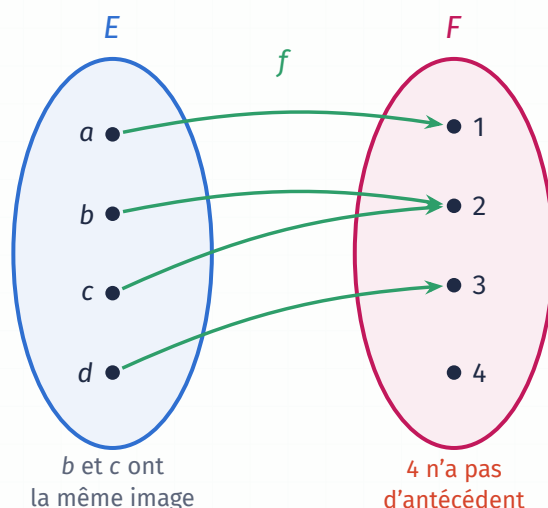


Chapitre 3

Les applications

Du niveau de base au niveau concours

À connaître par cœur $f : E \rightarrow F$ est bijective $\iff$
 $\forall y \in F, \exists! x \in E, f(x) = y$
 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ *Défi de concours*Existe-t-il $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que
 $f(f(n)) = n + 2027$ pour tout n ?Chaque élément de E a exactement une image dans F

★★★★ Niveau 4 · Concours

★★★ Niveau 3 · Approfondissement

★★ Niveau 2 · Bac

★ Niveau 1 · Bases

Cours complet

Méthodes et pièges

66 exercices corrigés

Test d'entrée

Sommaire

Test d'entrée : par où commencer ?	4	18 Niveau 4 · Concours	27
1 Notion d'application	5	19 Images et antécédents	29
2 Égalité, restriction, prolongement	6	20 Image directe et réciproque	31
3 Image directe d'une partie	7	21 Injections et surjections	33
4 Image réciproque d'une partie	8	22 Bijections et réciproques	34
5 Applications injectives	10	23 Composition	36
6 Applications surjectives	11	24 Défis de concours	37
7 Applications bijectives	12	25 Corrigés du niveau 1	40
8 La bijection réciproque	14	26 Corrigés du niveau 2	42
9 La composition	15	27 Corrigés du niveau 3	45
10 Composition et propriétés	16	28 Corrigés du niveau 4	47
11 Pour aller plus loin	18	29 Corrigés : images et antécédents	50
12 Les pièges classiques	19	30 Corrigés : images de parties	54
13 Les astuces des concours	20	31 Corrigés : injections, surjections	57
14 L'essentiel du chapitre en une page	22	32 Corrigés : bijections	60
15 Niveau 1 · Bases	23	33 Corrigés : composition	63
16 Niveau 2 · Bac	24	34 Corrigés : défis de concours	66
17 Niveau 3 · Approfondissement	26	Corrigé du test d'entrée	69

Comment utiliser ce livret

Les 4 niveaux d'exercices

Niveau 1 · Bases ★

les automatismes indispensables.

Niveau 2 · Bac ★★

le niveau des devoirs surveillés.

Niveau 3 · Approfondissement ★★★

pour viser la mention Très bien.

Niveau 4 · Concours ★★★★★

problèmes de concours (classes préparatoires, écoles d'ingénieurs).

Les encadrés du cours

Définition : à savoir par cœur.

Propriété / Théorème : les outils.

Méthode : la démarche pas à pas.

Exemple : un calcul entièrement rédigé.

Piège : l'erreur classique à éviter.

Astuce de concours ★ : le petit plus qui fait gagner du temps.

Ce livret est « intelligent » : commence par le **test d'entrée** (page 4) ; en 15 minutes, il t'indique par où commencer et quels exercices faire en priorité. Le livret contient 66 exercices corrigés : la partie B est un parcours en 4 niveaux (exercices 1 à 30) ; la partie C est une banque de 36 exercices classés par thème (Images et antécédents, Image directe et réciproque, Injections et surjections, Bijections et réciproques, Composition, Défis de concours). Tous les corrigés sont regroupés dans la partie D.

Conseil : cherche chaque exercice au moins 10 minutes avant de lire le corrigé. Le numéro de page du corrigé est indiqué à droite de chaque énoncé (il est cliquable dans le PDF).

La carte du chapitre



À la fin du chapitre, je sais...

- | | |
|---|---|
| ☐ reconnaître une application (diagramme, courbe) ; | ☐ démontrer qu'elle est surjective, ou non ; |
| ☐ calculer des images et des antécédents ; | ☐ étudier une bijection en résolvant $f(x) = y$; |
| ☐ comparer deux applications, restreindre, prolonger ; | ☐ calculer f^{-1} et tracer sa courbe ; |
| ☐ calculer $f(A)$ par double inclusion ; | ☐ composer, trouver le domaine d'une composée ; |
| ☐ calculer $f^{-1}(B)$ en résolvant « $f(x) \in B$ » ; | ☐ utiliser $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ et $g \circ f = \text{Id}$; |
| ☐ utiliser $f(A \cup A')$, $f^{-1}(B \cap B')$, etc. ; | ☐ reconnaître et utiliser une involution ; |
| ☐ démontrer qu'une application est injective ; | ☐ raisonner sur des ensembles finis (tiroirs). |

Test d'entrée : par où commencer ?

