $3\lambda + 4\mu > 0$; pour $M = O$, on obtient $O = \text{Bar}\{(A, \lambda); (C, 2\lambda); (B, \mu); (D, 3\mu)\}$: on peut choisir séparément les masses de chaque diagonale.

2. Avec $\lambda = \mu = 1$, on regroupe $(A, 1)$ et $(B, 1)$ en $(I, 2)$, puis $(C, 2)$ et $(D, 3)$ en $(R, 5)$: $O = \text{Bar}\{(I, 2); (R, 5)\}$. Donc $R \in (IO)$; et $R \in (CD)$. Les droites (IO) et (CD) sont distinctes ($I \notin (CD)$) : A et B sont du même côté de (CD) , le quadrilatère étant convexe). Donc $R = (IO) \cap (CD)$, avec $\vec{CR} = \frac{3}{5}\vec{CD}$ et $\vec{IO} = \frac{5}{7}\vec{IR}$.



3. Pour faire apparaître J , il faut des masses égales en C et D : $2\lambda = 3\mu$, par exemple $\lambda = 3$, $\mu = 2$. Alors $O = \text{Bar}\{(A, 3); (B, 2); (C, 6); (D, 6)\} = \text{Bar}\{(U, 5); (J, 12)\}$ avec $U = \text{Bar}\{(A, 3); (B, 2)\}$. Comme au 2, U est le point d'intersection de (JO) et (AB) : $A\vec{U} = \frac{2}{5}A\vec{B}$ (et $J\vec{O} = \frac{5}{17}J\vec{U}$). (Figure : $A(0;0)$, $B(7;-1)$, $C(6;3)$, $D(3;3)$, $O(4;2)$.)

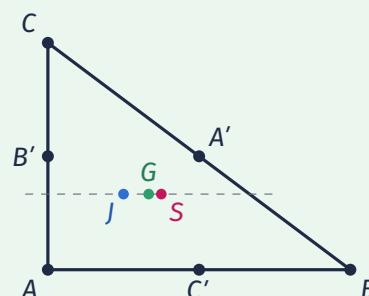
■ Corrigé de l'exercice 47

1. $A' = \text{Bar}\{(B, \frac{a}{2}); (C, \frac{a}{2})\}$ (somme a) ; par associativité, on peut remplacer (A', a) par ces deux points pondérés, et de même (B', b) par $\{(C, \frac{b}{2}); (A, \frac{b}{2})\}$, (C', c) par $\{(A, \frac{c}{2}); (B, \frac{c}{2})\}$. En fusionnant les points égaux, puis par homogénéité (on multiplie par 2) :

$$S = \text{Bar}\{(A, \frac{b+c}{2}); (B, \frac{c+a}{2}); (C, \frac{a+b}{2})\} \quad \text{donc} \quad S = \text{Bar}\{(A, b+c); (B, c+a); (C, a+b)\}.$$

2. $G = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 1); (C, 1)\}$. Si $a = b = c$, les trois coefficients de S sont égaux et $S = G$. Réciproquement, si $S = G$: les coefficients d'un point par rapport à A, B, C non alignés sont uniques à un facteur près, donc $b + c = c + a = a + b$, d'où $a = b = c$. Ainsi $S = G \iff ABC$ équilatéral : en général, le fil et la plaque ne s'équilibrent pas au même point.

3. Pour tout point M : $(b + c)\vec{MA} + (c + a)\vec{MB} + (a + b)\vec{MC} = s(\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}) - (a\vec{MA} + b\vec{MB} + c\vec{MC})$, c'est-à-dire $2s\vec{MS} = 3s\vec{MG} - s\vec{MJ}$, soit $2\vec{MS} = 3\vec{MG} - \vec{MJ}$. Pour $M = S$: $S = \text{Bar}\{(G, 3); (J, -1)\}$ (somme 2), donc S, G, J sont alignés ; pour $M = G$: $2\vec{GS} = -\vec{GJ}$, soit $\vec{GS} = \frac{1}{2}\vec{GJ}$.

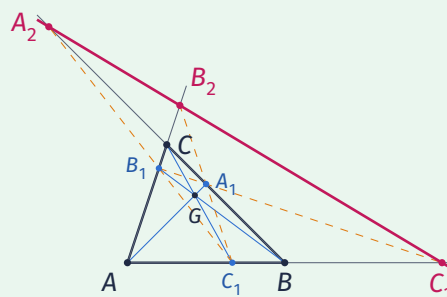


4. $a = BC = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$, $b = CA = 6$, $c = AB = 8$, $s = 24$. $S = \text{Bar}\{(A, 14); (B, 18); (C, 16)\}$: $x_S = \frac{18 \times 8}{48} = 3$, $y_S = \frac{16 \times 6}{48} = 2$, $S(3; 2)$; $G\left(\frac{8}{3}; 2\right)$; $J = \text{Bar}\{(A, 10); (B, 6); (C, 8)\}$: $J(2; 2)$. Contrôle : $\vec{GS}\left(\frac{1}{3}; 0\right)$ et $\frac{1}{2}\vec{GJ}\left(\frac{1}{3}; 0\right)$. Les trois points sont sur la droite d'équation $y = 2$.

■ Corrigé de l'exercice 48

1. La somme $1 + 2 + 4 = 7$ n'est pas nulle. En regroupant $(B, 2)$ et $(C, 4)$ en $(A_1, 6)$, on obtient $G = \text{Bar}\{(A, 1); (A_1, 6)\}$, donc $G \in (AA_1)$ et $\vec{AG} = \frac{6}{7}\vec{AA_1}$. De même $G = \text{Bar}\{(B, 2); (B_1, 5)\}$, $\vec{BG} = \frac{5}{7}\vec{BB_1}$, et $G = \text{Bar}\{(C, 4); (C_1, 3)\}$, $\vec{CG} = \frac{3}{7}\vec{CC_1}$. Les trois droites sont **concurrentes en G**.

2. $B\vec{A}_2 = \frac{-4}{-2}\vec{BC} = 2\vec{BC}$ (C milieu de $[BA_2]$), $A\vec{B}_2 = \frac{4}{3}\vec{AC}$, $A\vec{C}_2 = 2\vec{AB}$ (B milieu de $[AC_2]$). Dans le système $\{(A, 1); (C, 4); (A, -1); (B, -2)\}$, on regroupe en $(B_1, 5)$ et $(C_1, -3)$; en fusionnant, on obtient $\{(A, 0); (B, -2); (C, 4)\}$, dont le barycentre est $\text{Bar}\{(B, 2); (C, -4)\} = A_2$ (homogénéité). Donc $A_2 = \text{Bar}\{(B_1, 5); (C_1, -3)\} \in (B_1C_1)$. Or $A_2 \in (BC)$, et $(B_1C_1) \neq (BC)$ ($B_1 \in (AC)$, $B_1 \neq C$) : $A_2 = (B_1C_1) \cap (BC)$.



De même, le système $\{(B, 2); (C, 4); (A, -1); (B, -2)\}$ donne $B_2 = \text{Bar}\{(A_1, 6); (C_1, -3)\}$, d'où $B_2 = (A_1C_1) \cap (CA)$; et $\{(B, 2); (C, 4); (A, -1); (C, -4)\}$ donne $C_2 = \text{Bar}\{(A_1, 6); (B_1, -5)\}$, d'où $C_2 = (A_1B_1) \cap (AB)$.