 15 minutes

 Sans calculatrice

+1 1 point par question

 Réponses sur ta feuille

Avant d'ouvrir le cours, fais le point : les blocs 1 et 2 vérifient les bases du tronc commun dont le chapitre se sert sans cesse, le bloc 3 tes acquis des **chapitres 1 et 2**. Aucune question ne demande le cours de ce chapitre. Corrigé et orientation : **page 69**.

Bloc 1 · Calculs sur les fonctions

___ / 4

① **Calculer des images** Pour $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$, calculer $f(-2)$, $f(\frac{1}{3})$ et $f(\sqrt{2})$.

② **Fonction affine** f est affine, $f(1) = 4$ et $f(3) = -2$. Donner $f(x)$, puis le réel x tel que $f(x) = 10$.

③ **Fonction homographique** Pour $g(x) = \frac{x+3}{2x-1}$: pour quels réels x le nombre $g(x)$ existe-t-il ? Résoudre $g(x) = 1$, puis $g(x) = \frac{1}{2}$.

④ **Deux calculs enchaînés** A : « ajouter 3, puis inverser » ; B : « inverser, puis ajouter 3 ». (a) Appliquer A et B à 1. (b) Quel nombre de départ rend A impossible ? et B ?

Bloc 2 · Équations et intervalles

___ / 4

⑤ **Second degré** Résoudre dans $\mathbb{R}$: (a) $2x^2 = 3x + 2$; (b) $x^2 - x + 2 = 0$.

⑥ **Inéquation** Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\frac{2-x}{x+5} \geq 0$; écrire les solutions avec des intervalles.

⑦ **Encadrement** On sait que $2 \leq x \leq 5$. Encadrer $\frac{1}{x}$, puis $3 - \frac{1}{x}$.

⑧ **Équation à paramètre** Pour quels réels k l'équation $x^2 - 8x = k$ a-t-elle au moins une solution ? exactement une ?

Bloc 3 · Logique et ensembles (chapitres 1 et 2)

___ / 4

⑨ **Quantificateurs** P : « $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, 4x + 1 = y$ » et Q : « $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, 4x + 1 = y$ ». (a) Laquelle est vraie ? (b) Écrire la négation de Q.

⑩ **Contraposée** Écrire la contraposée de « pour tous réels x et y , si $x \neq 1$ et $y \neq 1$, alors $x + y - xy \neq 1$ », puis la démontrer.

⑪ **Opérations ensemblistes** $A = [-1, 4]$ et $B =]2, 6[$. Écrire $A \cap B$, $A \cup B$ et $C_{\mathbb{R}}^A$ à l'aide d'intervalles.

⑫ **Produit cartésien** $E = \{2, 3, 5\}$. Combien d'éléments a $E \times E$? Lister les couples (x, y) de $E \times E$ tels que $x < y$.

Temps écoulé ?

Pose le crayon, compte tes points bloc par bloc et corrige-toi **page 69**.

Bloc 1

___ / 4

+

Bloc 2

___ / 4

+

Bloc 3

___ / 4

=

Mon score

___ / 12

Partie A • Le cours

Définitions, théorèmes, méthodes, pièges et astuces de concours

1 Notion d'application

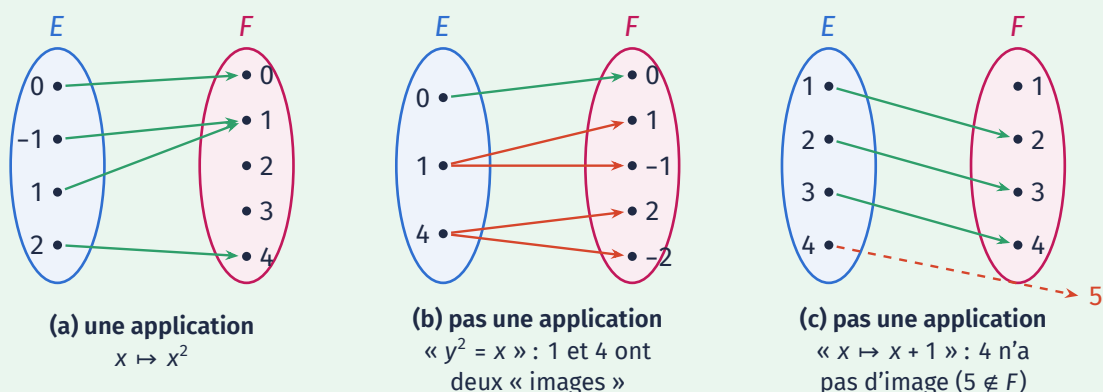
Une application, c'est une **machine** : on lui donne un élément x d'un ensemble E , elle rend **un et un seul** élément d'un ensemble F . Ce chapitre étudie ces machines : ce qu'elles font aux parties de E et de F , quand on peut les « inverser », comment on les enchaîne.

Définition : application, image, antécédent, graphe

Soit E et F deux ensembles. Une **application** f de E dans F associe à **chaque** élément x de E **un unique** élément de F , noté $f(x)$. On écrit $f : E \rightarrow F$, $x \mapsto f(x)$.

- E est l'ensemble de **départ**, F l'ensemble d'**arrivée** ; $f(x)$ est l'**image** de x par f ; si $y = f(x)$, on dit que x est un **antécédent** de y .
- Le **graphe** de f est la partie $G_f = \{(x, f(x)) ; x \in E\}$ de $E \times F$. Avec les quantificateurs : une partie G de $E \times F$ est le graphe d'une application de E dans F si et seulement si $\forall x \in E, \exists ! y \in F, (x, y) \in G$.

En résumé : **chaque élément de E a exactement une image** ; un élément de F peut avoir zéro, un ou plusieurs antécédents.



Comment reconnaître une application ? Sur un diagramme sagittal, de **chaque** point de E part **exactement une** flèche (sur un point de F , il peut en arriver zéro, une ou plusieurs). Pour une courbe du plan, chaque droite verticale $x = a$ ($a \in E$) doit la couper en **exactement un** point : un cercle n'est donc pas la courbe d'une fonction.

Fonction ou application ? Une fonction numérique est donnée par une formule et un domaine de définition D_f : c'est une application de D_f dans $\mathbb{R}$. Ainsi $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est **pas** une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (-1 n'a pas d'image), mais c'est une application de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$; $x \mapsto \frac{1}{x}$ est une application de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$. Écrire $f : E \rightarrow F$ **garantit** que chaque élément de E a une image dans F .

Exemple : le fil rouge du cours : $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 2x - 3$

On a $\varphi(x) = (x+1)^2 - 4 = (x+3)(x-1)$ (forme canonique, forme factorisée) ; cette application nous suivra dans tout le cours.

- **Images :** $\varphi(0) = -3$, $\varphi(-1) = -4$, $\varphi(2) = 5$, $\varphi(\sqrt{2}) = 2 + 2\sqrt{2} - 3 = 2\sqrt{2} - 1$.
- **Antécédents de 5 :** $\varphi(x) = 5 \iff (x+1)^2 = 9 \iff (x+1 = 3 \text{ ou } x+1 = -3) \iff (x = 2 \text{ ou } x = -4)$: deux antécédents. De même, 0 a deux antécédents, -3 et 1 ; -4 en a un seul, -1 ; -5 n'en a aucun, car $(x+1)^2 = -1$ est impossible.
- **Graphes :** $G_\varphi = \{(x, x^2 + 2x - 3) ; x \in \mathbb{R}\}$ est la parabole de sommet $(-1, -4)$; $(2, 5) \in G_\varphi$, mais $(1, 1) \notin G_\varphi$, car $\varphi(1) = 0 \neq 1$.

Remarque. Un peu d'histoire. Le mot « fonction » apparaît chez **Leibniz** à la fin du XVII^e siècle. Pour **Euler**, qui invente la notation $f(x)$ (1734), une fonction est une « expression analytique », c'est-à-dire une formule (*Introductio in analysin infinitorum*, 1748). En 1837, **Dirichlet** libère la notion de toute formule : une fonction est une correspondance **quelconque** qui, à chaque x , associe une seule valeur y ; son exemple célèbre vaut 1 si x est rationnel et 0 sinon. Au XX^e siècle, la théorie des ensembles donne la définition actuelle : une application est déterminée par son graphe, partie de $E \times F$ dans laquelle chaque x de E figure dans exactement un couple.

2 Égalité, restriction, prolongement

Définition : égalité de deux applications

Deux applications $f : E \rightarrow F$ et $g : E' \rightarrow F'$ sont **égales** ($f = g$) lorsqu'elles ont le **même ensemble de départ** ($E = E'$), le **même ensemble d'arrivée** ($F = F'$) et les **mêmes images** : $\forall x \in E, f(x) = g(x)$.

Exemple : égales ou non ?

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x^2}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ sont **égales** : pour tout réel x , $\sqrt{x^2} = |x|$. Deux formules différentes peuvent définir la même application.
- $p : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^3-1}{x-1}$ et $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + x + 1$ ne sont **pas** égales (départs différents), bien que $p(x) = q(x)$ pour tout $x \neq 1$, car $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$.
- $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto E\left(\frac{n}{2}\right) + E\left(\frac{n+1}{2}\right)$ est égale à $\text{Id}_{\mathbb{Z}}$ (ci-dessous). Rappel : $E(x)$ est l'unique entier m tel que $m \leq x < m+1$. Si $n = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$) : $s(n) = k + E\left(k + \frac{1}{2}\right) = k + k = n$; si $n = 2k+1$: $s(n) = E\left(k + \frac{1}{2}\right) + (k+1) = 2k+1 = n$.
- $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $x \mapsto x^2$ de $\mathbb{R}$ dans $[0, +\infty[$ sont **deux applications différentes** (arrivées différentes) : elles n'ont pas les mêmes propriétés (section 7).

Définition : identité, application constante

L'**application identique** de E est $\text{Id}_E : E \rightarrow E, x \mapsto x$. Une application $f : E \rightarrow F$ est **constante** lorsqu'il existe $c \in F$ tel que $\forall x \in E, f(x) = c$.