3. Les sommes des coefficients de A_2, B_2, C_2 valent $-2, -3, -1$: pour tout M , $-2\vec{MA}_2 = 2\vec{MB} - 4\vec{MC}$, $3\vec{MB}_2 = -\vec{MA} + 4\vec{MC}$ et $-\vec{MC}_2 = \vec{MA} - 2\vec{MB}$. En ajoutant : $-2\vec{MA}_2 + 3\vec{MB}_2 - \vec{MC}_2 = \vec{0}$. Pour $M = B_2$: $B_2\vec{C}_2 = -2B_2\vec{A}_2$, donc A_2, B_2, C_2 **sont alignés** ($B_2 = \text{Bar}\{(A_2, 2); (C_2, 1)\}$).
4. Par homogénéité, $A_1 = \text{Bar}\{(B, 1); (C, 2)\}$ et $A_2 = \text{Bar}\{(B, 1); (C, -2)\}$: ce sont les points G et G' de l'exercice 33, avec (B, C) au lieu de (A, B) et $k = 2$. Construction à la règle : on trace (B_1C_1) , qui coupe (BC) en A_2 ; de même $B_2 = (A_1C_1) \cap (CA)$ et $C_2 = (A_1B_1) \cap (AB)$. (Figure : $A(0; 0)$, $B(4; 0)$, $C(1; 3)$, $G\left(\frac{12}{7}; \frac{12}{7}\right)$, $A_2(-2; 6)$, $B_2\left(\frac{4}{3}; 4\right)$, $C_2(8; 0)$.)

32 Corrigés : coordonnées

■ Corrigé de l'exercice 49

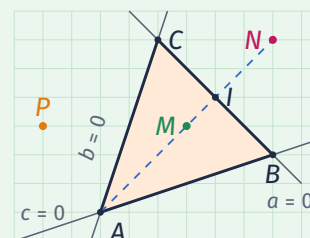
- $3 + 1 \neq 0 : x_{G_1} = \frac{-9+5}{4} = -1, y_{G_1} = \frac{6-2}{4} = 1, \boxed{G_1(-1; 1)}$; $1 - 3 \neq 0 : x_{G_2} = \frac{-3-15}{-2} = 9, y_{G_2} = \frac{2+6}{-2} = -4, \boxed{G_2(9; -4)}$. Avec $\vec{AB}(8; -4) : A + \frac{1}{4}\vec{AB} = (-1; 1)$ et $A + \frac{3}{2}\vec{AB} = (9; -4) \checkmark$.
- $x_{G_3} = \frac{-3+5+4}{6} = 1, y_{G_3} = \frac{2-2+24}{6} = 4 : \boxed{G_3(1; 4)}$; $x_{G_4} = \frac{-6-5+1}{2} = -5, y_{G_4} = \frac{4+2+6}{2} = 6 : \boxed{G_4(-5; 6)}$. Contrôle par associativité : $I(1; 0)$ et $G_3 = \text{Bar}\{(I, 2); (C, 4)\}$, donc $\vec{IG}_3 = \frac{2}{3}\vec{IC} = \frac{2}{3}\vec{I} = (0; 4) \checkmark$.
- La somme $2 - 1 - 1$ est nulle. Pour $M(x; y)$, l'abscisse de $2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}$ est $2(-3-x) - (5-x) - (1-x) = -12$, son ordonnée $2(2-y) - (-2-y) - (6-y) = 0 : \boxed{2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} = -12\vec{i}}$, indépendant de M .
- $\vec{G_1A}(-2; 1), \vec{G_1B}(6; -3) : G_1A = \sqrt{5}, G_1B = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$. C'est la définition : $3\vec{G_1A} + \vec{G_1B} = \vec{0}$, donc $\vec{G_1B} = -3\vec{G_1A}$ et $G_1B = 3 G_1A$.

■ Corrigé de l'exercice 50

- $3\vec{OG} = \vec{OA} + 2\vec{OB}$, donc $\vec{OB} = \frac{1}{2}(3\vec{OG} - \vec{OA}) : \boxed{B(4; 1)}$ (contrôle : $\frac{1+8}{3} = 3, \frac{-2+2}{3} = 0$).
- $\vec{CD}(6; -3), \vec{CE}(2; -1), \det = -6 + 6 = 0$: alignés, et $\vec{CE} = \frac{1}{3}\vec{CD}$. Or $\vec{CE} = \frac{1}{\alpha+1}\vec{CD} : \boxed{\alpha = 2}$.
- $\vec{PQ}(-3; 6), \vec{PR}(-2; 4) : \det = 0$ et $\vec{PR} = \frac{2}{3}\vec{PQ}$, d'où $\boxed{R = \text{Bar}\{(P, 1); (Q, 2)\}}$. $\vec{PS}(1; 1) : \det(\vec{PQ}, \vec{PS}) = -9 \neq 0 : S \notin (PQ)$, ce n'est pas un barycentre de P et Q .
- $2\vec{OP} = 3\vec{OT} - \vec{OQ} \iff \vec{OT} = \frac{1}{3}(2\vec{OP} + \vec{OQ}) : \boxed{T(1; 1)}$, et cette égalité dit que $\boxed{T = \text{Bar}\{(P, 2); (Q, 1)\}}$.

■ Corrigé de l'exercice 51

- $\det(\vec{AB}, \vec{AC}) = 6 \times 6 - 2 \times 2 = 32 \neq 0$. Avec $a = 1 - b - c$, les coordonnées donnent $6b + 2c = 3$ et $2b + 6c = 3$, d'où $b = c = \frac{3}{8}, a = \frac{1}{4} : \boxed{M = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 3); (C, 3)\}}$. Coefficients $> 0 : M$ est **intérieur**. En regroupant $(B, 3)$ et $(C, 3)$ en $(I, 6) : \boxed{M = \text{Bar}\{(A, 2); (I, 6)\}} \in (AI)$ et $\boxed{\frac{AM}{AI} = \frac{3}{4}}$.
- $6b + 2c = 6, 2b + 6c = 6 : \boxed{N = \text{Bar}\{(A, -2); (B, 3); (C, 3)\}} = \text{Bar}\{(A, -2); (I, 6)\}, \vec{AN} = \frac{3}{2}\vec{AI} : N$ est au-delà de I , hors du triangle.
- Les conditions s'écrivent $a = 1 - b - c, 6b + 2c = x + 1, 2b + 6c = y + 1$; ce système a une seule solution : $16b = 3(x + 1) - (y + 1) = 3x - y + 2$, de même $16c = 3y - x + 2$, et $a = 1 - b - c = \frac{6-x-y}{8}$.
- $a = 0 \iff \boxed{x + y = 6}$, c'est (BC) ; $b = 0 \iff \boxed{3x - y + 2 = 0}$, c'est (CA) ; $c = 0 \iff \boxed{3y - x + 2 = 0}$, c'est (AB) (on vérifie avec les sommets). $a > 0$ caractérise le demi-plan de bord (BC) qui contient A (où $a = 1$); de même pour b et c : l'intérieur est l'intersection des trois demi-plans, où a, b, c sont > 0 . Pour $P(-3; 2) : a = \frac{7}{8}, b = -\frac{9}{16}, c = \frac{11}{16}, \boxed{P = \text{Bar}\{(A, 14); (B, -9); (C, 11)\}}$: P est du côté de A pour (BC) , du côté de C pour (AB) , mais pas du côté de B pour (CA) : hors du triangle, le long du côté $[CA]$.



■ Corrigé de l'exercice 52

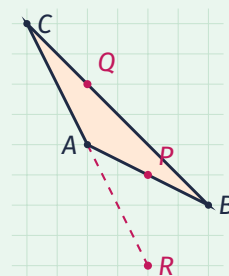
- D'après le cours, $\vec{AG}_m = \frac{1}{m+1}\vec{AB}$ et $\vec{AB}(6;6)$: $G_m\left(1 + \frac{6}{m+1}; -2 + \frac{6}{m+1}\right)$.
- Les coordonnées sont entières si et seulement si $k = \frac{6}{m+1} \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire, pour m entier, si $m+1$ divise 6 : $m \in \{-7, -4, -3, -2, 0, 1, 2, 5\}$, et $G_m(1+k; -2+k)$: $(0; -3), (-1; -4), (-2; -5), (-5; -8), B(7; 4), (4; 1), (3; 0), (2; -1)$.
- $M \in (AB) \iff \det(\vec{AB}, \vec{AM}) = 6(y+2) - 6(x-1) = 0 \iff y = x - 3$: les points entiers sont les $(t; t-3) = (1+k; -2+k)$, avec $k = t-1 \in \mathbb{Z}$. $E(5; 2)$ correspond à $k = 4$, qui ne divise pas 6 ($m = \frac{1}{2}$) : E n'est pas un G_m à m entier ; mais $\vec{AE} = \frac{2}{3}\vec{AB}$: $E = \text{Bar}\{(A, 1); (B, 2)\}$.



- $M_k(1+k; -2+k)$ vérifie $\vec{AM}_k = \frac{k}{6}\vec{AB}$, donc $M_k = \text{Bar}\{(A, 1 - \frac{k}{6}); (B, \frac{k}{6})\} = \text{Bar}\{(A, 6-k); (B, k)\}$: coefficients entiers de somme 6. La restriction de la question 2 venait du coefficient 1 imposé à B .

■ Corrigé de l'exercice 53

- $2\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{OB}$, $3\vec{OQ} = \vec{OB} + 2\vec{OC}$, $-\vec{OR} = \vec{OC} - 2\vec{OA}$. On reporte $\vec{OB} = 2\vec{OP} - \vec{OA}$ et $\vec{OC} = 2\vec{OA} - \vec{OR}$ dans la deuxième : $3\vec{OQ} = 2\vec{OP} + 3\vec{OA} - 2\vec{OR}$, soit $-3\vec{OA} = 2\vec{OP} - 3\vec{OQ} - 2\vec{OR}$ (somme $-3 \neq 0$) : $A = \text{Bar}\{(P, 2); (Q, -3); (R, -2)\}$, d'où $A(1; 1)$, puis $B = 2P - A$ et $C = 2A - R$ en coordonnées : $A(1; 1), B(5; -1), C(-1; 5)$.
Contrôle : $\frac{B+2C}{3} = (1; 3) = Q$ ✓.



- Avec $(1+p)\vec{OP} = \vec{OA} + p\vec{OB}$, $(1+q)\vec{OQ} = \vec{OB} + q\vec{OC}$, $(1+r)\vec{OR} = \vec{OC} + r\vec{OA}$:

$$(1+p)\vec{OP} - p(1+q)\vec{OQ} + pq(1+r)\vec{OR} = \vec{OA} + p\vec{OB} - p\vec{OB} - pq\vec{OC} + pq\vec{OC} + pqr\vec{OA} = (1+pqr)\vec{OA}.$$

Les coefficients ont pour somme $1+pqr$. Si $1+pqr \neq 0$, $A = \text{Bar}\{(P, 1+p); (Q, -p(1+q)); (R, pq(1+r))\}$ est imposé par P, Q, R , et de même B et C (permutation circulaire $A \rightarrow B \rightarrow C, p \rightarrow q \rightarrow r$) : le triangle est **unique**.

- Avec $O = Q$: $(1+p)\vec{QP} + pq(1+r)\vec{QR} = \vec{0}$, où $1+p \neq 0$ et $pq(1+r) \neq 0$ ($pqr = -1$ impose $p, q \neq 0$) : P, Q, R sont alignés (sens direct de Ménélaüs). Par contraposée, pour trois points non alignés et $pqr = -1$, **aucun triangle** ne convient.

- $1+k^3 = (1+k)(k^2 - k + 1)$, avec $1+k \neq 0$ et $k^2 - k + 1 = \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$: c'est **toujours possible**.
En divisant les coefficients par $1+k$: $A = \text{Bar}\{(P, 1); (Q, -k); (R, k^2)\}$. Milieux ($k = 1$) : $\vec{RA} = \vec{QP}$, A est le quatrième sommet du parallélogramme $QPAR$.

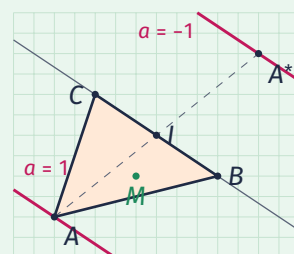
■ Corrigé de l'exercice 54

1. $\det(\vec{AB}, \vec{AC}) = 8 \times 6 - 2 \times 2 = 44$, $\boxed{\mathcal{S} = 22}$; $M\left(\frac{-8+30}{11}; \frac{-4+5+10}{11}\right) = (2; 1)$. Avec $\vec{MA}(-4; -2)$, $\vec{MB}(4; 0)$, $\vec{MC}(-2; 4)$: $\det(\vec{MB}, \vec{MC}) = 16$, $\det(\vec{MC}, \vec{MA}) = 20$, $\det(\vec{MA}, \vec{MB}) = 8$: aires $\boxed{8, 10, 4}$, soit $\frac{4}{11}\mathcal{S}$, $\frac{5}{11}\mathcal{S}$, $\frac{2}{11}\mathcal{S}$: **proportionnelles aux coefficients**.
2. Comme $a + b + c = 1$ et $a\vec{MA} + b\vec{MB} + c\vec{MC} = \vec{0}$: $\vec{MB} = (a + b + c)\vec{MB} - (a\vec{MA} + b\vec{MB} + c\vec{MC}) = a\vec{AB} + c\vec{CB}$, et de même $\vec{MC} = a\vec{AC} + b\vec{BC}$. Par bilinéarité, avec $\det(\vec{CB}, \vec{BC}) = 0$ et $\det(\vec{AB}, \vec{BC}) = \det(\vec{CB}, \vec{AC}) = \det(\vec{AB}, \vec{AC})$ (Chasles) :

$$\det(\vec{MB}, \vec{MC}) = (a^2 + ab + ac) \det(\vec{AB}, \vec{AC}) = \boxed{a \det(\vec{AB}, \vec{AC})}.$$

3. D'où $\text{aire}(MBC) = |a| \mathcal{S}$, et par permutation circulaire $\text{aire}(MCA) = |b| \mathcal{S}$, $\text{aire}(MAB) = |c| \mathcal{S}$. Si M est intérieur, $a, b, c > 0$, donc $a = \frac{\text{aire}(MBC)}{\mathcal{S}}$, etc. : on conclut par homogénéité (facteur $\mathcal{S}$).

4. $M = \text{Bar}\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$ ($a + b + c = 1$) vérifie $\text{aire}(MBC) = \mathcal{S} \iff a = \pm 1$. Si $a = 1$: $c = -b$ et $\vec{AM} = b\vec{AB} + c\vec{AC} = b\vec{CB}$: M décrit la parallèle à (BC) par A . Si $a = -1$: $b + c = 2$ et, comme $A\vec{A}^* = \vec{AB} + \vec{AC}$, $A^*\vec{M} = (b-1)\vec{AB} + (c-1)\vec{AC} = (b-1)\vec{CB}$: M décrit la parallèle à (BC) par A^* . Réciproquement, ces points ont $a = \pm 1$: l'ensemble est la **réunion des parallèles à (BC) passant par A et par A^*** (A^* est le symétrique de A par rapport au milieu I de $[BC]$: ces deux droites sont à la même distance de (BC)).