Définition : restriction, prolongement

Soit $f : E \rightarrow F$ et A une partie de E . La **restriction** de f à A est l'application $f|_A : A \rightarrow F$, $x \mapsto f(x)$: même formule, départ plus petit. Si $E \subset E'$, une application $g : E' \rightarrow F$ est un **prolongement** de f à E' lorsque $g|_E = f$, c'est-à-dire $\forall x \in E$, $g(x) = f(x)$.

Exemples. La restriction de la partie entière à $[0, 1[$ est l'application constante nulle : $E|_{[0,1[} : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$. La restriction $\varphi|_{[-1, +\infty[}$ du fil rouge sera injective (section 5), alors que φ ne l'est pas. L'application q ci-dessus est un prolongement de p à $\mathbb{R}$; mais $q_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $q_0(x) = p(x)$ si $x \neq 1$ et $q_0(1) = 0$, en est un autre : **un prolongement n'est pas unique** (on choisit librement les images des nouveaux points), alors qu'une restriction l'est.

3

Image directe d'une partie**Définition : image directe**

Soit $f : E \rightarrow F$ et A une partie de E . L'**image directe** de A par f est l'ensemble des images des éléments de A :

$$f(A) = \{f(x) ; x \in A\} = \{y \in F ; \exists x \in A, y = f(x)\}, \quad \text{donc} \quad y \in f(A) \iff \exists x \in A, f(x) = y.$$

C'est une partie de F . La partie $f(E)$ est l'**ensemble des images** de f .

Sur un exemple fini. Pour $f : x \mapsto x^2$ de $\{-1, 0, 1, 2\}$ dans $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ (figure (a) de la section 1) : $f(\{-1, 1\}) = \{1\}$ (deux éléments, une seule image), $f(\{0, 1, 2\}) = \{0, 1, 4\}$, $f(E) = \{0, 1, 4\} \neq F$.

Méthode : Comment calculer $f(A)$: la double inclusion

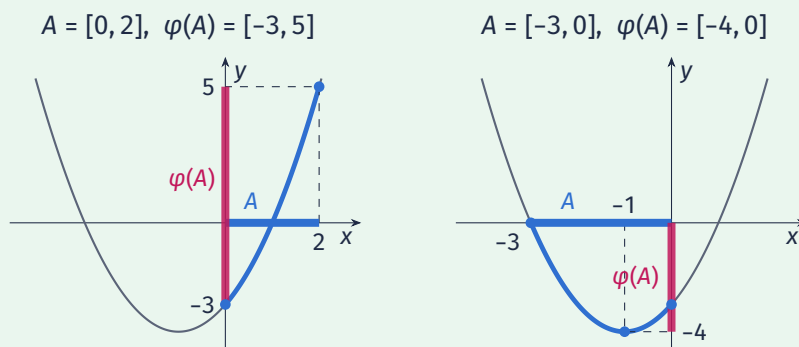
1. $f(A) \subset J$ (**encadrer**). Soit $x \in A$; à partir de l'encadrement de x , on encadre $f(x)$ (forme canonique, sens de variation des fonctions usuelles) et l'on obtient $f(x) \in J$. 2. $J \subset f(A)$ (**résoudre**). Soit $y \in J$; on résout $f(x) = y$ et l'on **exhibe** une solution x qui appartient à A . 3. **Conclusion** : $f(A) = J$.

L'étape 1 seule ne suffit pas : elle prouve que les images **restent** dans J , pas qu'elles le **remplissent** (sans l'étape 2, on aurait aussi « $f(A) \subset \mathbb{R}$ »).

Exemple : deux images directes par le fil rouge $\varphi(x) = (x+1)^2 - 4$

$\varphi([0, 2])$. **Encadrer** : soit $x \in [0, 2]$; alors $1 \leq x+1 \leq 3$, donc $1 \leq (x+1)^2 \leq 9$ (la fonction carré est croissante sur $[0, +\infty[$) et $-3 \leq \varphi(x) \leq 5$: $\varphi([0, 2]) \subset [-3, 5]$. **Résoudre** : soit $y \in [-3, 5]$; posons $x = -1 + \sqrt{y+4}$ (possible car $y+4 \geq 1$). Comme $1 \leq y+4 \leq 9$, on a $1 \leq \sqrt{y+4} \leq 3$, donc $x \in [0, 2]$, et $\varphi(x) = (\sqrt{y+4})^2 - 4 = y$: $[-3, 5] \subset \varphi([0, 2])$. Donc $\varphi([0, 2]) = [-3, 5]$.

$\varphi([-3, 0])$. **Encadrer** : soit $x \in [-3, 0]$; alors $-2 \leq x+1 \leq 1$, donc $|x+1| \leq 2$ et $0 \leq (x+1)^2 \leq 4$: $-4 \leq \varphi(x) \leq 0$. **Résoudre** : soit $y \in [-4, 0]$; le réel $x = -1 - \sqrt{y+4}$ vérifie $0 \leq \sqrt{y+4} \leq 2$, donc $-3 \leq x \leq -1$, et $\varphi(x) = y$. Donc $\varphi([-3, 0]) = [-4, 0]$, et **non** $[\varphi(0), \varphi(-3)] = [-3, 0]$: φ n'est pas monotone sur $[-3, 0]$, son minimum -4 est atteint en -1 .



En bleu, A sur l'axe des abscisses et la portion de courbe au-dessus de A ; en rose, $\varphi(A)$, projection de cette portion sur l'axe des ordonnées.

Exemple : d'autres images directes

- $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x} : f([0, 2]) = [\frac{1}{2}, +\infty[$. Si $0 < x \leq 2$, alors $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{2}$; réciproquement, si $y \geq \frac{1}{2}$, alors $x = \frac{1}{y} \in]0, 2]$ et $f(x) = y$.
- Partie entière : $E([0, 2[) = \{0, 1\}$, $E([\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]) = \{-1, 0\}$, $E(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$ (tout $n \in \mathbb{Z}$ vérifie $E(n) = n$) : l'image d'un intervalle n'est pas toujours un intervalle.
- $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto 2n : g(\mathbb{N}) = \{0, 2, 4, \dots\}$ est l'ensemble des entiers naturels pairs.

Propriétés de l'image directe

Soit $f : E \rightarrow F$ et A, A' deux parties de E . 1. $f(\emptyset) = \emptyset$ et $f(\{a\}) = \{f(a)\}$. 2. Si $A \subset A'$, alors $f(A) \subset f(A')$.

3. $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$ 4. $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$ (l'inclusion peut être stricte).

Démonstrations. 2. Soit $y \in f(A) : y = f(x)$ avec $x \in A$; comme $A \subset A'$, $x \in A'$, donc $y \in f(A')$. 3. Pour $y \in F$:

$$\begin{aligned} y \in f(A \cup A') &\iff \exists x \in A \cup A', f(x) = y \\ &\iff (\exists x \in A, f(x) = y) \text{ ou } (\exists x \in A', f(x) = y) \iff y \in f(A) \cup f(A'), \end{aligned}$$

car « $\exists$ » se distribue sur « ou » (chapitre 1). 4. $A \cap A' \subset A$ et $A \cap A' \subset A'$, donc, d'après le point 2, $f(A \cap A')$ est inclus dans $f(A)$ et dans $f(A')$. « $\exists$ » ne se distribue pas sur « et » : l'égalité est fautive en général. **Contre-exemple :** $\varphi(-3) = \varphi(1) = 0$; avec $A = \{-3\}$ et $A' = \{1\}$, $\varphi(A \cap A') = \varphi(\emptyset) = \emptyset$, alors que $\varphi(A) \cap \varphi(A') = \{0\}$. Le défaut vient de deux points **distincts** qui ont la même image (section 5).

4

Image réciproque d'une partie

Définition : image réciproque

Soit $f : E \rightarrow F$ et B une partie de F . L'**image réciproque** de B par f est l'ensemble des éléments de E dont l'image est dans B :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E ; f(x) \in B\}, \quad \text{donc} \quad x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B.$$

C'est une partie de E ; $f^{-1}(\{y\})$ est l'ensemble des antécédents de y .

Attention, piège ! la notation $f^{-1}(B)$

$f^{-1}(B)$ est un **ensemble**, défini pour **toute** application f , même non bijective : ici, f^{-1} seul ne désigne aucune application (la bijection réciproque de la section 8 n'existe que pour une bijection). Et ce n'est jamais $\frac{1}{f}$.

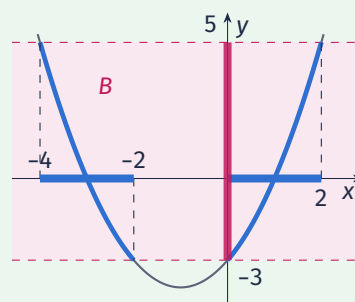
Sur un exemple fini. Pour $f : x \mapsto x^2$ de $\{-1, 0, 1, 2\}$ dans $\{0, 1, 2, 3, 4\}$: $f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}$, $f^{-1}(\{2, 3\}) = \emptyset$, $f^{-1}(\{0, 1\}) = \{-1, 0, 1\}$, $f^{-1}(\{1, 2, 3, 4\}) = \{-1, 1, 2\}$.

Méthode : Comment calculer $f^{-1}(B)$

On traduit « $f(x) \in B$ » par une équation, une inéquation ou un système d'inconnue $x \in E$, et on le **résout par équivalences** : l'ensemble des solutions est $f^{-1}(B)$. Pas besoin de double inclusion : les équivalences prouvent les deux inclusions à la fois.

Exemple : $\varphi^{-1}([-3, 5])$. Pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x \in \varphi^{-1}([-3, 5]) &\iff -3 \leq (x+1)^2 - 4 \leq 5 \\ &\iff 1 \leq (x+1)^2 \leq 9 \iff 1 \leq |x+1| \leq 3 \\ &\iff (1 \leq x+1 \leq 3 \text{ ou } -3 \leq x+1 \leq -1) \\ &\iff (0 \leq x \leq 2 \text{ ou } -4 \leq x \leq -2). \end{aligned}$$



Donc $\varphi^{-1}([-3, 5]) = [-4, -2] \cup [0, 2]$. **Lecture graphique :** ce sont les abscisses des points de la courbe situés dans la bande $-3 \leq y \leq 5$.

$B = [-3, 5]$ (bande rose) ; $\varphi^{-1}(B)$: deux intervalles bleus

De même : $\varphi^{-1}(\{-4\}) = \{-1\}$, $\varphi^{-1}(]-\infty, -4[) = \emptyset$, $\varphi^{-1}([-4, +\infty[) = \mathbb{R}$, et $\varphi^{-1}(]-\infty, 0]) = [-3, 1]$, car $(x+3)(x-1) \leq 0 \iff -3 \leq x \leq 1$.