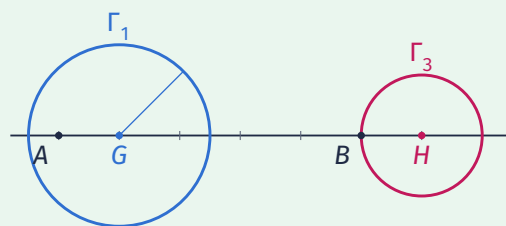


33

Corrigés : lignes de niveau

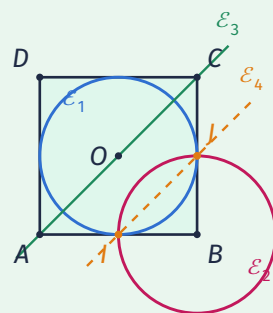
■ Corrigé de l'exercice 55

1. $\vec{AG} = \frac{1}{5}\vec{AB}$: $\boxed{AG = 2}$; $\vec{AH} = \frac{-6}{1-6}\vec{AB} = \frac{6}{5}\vec{AB}$: $\boxed{AH = 12}$, H est au-delà de B ($BH = 2$).
2. On réduit : $4\vec{MA} + \vec{MB} = 5\vec{MG}$ et $\vec{MA} - 6\vec{MB} = -5\vec{MH}$.
 $M \in \Gamma_1 \iff MG = 3$: **cercle de centre G , de rayon 3** ;
 $M \in \Gamma_2 \iff MH = 0$: $\boxed{\Gamma_2 = \{H\}}$; $M \in \Gamma_3 \iff MH = 2$: **cercle de centre H , de rayon 2**.
3. $4\vec{MA} - 4\vec{MB} = 4\vec{BA}$ ne dépend pas de M et $\|4\vec{BA}\| = 40$: **le plan** si $k = 40$, **l'ensemble vide** sinon.
4. $GB = 8 \neq 3$ et $HB = 2$: seul $\boxed{\Gamma_3}$ passe par B . Par l'absurde, si $M \in \Gamma_1 \cap \Gamma_3$, alors $GH \leq GM + MH = 5$, alors que $GH = 12 - 2 = 10$: Γ_1 et Γ_3 sont disjoints.



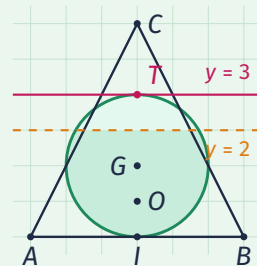
■ Corrigé de l'exercice 56

1. $C(4;4)$; somme 2 : $\left(\frac{0+4+4-0}{2}; \frac{0+0+4-4}{2}\right) = (4;0) = B$ et $\left(\frac{0-4+4+0}{2}; \frac{0-0+4+4}{2}\right) = (0;4) = D$ ✓.
2. Avec O , isobarycentre des sommets, et la question 1 :
 $\mathcal{E}_1$: $4MO = 8$: **cercle** $(O;2)$, qui passe par les milieux des côtés ;
 $\mathcal{E}_2$: $2MB = 4$: **cercle** $(B;2)$, qui passe par I et J ;
 $\mathcal{E}_3$: $2MB = 2MD$: médiatrice de $[BD]$, la **diagonale** (AC) ;
 $\mathcal{E}_4$: $\vec{MA} + \vec{MC} = 2\vec{MO}$, donc $MO = MB$: **médiatrice** de $[OB]$.
3. $M \in \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 \iff (x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ et $(x-4)^2 + y^2 = 4$. Par différence, $4x - 4y - 8 = 0$, soit $y = x - 2$; puis $(x-2)^2 + (x-4)^2 = 4 \iff x^2 - 6x + 8 = 0 \iff x \in \{2, 4\}$: les points communs sont $I(2;0)$ et $J(4;2)$. Or $MO = MB \iff (x-2)^2 + (y-2)^2 = (x-4)^2 + y^2 \iff x - y = 2$: $I, J \in \mathcal{E}_4$, qui est la droite (IJ) .



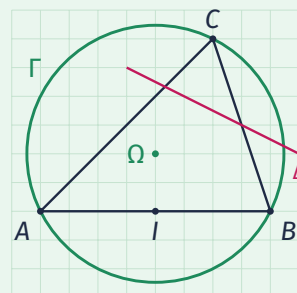
■ Corrigé de l'exercice 57

1. $G(0;1)$, $I(0;-1)$. Comme $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = 3\vec{MG}$, $M \in \mathcal{D} \iff MG \leq 2$: $\mathcal{D}$ est le **disque fermé** de centre G , de rayon 2.
2. $M \in \mathcal{P}_1 \iff MG^2 \geq MC^2 \iff x^2 + (y-1)^2 \geq x^2 + (y-5)^2 \iff 8y \geq 24$: **le demi-plan** $y \geq 3$, de bord la médiatrice de $[GC]$, du côté de C . Si $M \in \mathcal{D} \cap \mathcal{P}_1$: $(y-1)^2 \leq x^2 + (y-1)^2 \leq 4$ donne $y \leq 3$, donc $y = 3$ et $x = 0$; réciproquement $T(0;3)$ convient : $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}_1 = \{T\}$, milieu de $[GC]$.
3. $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$: $M \in \mathcal{P}_2 \iff MI \leq MC \iff 12y \leq 24$: **le demi-plan** $y \leq 2$. $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}_2$ est la partie du disque sous la droite $y = 2$ (en foncé) : O **oui** ($GO = 1$), I **oui** (sur le bord), T **non** ($3 > 2$), A **non** ($GA = \sqrt{13} > 2$).
4. $\vec{MA} - \vec{MB} = \vec{BA}$ et $BA = 6$: la condition s'écrit $3MG \leq 6$, c'est $\mathcal{D}$. Enfin $3 \leq 3MG \leq 6 \iff 1 \leq MG \leq 2$: la **couronne** entre les cercles de centre G de rayons 1 et 2 (O est sur le cercle intérieur).



■ Corrigé de l'exercice 58

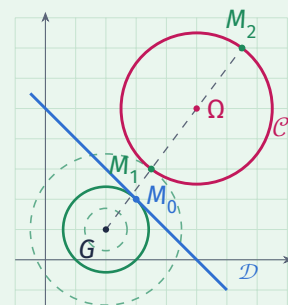
1. $\Omega A^2 = \Omega B^2 = 16 + 4 = 20$ et $\Omega C^2 = 4 + 16 = 20$: Ω est équidistant des sommets, c'est le centre de Γ , et $R = 2\sqrt{5}$.
2. Ordonnées : $\frac{6c}{12} = 2$, $c = 4$; abscisses : $-4a + 4b + 8 = 0$; avec $a + b = 8$: $a = 5$, $b = 3$, $c = 4$.
3. $5\vec{MA} + 3\vec{MB} + 4\vec{MC} = 12\vec{M\Omega}$, et $12M\Omega = 24\sqrt{5} \iff M\Omega = R$. Pour $M = C$: $5\vec{CA} + 3\vec{CB} = 5(-6; -6) + 3(2; -6) = (-24; -48)$, de norme $\sqrt{2880} = 24\sqrt{5}$ ✓.
4. $M \in \Delta \iff M\Omega = MC$: médiatrice de $[\Omega C]$; $x^2 + (y-2)^2 = (x-2)^2 + (y-6)^2 \iff x + 2y - 9 = 0$.