Exemple : d'autres images réciproques

- **Partie entière :** pour $n \in \mathbb{Z}$, $E^{-1}(\{n\}) = [n, n+1[$ (c'est la définition de E). $E^{-1}([0, 2]) = [0, 3[$: comme $E(x)$ est entier, $E(x) \in [0, 2] \iff E(x) \in \{0, 1, 2\} \iff 0 \leq x < 3$.
- $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$: $f^{-1}([-1, 1]) =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, car $\left|\frac{1}{x}\right| \leq 1 \iff |x| \geq 1$; $f^{-1}(\{0\}) = \emptyset$.

Propriétés de l'image réciproque

Soit $f : E \rightarrow F$ et B, B' deux parties de F . $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(F) = E$, et si $B \subset B'$, alors $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.

$$f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$$

$$f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$$

$$f^{-1}(C_F^B) = C_E^{f^{-1}(B)}$$

Démonstrations. Tout se fait par équivalences : pour $x \in E$, $x \in f^{-1}(B \cap B') \iff f(x) \in B \cap B' \iff (f(x) \in B \text{ et } f(x) \in B') \iff (x \in f^{-1}(B) \text{ et } x \in f^{-1}(B'))$; même calcul avec « ou » pour la réunion ; et $x \in f^{-1}(C_F^B) \iff f(x) \notin B \iff x \notin f^{-1}(B)$. **L'image réciproque respecte toutes les opérations ;** l'image directe, seulement la réunion.

Aller-retour

Pour toute partie A de E et toute partie B de F : $A \subset f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

Démonstrations. Soit $x \in A$: $f(x) \in f(A)$, donc $x \in f^{-1}(f(A))$. Soit $y \in f(f^{-1}(B))$: $y = f(x)$ avec

$x \in f^{-1}(B)$, c'est-à-dire $f(x) \in B$; donc $y \in B$.

Les inclusions peuvent être strictes. • $A = [0, 2]$: $\varphi(A) = [-3, 5]$ et $\varphi^{-1}(\varphi(A)) = [-4, -2] \cup [0, 2] \neq A$: on récupère aussi les points de $[-4, -2]$, qui ont les mêmes images que ceux de A . • $B = [-5, 0]$: comme $\varphi(x) \geq -4 > -5$, $\varphi^{-1}(B) = \{x ; \varphi(x) \leq 0\} = [-3, 1]$, puis $\varphi([-3, 1]) = [-4, 0] \neq B$ (double inclusion, comme en section 3) : les éléments de $[-5, -4[$ n'ont pas d'antécédent. Plus précisément, $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E)$ (démontre-le !) ; ici, $[-5, 0] \cap [-4, +\infty[= [-4, 0]$.

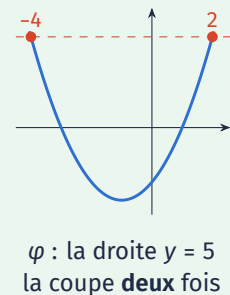
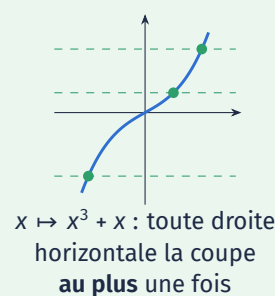
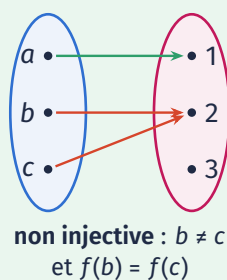
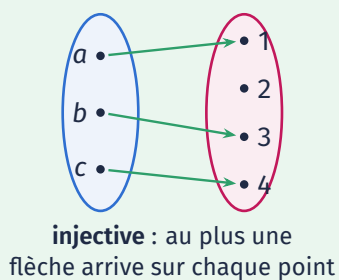
5 Applications injectives

Définition : injection

Une application $f : E \rightarrow F$ est **injective** (c'est une **injection**) lorsque deux éléments distincts de E ont toujours des images distinctes : $\forall (x, x') \in E^2, (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$. Par contraposée, cela équivaut à :

$$\boxed{\forall (x, x') \in E^2, (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')}.$$

Autrement dit : **tout élément de F a au plus un antécédent** (zéro ou un). **Négation** : f n'est pas injective $\iff \exists (x, x') \in E^2, (x \neq x' \text{ et } f(x) = f(x'))$.



Méthode : Comment montrer qu'une application est injective (ou ne l'est pas)

Pour montrer que f est injective : « Soit x et x' deux éléments de E tels que $f(x) = f(x')$. » On transforme cette égalité (on factorise souvent $f(x) - f(x')$ par $x - x'$) jusqu'à obtenir $x = x'$. « Donc f est injective. »

Pour montrer que f n'est pas injective : on exhibe **deux éléments distincts** $x_1 \neq x_2$ de E tels que $f(x_1) = f(x_2)$ (un seul contre-exemple suffit).