5. a) $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$ et $IC = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$: $k = 4\sqrt{10}$. b) Par l'absurde. Avec $K = \text{Bar}\{(A, \alpha); (B, \beta)\} \in (AB)$, l'ensemble est $\{M : |\alpha + \beta| MK = k\}$: un cercle de centre K , un point ou le vide. S'il était égal à Γ , K serait équidistant de A, B, C , donc égal à Ω ; or $\Omega \notin (AB)$ ($y_\Omega \neq 0$) : contradiction. Γ est une ligne de niveau de A, B, C , pas de A et B seuls.

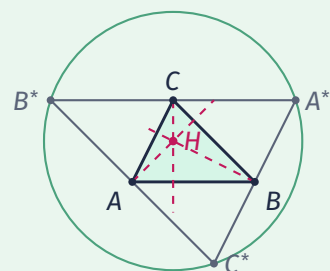
■ Corrigé de l'exercice 59

1. $3 + 1 - 2 = 2 \neq 0$: $3\vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC} = 2\vec{MG}$, avec $x_G = \frac{3+5-4}{2}$, $y_G = \frac{9-1-6}{2}$: $f(M) = 2MG$, $G(2; 1)$. La ligne de niveau $f = k$ est le cercle de centre G et de rayon $\frac{k}{2}$ ($k > 0$), ou $\{G\}$ ($k = 0$).
2. a) $f(M)^2 = 4[(t-2)^2 + (4-t)^2] = 8t^2 - 48t + 80$.
 b) $f(M)$ et k étant positifs, $f(M) = k \iff 8t^2 - 48t + 80 - k^2 = 0$, de discriminant $\Delta = 32(k^2 - 8)$: **aucun** point commun si $k < 2\sqrt{2}$, **un seul** ($t = 3$) si $k = 2\sqrt{2}$, **deux** si $k > 2\sqrt{2}$.
 c) Sur $\mathcal{D}$, f prend exactement les valeurs $k \geq 2\sqrt{2}$: le minimum de f sur $\mathcal{D}$ est $2\sqrt{2}$, atteint en $M_0(3; 2)$ seulement (contrôle : $8(t-3)^2 + 8 \geq 8$). Le cercle de niveau de rayon $\sqrt{2}$ touche $\mathcal{D}$ en M_0 seulement : il lui est **tangent** ; les cercles plus petits ne la rencontrent pas.
3. a) $\Omega G = \sqrt{9+16} = 5$ et $\Omega M = \frac{5}{2}$; l'inégalité triangulaire donne $\Omega G \leq \Omega M + MG$, soit $MG \geq \frac{5}{2}$, et $MG \leq M\Omega + \Omega G = \frac{15}{2}$.
 b) Donc $5 \leq f \leq 15$ sur $\mathcal{C}$. L'égalité $\Omega G = \Omega M + MG$ a lieu si et seulement si $M \in [\Omega G]$: comme $\Omega M = \frac{1}{2}\Omega G$, c'est le milieu $M_1(\frac{7}{2}; 3)$, où f atteint son minimum 5 ; l'égalité $MG = M\Omega + \Omega G$ a lieu si et seulement si $\Omega \in [MG]$: c'est le symétrique de M_1 par rapport à Ω , $M_2(\frac{13}{2}; 7)$, où f atteint son maximum 15 . Les cercles de niveau $f = 5$ et $f = 15$ sont tangents à $\mathcal{C}$ en M_1 et M_2 (sur la figure, cercles de niveau de rayons $0,7, \sqrt{2}$ et $2,5$).



■ Corrigé de l'exercice 60

1. Les sommes valent 1 : $\vec{OA}^* = -\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$, $\vec{OB}^* = \vec{OA} - \vec{OB} + \vec{OC}$. Donc $\vec{OA}^* + \vec{OB}^* = 2\vec{OC}$: **C est le milieu de $[A^*B^*]$** , et $\vec{A}^*\vec{B}^* = 2\vec{OA} - 2\vec{OB} = 2\vec{BA}$. De même, A est le milieu de $[B^*C^*]$ avec $\vec{B}^*\vec{C}^* = 2\vec{CB}$, et B celui de $[C^*A^*]$ avec $\vec{C}^*\vec{A}^* = 2\vec{AC}$.
2. Les deux sommes se réduisent en $\vec{MA}^*$ et $\vec{MB}^*$: $M \in \Delta_C \iff MA^* = MB^*$. Δ_C est la médiatrice de $[A^*B^*]$, perpendiculaire à (A^*B^*) en son milieu C ; comme $(A^*B^*) \parallel (AB)$, c'est **la hauteur issue de C** . De même Δ_A (égalité $MB^* = MC^*$, soit $\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC}\|$) est la hauteur issue de A , et Δ_B ($MC^* = MA^*$) celle issue de B .
3. Δ_A et Δ_B , perpendiculaires aux droites sécantes (BC) et (CA) , se coupent en un point H : $HB^* = HC^* = HA^*$, donc $H \in \Delta_C$: **les trois hauteurs concourent en H** . Les égalités demandées s'écrivent $MA^* = MB^* = MC^*$, soit $M \in \Delta_C \cap \Delta_A$: l'ensemble est $\{H\}$.

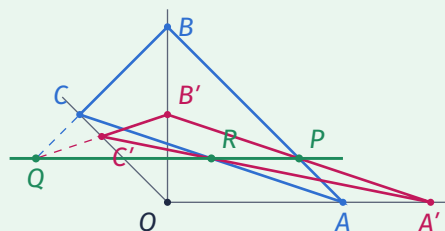


4. $A^*(6;4), B^*(-6;4), C^*(2;-4)$ ($A^* = B + C - A$, etc.). $MA^* = MB^* \iff (x-6)^2 = (x+6)^2 \iff x = 0$;
 $MB^* = MC^* \iff (x+6)^2 + (y-4)^2 = (x-2)^2 + (y+4)^2 \iff x - y + 2 = 0$: $H(0;2)$, et
 $HA^{*2} = HB^{*2} = HC^{*2} = 40$: $HA^* = HB^* = HC^* = 2\sqrt{10}$ ✓. Enfin $\|-\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = MA^*$: l'ensemble
 est le **cercle de centre A^* passant par H** .

34 Corrigés : défis de concours

■ Corrigé de l'exercice 61

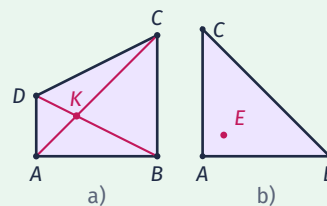
- $O \in (AA')$, ensemble des barycentres de A et A' : $O = \text{Bar}\{(A, \alpha); (A', \alpha')\}$, $\alpha + \alpha' \neq 0$, et l'on divise par $\alpha + \alpha'$. De même pour b, c . Les sommes valent 1 : les trois vecteurs sont égaux à $\vec{MO}$.
- D'après 1, $a\vec{MA} - b\vec{MB} = (a-1)\vec{MA}' + (1-b)\vec{MB}'$; les deux membres ont la somme $a-b \neq 0$ et valent $(a-b)\vec{MP}$ et $(a-b)\vec{MP}'$, avec $P' = \text{Bar}\{(A', a-1); (B', 1-b)\}$: $P = P'$, point de (AB) et de $(A'B')$. Ces droites sont distinctes (sinon $(AA') = (BB')$) : elles se coupent en P . Si $a = b$: $a\vec{BA} = (1-a)\vec{A'B'}$ avec $a \neq 0, a \neq 1$ ($O \neq A', O \neq A$) : $(AB) \parallel (A'B')$.
- $(a-b)\vec{MP} = a\vec{MA} - b\vec{MB}$, $(b-c)\vec{MQ} = b\vec{MB} - c\vec{MC}$, $(c-a)\vec{MR} = c\vec{MC} - a\vec{MA}$: la somme est nulle. Pour $M = R$: $(a-b)\vec{RP} + (b-c)\vec{RQ} = \vec{0}$ avec $a-b \neq 0$: P, Q, R sont alignés.
- $3\vec{OA} - 2\vec{OA}' = \vec{0}$, $-\vec{OB} + 2\vec{OB}' = \vec{0}$ et $-3\vec{OC} + 4\vec{OC}' = \vec{0}$:
 $a = 3, b = -1, c = -3$. Donc $P = \text{Bar}\{(A, 3); (B, 1)\}$,
 $Q = \text{Bar}\{(B, -1); (C, 3)\}$ et $R = \text{Bar}\{(C, -3); (A, -3)\}$,
 soit $P(3;1), Q(-3;1), R(1;1)$: tous sur la droite $y = 1$ ✓.



■ Corrigé de l'exercice 62

- Si $\vec{AB}, \vec{AC}$ sont colinéaires, il existe $(\beta, \gamma) \neq (0, 0)$ avec $\beta\vec{AB} + \gamma\vec{AC} = \vec{0}$; on prend $\delta = 0$. Sinon $\vec{AD} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$ et l'on prend $(\beta, \gamma, \delta) = (x, y, -1)$. Avec $\alpha = -(\beta + \gamma + \delta)$: $\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} + \gamma\vec{MC} + \delta\vec{MD} = (\alpha + \beta + \gamma + \delta)\vec{MA} + \beta\vec{AB} + \gamma\vec{AC} + \delta\vec{AD} = \vec{0}$.
- Des réels ≥ 0 de somme nulle sont tous nuls : il y a un coefficient > 0 et un < 0 . Soit $s > 0$ la somme des coefficients positifs (celle des négatifs vaut $-s$). En passant les termes négatifs dans l'autre membre, les deux membres ont la somme s et s'écrivent $s\vec{MK} = s\vec{MK'}$: $K = K'$.
- a) Si $\delta = 0$: $\alpha + \beta + \gamma = 0$ et, pour $M = A$, $\beta\vec{AB} + \gamma\vec{AC} = \vec{0}$ avec $(\beta, \gamma) \neq (0, 0)$: A, B, C seraient alignés. Donc $\delta \neq 0$, et de même pour les autres. Pour une autre relation $(\alpha', \beta', \gamma', \delta')$, la relation $\delta \times (\text{seconde}) - \delta' \times (\text{première})$ ne contient plus D : c'est une relation de somme nulle entre A, B, C , donc nulle (même argument), et la seconde est la première multipliée par $\frac{\delta'}{\delta}$.
 b) Quitte à multiplier par -1 , il y a un ou deux coefficients positifs. Un seul, celui de D par exemple : $D = K$ est barycentre de A, B, C à coefficients > 0 , **intérieur au triangle ABC** . Deux, ceux de A et C par exemple : $K = \text{Bar}\{(A, \alpha); (C, \gamma)\} = \text{Bar}\{(B, -\beta); (D, -\delta)\}$ est **intérieur à $[AC]$ et à $[BD]$** . Chaque situation fournit une relation de l'un de ces deux types ; la relation étant unique à un facteur près, **un seul cas** se produit.

4. a) $\vec{AD}(0; 2) = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$, soit $-2\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC} + 2\vec{MD} = \vec{0}$: deux coefficients positifs, ceux de B et D. Le point $K\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right)$, égal à $\text{Bar}\{(B, 1); (D, 2)\}$ et à $\text{Bar}\{(A, 2); (C, 1)\}$, est commun à $[AC]$ et $[BD]$: $ABCD$ est convexe.
- b) $\vec{AE}(1; 1) = \frac{1}{6}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{AC}$, soit $4\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} - 6\vec{ME} = \vec{0}$: un seul négatif ; $E = K = \text{Bar}\{(A, 4); (B, 1); (C, 1)\}$ est intérieur au triangle ABC .



■ Corrigé de l'exercice 63

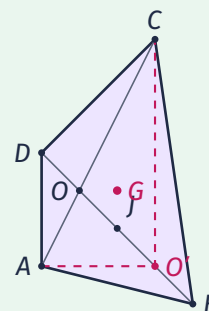
1. Soit H, L les projetés orthogonaux de A, C sur (BD) : $\frac{\text{aire}(ABD)}{\text{aire}(CBD)} = \frac{\frac{1}{2}BD \times AH}{\frac{1}{2}BD \times CL} = \frac{AH}{CL}$. Or $(AH) \parallel (CL)$ et $O = (AC) \cap (HL)$: par Thalès, $\frac{AH}{CL} = \frac{OA}{OC}$ (si $(AC) \perp (BD)$, $H = L = O$, c'est immédiat).
2. Soit $p = OA, q = OC$, et G_1, G_2 les centres de gravité de ABD, CBD . Par (P2), 1 et l'homogénéité, $G = \text{Bar}\{(G_1, p); (G_2, q)\}$:

$$3(p + q)\vec{MG} = p(\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MD}) + q(\vec{MC} + \vec{MB} + \vec{MD}) = p\vec{MA} + q\vec{MC} + (p + q)(\vec{MB} + \vec{MD}).$$

Or $q\vec{OA} + p\vec{OC} = \vec{0}$, donc $q\vec{MA} + p\vec{MC} = (p + q)\vec{MO}$ et $p\vec{MA} + q\vec{MC} = (p + q)(\vec{MA} + \vec{MC} - \vec{MO})$: après division par $p + q$, $3\vec{MG} = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + \vec{MD} - \vec{MO}$. Avec J milieu de $[BD]$: $\vec{MB} + \vec{MD} - \vec{MO} = 2\vec{MJ} - \vec{MO} = \vec{MO}'$, où $O' = \text{Bar}\{(J, 2); (O, -1)\}$ vérifie $\vec{JO}' = -\vec{JO}$: c'est le symétrique de O par rapport à J , et $3\vec{MG} = \vec{MA} + \vec{MC} + \vec{MO}'$: G est le centre de gravité de ACO' .

3. Soit K l'isobarycentre des sommets : $3\vec{MG} = 4\vec{MK} - \vec{MO}$, et, avec $M = K, G = K \iff O = K$. Soit U, V les milieux de $[AC], [BD]$: K est le milieu de $[UV]$. Pour un parallélogramme, $U = V = O = K$. Réciproquement, si $O = K$ et, par l'absurde, $U \neq V$: $K \neq U$ sont sur (AC) , donc $(AC) = (UV)$ et $V \in (AC) \cap (BD) = \{K\}$, impossible pour le milieu de $[UV]$. Donc $U = V$: $ABCD$ est un parallélogramme.