Exemple : le fil rouge, puis $x \mapsto x^3 + x$, puis des applications de $\mathbb{N}$ et de $\mathbb{R}^2$

1. φ n'est pas injective : $-3 \neq 1$ et $\varphi(-3) = \varphi(1) = 0$. Mais sa restriction $\psi = \varphi|_{[-1, +\infty[}$ est injective. **Rédaction.** Soit $x, x' \in [-1, +\infty[$ tels que $\psi(x) = \psi(x')$. Alors $(x+1)^2 - 4 = (x'+1)^2 - 4$, soit $(x+1)^2 = (x'+1)^2$. Or $x+1 \geq 0$ et $x'+1 \geq 0$, et deux réels positifs qui ont le même carré sont égaux : $x+1 = x'+1$, donc $x = x'$. Ainsi ψ est injective. **Réduire l'ensemble de départ peut rendre une application injective.**

2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3 + x$ est injective. Soit $x, x' \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = f(x')$; alors

$$0 = f(x) - f(x') = (x^3 - x'^3) + (x - x') = (x - x')(x^2 + xx' + x'^2 + 1).$$

Or $x^2 + xx' + x'^2 + 1 = \left(x + \frac{x'}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x'^2 + 1 \geq 1 > 0$; donc $x - x' = 0$, c'est-à-dire $x = x'$.

3. Sur $\mathbb{N} : u : n \mapsto 2n$ est injective ($2n = 2n' \Rightarrow n = n'$) ; $v : n \mapsto E\left(\frac{n}{2}\right)$ ne l'est pas : $v(0) = v(1) = 0$. Sur $\mathbb{R}^2 : s : (x, y) \mapsto x + y$ n'est pas injective, car $s(1, 0) = s(0, 1) = 1$ et $(1, 0) \neq (0, 1)$.

Théorème (monotonie et injectivité)

Soit I une partie de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction **strictement monotone** sur I . Alors f est injective.

Démonstration. On montre la forme « $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$ ». Supposons f strictement croissante. Soit $x \neq x'$ dans I , disons $x < x'$ (sinon on échange les noms) : alors $f(x) < f(x')$, donc $f(x) \neq f(x')$. Même preuve si f est strictement décroissante. $\square$

La réciproque est fautive : $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est injective sur $\mathbb{R}^*$ ($\frac{1}{x} = \frac{1}{x'} \Rightarrow x = x'$), mais n'est pas monotone sur $\mathbb{R}^*$: $-1 < 1$ et $f(-1) < f(1)$, alors que $1 < 2$ et $f(1) > f(2)$. **Utilisation :** $x \mapsto x + \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ (somme de deux fonctions strictement croissantes), donc injective, sans aucun calcul.

6 Applications surjectives

Définition : surjection

Une application $f : E \rightarrow F$ est **surjective** (c'est une **surjection**) lorsque **tout élément de F a au moins un antécédent** :

$$\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y, \quad \text{c'est-à-dire} \quad f(E) = F.$$

Négation : f n'est pas surjective $\iff \exists y \in F, \forall x \in E, f(x) \neq y$ (une valeur de F n'est jamais atteinte).

Lecture. Sur un diagramme, chaque point de F reçoit **au moins** une flèche ; sur une courbe, toute droite horizontale $y = k$ avec $k \in F$ coupe la courbe **au moins** une fois. Pour φ , les droites $y = k$ avec $k < -4$ passent sous la parabole : $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas surjective.

Méthode : Comment montrer qu'une application est surjective : « soit $y \in F$, cherchons x »

1. « Soit $y \in F$. » 2. **Au brouillon**, on résout $f(x) = y$ d'inconnue x : on trouve un candidat x qui dépend de y . 3. **Sur la copie**, on vérifie que ce candidat **appartient à E** (c'est là que se cachent les contraintes : racine d'un nombre positif, dénominateur non nul, signe...) et que $f(x) = y$. 4. « Donc y a un antécédent : f est surjective. »

Pour montrer que f n'est pas surjective : on exhibe **un** $y \in F$ sans antécédent, souvent grâce à une inégalité vérifiée par toutes les images.

Exemple : le fil rouge et $x \mapsto x + \sqrt{x}$: les contraintes sur x

1. Pour tout réel x , $\varphi(x) = (x + 1)^2 - 4 \geq -4$: -5 n'a pas d'antécédent, $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas surjective. En revanche, l'application $\mathbb{R} \rightarrow [-4, +\infty[, x \mapsto x^2 + 2x - 3$ est surjective : soit $y \geq -4$; le réel $x = -1 + \sqrt{y + 4}$ existe et $\varphi(x) = y$. **Changer l'ensemble d'arrivée change la**

surjectivité.

2. $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$, $x \mapsto x + \sqrt{x}$ est surjective. Soit $y \geq 0$. *Brouillon* : on pose $t = \sqrt{x}$; l'équation devient $t^2 + t - y = 0$, de discriminant $1 + 4y > 0$, de racines $\frac{-1 - \sqrt{1+4y}}{2} < 0$ (**rejetée** : $t = \sqrt{x}$ doit être positif) et $t_0 = \frac{-1 + \sqrt{1+4y}}{2}$, qui est ≥ 0 car $\sqrt{1+4y} \geq 1$. *Copie* : posons $x = t_0^2 \in [0, +\infty[$. Comme $t_0 \geq 0$, $\sqrt{x} = t_0$, donc $f(x) = t_0^2 + t_0 = y$. Comme f est aussi injective (section 5), elle est bijective (section 7).