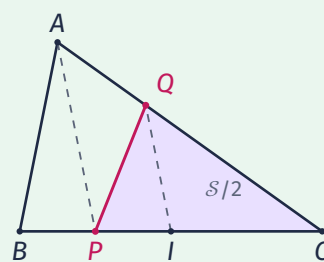
4. $(AC) : y = 2x, (BD) : x + y = 3, O(1; 2), J(2; 1), O'(3; 0), G(2; 2)$. Selon $[AC]$: $\text{aire}(ABC) = \frac{27}{2}, \text{aire}(ACD) = \frac{9}{2}$ (exercice 54), centres $\left(\frac{7}{3}; \frac{5}{3}\right)$ et $(1; 3)$, poids 3 et 1 : $\left(\frac{7+1}{4}; \frac{5+3}{4}\right) = (2; 2)$ ✓. L'isobarycentre $\left(\frac{7}{4}; 2\right)$ est différent : ce n'est pas un parallélogramme.



■ Corrigé de l'exercice 64

1. $\det(\vec{CM}, \vec{CN}) = mn \det(\vec{CB}, \vec{CA})$, donc $\text{aire}(CMN) = mn \mathcal{S}$ (formule de l'exercice 54).

2. Posons $\vec{CQ} = u\vec{CA}$. $(IQ) \parallel (AP)$ s'écrit $\vec{CQ} - \vec{CI} = s(\vec{CP} - \vec{CA})$, soit $(u + s)\vec{CA} = \left(\frac{1}{2} + st\right)\vec{CB}$; $\vec{CA}, \vec{CB}$ n'étant pas colinéaires, $u = -s$ et $st = -\frac{1}{2}$: $\vec{CQ} = \frac{1}{2t}\vec{CA}$, avec $\frac{1}{2t} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, donc $Q \in [CA]$. Par 1, $\text{aire}(CPQ) = t \times \frac{1}{2t} \mathcal{S} = \frac{\mathcal{S}}{2}$: CPQ et $ABPQ$ ont la même aire.



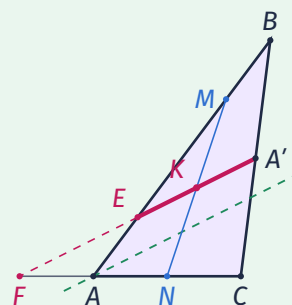
3. $t = \frac{3}{4}$, $\vec{CQ} = \frac{2}{3}(-7; 5)$; $Q\left(\frac{10}{3}; \frac{10}{3}\right)$; $\det(\vec{IQ}, \vec{AP}) = \begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & -5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{10}{3}$;
 $\frac{10}{3} \times 1 = 0$ ✓, $\text{aire}(CPQ) = \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{10}{3} = 10 = \frac{20}{2}$ ✓.

4. Le même calcul avec $\frac{1}{3}\vec{CB}$ puis $\frac{2}{3}\vec{CB}$ au lieu de $\vec{CI} = \frac{1}{2}\vec{CB}$ donne $C\vec{Q}_1 = \frac{1}{3t}\vec{CA}$ et $C\vec{Q}_2 = \frac{2}{3t}\vec{CA}$, avec $\frac{2}{3t} \leq 1$ car $t \geq \frac{2}{3}$: $Q_1, Q_2 \in [CA]$. Alors $\text{aire}(CPQ_1) = \frac{s}{3}$, $\text{aire}(CPQ_2) = \frac{2s}{3}$, et les parties $CPQ_1, PQ_1Q_2, ABPQ_2$ ont pour aires $\frac{s}{3}, \frac{2s}{3} - \frac{s}{3}, s - \frac{2s}{3}$: **elles sont égales.**

■ Corrigé de l'exercice 65

1. $\vec{BM} = \frac{\lambda}{c}\vec{BA}$, donc M est le barycentre de $(B, 1 - \frac{\lambda}{c})$ et $(A, \frac{\lambda}{c})$, soit de $(B, c - \lambda)$ et (A, λ) ; de même pour N . Comme $A\vec{B} + A\vec{C} = \vec{0}$: $A\vec{K} = \frac{1}{2} (A\vec{B} + B\vec{M} + A\vec{C} + C\vec{N}) = \boxed{\frac{\lambda}{2} (\vec{u} + \vec{v})}$.

2. $\vec{u} + \vec{v} \neq \vec{0}$; quand λ décrit $[0, b]$, K décrit le **segment** $[A'E]$, E correspondant à $\lambda = b : N = A$, $AM = c - b$ et E est le milieu de $[AM] : E \in [AB]$, $AE = \frac{c-b}{2}$.



Bissectrice en vert ; ici $\lambda = \frac{5}{2}$.

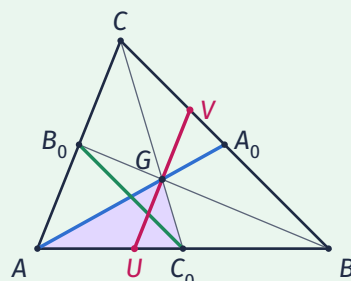
4. Dans la base $(\vec{AB}, \vec{AC})$: $\vec{AA'} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$, $\vec{u} = -\frac{1}{c}\vec{AB}$, $\vec{v} = -\frac{1}{b}\vec{AC}$, et le point $A' + s(\vec{u} + \vec{v})$ vérifie $\vec{AF} = \left(\frac{1}{2} - \frac{s}{c}\right)\vec{AB} + \left(\frac{1}{2} - \frac{s}{b}\right)\vec{AC}$: il est sur (AC) si et seulement si $s = \frac{c}{2}$, et alors $\vec{AF} = -\frac{c-b}{2b}\vec{AC}$: F est au-delà de A sur (CA) et $AF = \frac{c-b}{2} = AE$. Donc $BE = c - \frac{c-b}{2}$ et $CF = b + \frac{c-b}{2}$: $BE = CF = \frac{b+c}{2}$.

5. $c = 10, b = 5$: $A' \left(\frac{11}{2}; 4 \right)$, $\vec{u} + \vec{v} = \left(-\frac{3}{5} - 1; -\frac{4}{5} \right)$, $E = A' + \frac{5}{2}(\vec{u} + \vec{v}) = \left(\frac{3}{2}; 2 \right)$, $F = A' + 5(\vec{u} + \vec{v}) = \left(-\frac{5}{2}; 0 \right)$;
 $BE = \sqrt{\frac{81}{4} + 36} = \frac{15}{2} = CF$ ✓.

■ Corrigé de l'exercice 66

1. Pour M dans le triangle, ses coefficients normalisés a, b, c sont ≥ 0 et l'exercice 54 donne $S_A = aS, S_B = bS, S_C = cS$: somme S , et $M = \text{Bar}\{(A, S_A); (B, S_B); (C, S_C)\}$ par homogénéité. Si $S_A = 2S_B = 3S_C$, les aires sont proportionnelles à 6, 3, 2 : $M = \text{Bar}\{(A, 6); (B, 3); (C, 2)\}$.

2. On écrit $M = \text{Bar}\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$, $a + b + c = 1$, $a, b, c \geq 0$.
 a) $b = c \iff M = \text{Bar}\{(A, a); (A_0, 2b)\}$: la médiane $[AA_0]$.
 b) $a = b + c \iff a = \frac{1}{2} \iff M = \text{Bar}\{(C_0, 2b); (B_0, 2c)\}$ avec $2b + 2c = 1$: le segment $[C_0B_0]$. c) $S_A + S_C = 2S_B \iff b = \frac{1}{3} \iff M = \text{Bar}\{(U, \frac{3a}{2}); (V, \frac{3c}{2})\}$, où $U = \text{Bar}\{(A, 2); (B, 1)\}$ et $V = \text{Bar}\{(C, 2); (B, 1)\}$: le segment $[UV]$, parallèle à (AC) et passant par G .



a) bleu, b) vert, c) rouge ; AC_0G en violet.

3. Si $a \geq b \geq c \geq 0$: $M = \text{Bar}\{(A, a - b); (C_0, 2(b - c)); (G, 3c)\}$ (coefficients ≥ 0 de somme 1), donc $M \in AC_0G$; réciproquement $\text{Bar}\{(A, x); (C_0, y); (G, z)\}$ ($x, y, z \geq 0$) a pour coefficients $a = x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} \geq b = \frac{y}{2} + \frac{z}{3} \geq c = \frac{z}{3} \geq 0$. Comme $\vec{C_0G} = \frac{1}{3}\vec{C_0C}$, $\text{aire}(AC_0G) = \frac{1}{3} \text{aire}(AC_0C) = \frac{S}{6}$. Les six ordres de S_A, S_B, S_C donnent de même les six triangles découpés par les médianes : ils ont tous l'aire $\frac{S}{6}$.
4. Pour M quelconque, les aires sont $|a|S, |b|S, |c|S$, avec $a + b + c = 1$: il faut $|a| = |b| = |c| = t > 0$. Trois signes + : $t = \frac{1}{3}$, c'est G ; deux +, un - : $t = 1$, d'où $(-1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, -1)$; au plus un + : somme < 0 . Quatre points : G, A^*, B^*, C^* (exercice 60).

Corrigé du test d'entrée

Barème : 1 point par réponse juste et justifiée, $\frac{1}{2}$ point si une seule des deux parties est juste. Reporte tes points bloc par bloc dans la case score de la page 4.

Bloc 1 · Vecteurs et Chasles

- ① $\vec{u} = \vec{AD}$ et $\vec{MB} - \vec{MA} + \vec{BC} = \vec{AC}$.
 $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}$;
 $\vec{MB} - \vec{MA} = \vec{AM} + \vec{MB} = \vec{AB}$.
- ② $\vec{AM} = \frac{3}{4}\vec{AB}$; $AM = 6$ cm.
 $\vec{AM} = 3\vec{MA} + 3\vec{AB}$ donne
 $4\vec{AM} = 3\vec{AB}$.
- ③ $\vec{AF} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{AE}$:
alignés. Chasles :
 $\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{BF}$; F est le milieu de $[AE]$.
- ④ $\vec{AN} = \frac{1}{4}\vec{AM}$; **seul** $M = A$.
Avec $P = f(M)$: $\vec{AP} = \frac{1}{2}\vec{AM}$
et $\vec{AN} = \frac{1}{2}\vec{AP}$;
 $\frac{1}{2}\vec{AM} = \vec{AN} \iff \vec{AM} = \vec{0}$.

Bloc 2 · Repère et coordonnées

- ⑤ $\vec{AB}(6; -6)$, $\vec{I}(2; -5)$,
 $\vec{D}(1; -4)$. $\vec{AD}(2; -2)$, donc
 $\vec{D}(-1 + 2; -2 - 2)$.
- ⑥ **Oui** ; $m = 2$. $\vec{KL}(4; -12)$,
 $\vec{KR}(-1; 3)$:
 $\det = 12 - 12 = 0$;
 $\det(\vec{KL}, \vec{KS}) = 12m - 24$.
- ⑦ $2x - 3y - 8 = 0$; $x = 1 + 3t$,
 $y = -2 + 2t$ ($t \in \mathbb{R}$).
 $\det(\vec{AM}, \vec{u}) =$
 $2(x - 1) - 3(y + 2)$.
- ⑧ $AB = AC = 5$: **oui**.
 $AB = \sqrt{3^2 + 4^2}$,
 $AC = \sqrt{(-4)^2 + 3^2}$; le rayon
est AB .

Bloc 3 · Géométrie du triangle

- ⑨ $AG = 6$ cm, $GA' = 3$ cm,
 $k = 2$. $\vec{AG} = \frac{2}{3}\vec{AA'} = 2\vec{GA'}$.
- ⑩ $IJ = 3,5$. $\vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AJ} =$
 $\frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{AC} = \frac{1}{2}\vec{BC}$.
- ⑪ **Oui** ; $MN = 5$.
 $\frac{AM}{AB} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{AN}{AC}$, même
ordre (réciproque de
Thalès) ; $MN = \frac{2}{3} \times 7,5$.
- ⑫ **La médiatrice de $[AB]$;
puis un seul point : le
centre du cercle
circonscrit**. Intersection
des médiatrices de $[AB]$ et
 $[BC]$.

Ton orientation

les renvois sont cliquables dans le PDF

1. Selon ton score total : par où commencer, quels exercices faire en priorité.

0 à 5
bases à revoir

Commence par tes erreurs (ce corrigé sert de rappel), puis le cours pas à pas, sections 1 à 3 d'abord (avec l'encadré des rappels du tronc commun). **En priorité** : le niveau 1, **exercices 1 à 8**, p. 22 ; puis **exercice 32**, p. 28 et **exercice 37**, p. 30. Refais le test dans une semaine.

6 à 9
bon départ

Commence par le cours complet (sections 1 à 10), méthodes comprises, puis les pièges (section 12). **En priorité** : le niveau 2, **exercices 9 à 16**, p. 23 ; puis les thèmes B et D, **exercices 37 à 42**, p. 30 et **49 à 54**, p. 33.

10 à 12
cap concours

Commence par le cours (sections 1 à 10 en lecture rapide), puis les sections 11 à 13. **En priorité** : le niveau 3, **exercices 17 à 23**, p. 25 ; les thèmes C et E, **exercices 43 à 48**, p. 31 et **55 à 60**, p. 35 ; puis le niveau 4, **exercices 24 à 30**, p. 26, et le thème F, **61 à 66**, p. 36.

2. Selon ton bloc le plus faible (2 points sur 4 ou moins) : fais d'abord sa case, puis ta ligne ci-dessus.

Bloc 1 · Vecteurs et Chasles

Relis : les rappels de la section 1, puis les sections 2 et 3 du cours.
Fais : **exercice 2**, p. 22, **exercice 4**, p. 22, **exercice 7**, p. 23 et **exercice 38**, p. 30.

Bloc 2 · Repère et coordonnées

Relis : le déterminant (section 1), puis les sections 4 et 5 du cours.
Fais : **exercice 5**, p. 23, **exercice 8**, p. 23, **exercice 49**, p. 33 et **exercice 50**, p. 33.

Bloc 3 · Géométrie du triangle

Relis : les sections 6, 7 et 10 du cours.
Fais : **exercice 6**, p. 23, **exercice 43**, p. 31, **exercice 44**, p. 32 et **exercice 58**, p. 35.

Mon bilan sur le chapitre

Partie B · Le parcours en 4 niveaux

Niveau	Exercices	Réussis seul(e)	À refaire
Niveau 1 · Bases ★	1 à 8	/ 8	
Niveau 2 · Bac ★★	9 à 16	/ 8	
Niveau 3 · Approfondissement ★★★	17 à 23	/ 7	
Niveau 4 · Concours ★★★★	24 à 30	/ 7	

Partie C · La banque d'exercices

Thème	Exercices	Réussis seul(e)	À refaire
Thème A · Barycentre de deux points	31 à 36	/ 6	
Thème B · Trois points et plus	37 à 42	/ 6	
Thème C · Associativité et alignement	43 à 48	/ 6	
Thème D · Coordonnées du barycentre	49 à 54	/ 6	
Thème E · Lignes de niveau	55 à 60	/ 6	
Thème F · Défis de concours	61 à 66	/ 6	

Conseil : refais dans une semaine les exercices ratés, sans regarder le corrigé.

Prochain chapitre : *Le produit scalaire*

Maths Olympiad