Deux applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ (section 5) :

$u(n) = 2n$ n'est pas surjective : $u(n)$ est toujours pair, donc 1 n'a pas d'antécédent. $v(n) = E\left(\frac{n}{2}\right)$ est surjective : soit $m \in \mathbb{N}$; $v(2m) = E(m) = m$.

	injective ?	surjective ?
$u : n \mapsto 2n$	oui	non (1)
$v : n \mapsto E\left(\frac{n}{2}\right)$	non ($v(0) = v(1)$)	oui

Sur un ensemble infini comme $\mathbb{N}$, une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ n'est pas forcément surjective, ni une surjection injective ; entre ensembles finis de même cardinal, c'est différent (section 11). De même, $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$ est surjective ($s(t, 0) = t$) sans être injective.

Exemple : une application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$: $\Phi(A) = A \cap B$, où B est une partie fixée de E

Image. Pour toute partie A de E , $A \cap B \subset B$; et si $C \subset B$, alors $\Phi(C) = C \cap B = C$. Donc $\Phi(\mathcal{P}(E)) = \mathcal{P}(B)$, l'ensemble des parties de B .

Si $B \neq E$: Φ n'est **pas surjective** ($E \notin \mathcal{P}(B)$: E n'a pas d'antécédent) et **pas injective** : $C_E^B \neq \emptyset$, et pourtant $\Phi(C_E^B) = \emptyset = \Phi(\emptyset)$. **Si $B = E$:** $\Phi(A) = A$ pour tout A , donc $\Phi = \text{Id}_{\mathcal{P}(E)}$, injective et surjective. En revanche, $A \mapsto A \cap B$ de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(B)$ est toujours surjective.

7

Applications bijectives**Définition : bijection**

Une application $f : E \rightarrow F$ est **bijective** (c'est une **bijection** de E sur F) lorsque **tout élément de F a exactement un antécédent** :

$$\forall y \in F, \exists! x \in E, f(x) = y.$$

Théorème

f est bijective $\iff f$ est injective et surjective.

Démonstration. « $\exists! x \in E, f(x) = y$ » signifie : il existe **au moins** un tel x (pour tout y : c'est la surjectivité) **et** il en existe **au plus** un (pour tout y : c'est l'injectivité). $\square$

Méthode : Comment étudier une application : résoudre $f(x) = y$

Soit $y \in F$ quelconque ; on résout l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ (attention aux contraintes : x doit appartenir à E).

- pour un certain $y \in F$, **aucune** solution dans E : f n'est pas surjective ;
- pour un certain $y \in F$, **au moins deux** solutions dans E : f n'est pas injective ;
- pour **tout** $y \in F$, **exactement une** solution x dans E : f est bijective, et l'on a trouvé l'antécédent de chaque y (section 8).

Autre voie (fonctions numériques) : f strictement monotone (donc injective) et surjective, prouvée par le calcul.

Exemple : une homographique : $h(x) = \frac{3x-1}{x+2}$, de $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{3\}$

h est bien une application de $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{3\}$: pour $x \neq -2$, $h(x) = 3 \iff 3x - 1 = 3x + 6 \iff -1 = 6$, ce qui est impossible ; donc $h(x) \neq 3$.

Résolution. Soit $y \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Pour $x \neq -2$ (on peut multiplier par $x + 2 \neq 0$) :

$$h(x) = y \iff 3x - 1 = y(x + 2) \iff (3 - y)x = 2y + 1 \iff x = \frac{2y + 1}{3 - y} \quad (\text{car } y \neq 3).$$

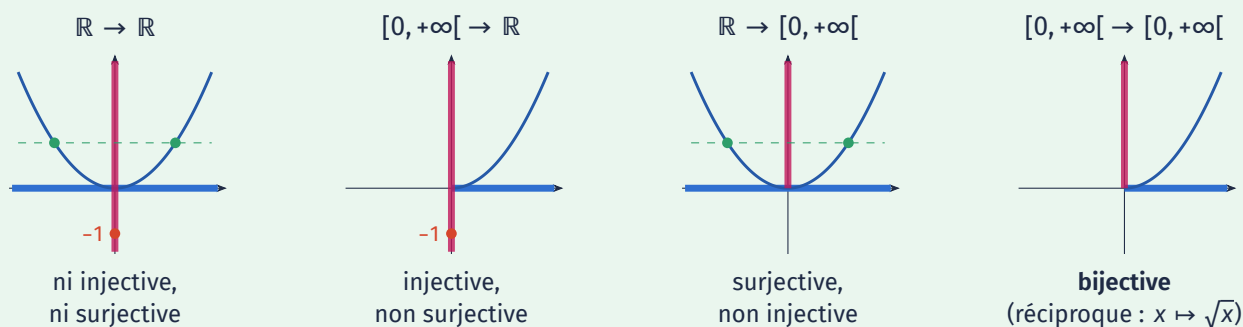
Ce réel est bien dans $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$: $\frac{2y+1}{3-y} = -2 \iff 2y+1 = 2y-6$, impossible. Chaque $y \neq 3$ a donc exactement un antécédent : h est une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, et l'antécédent de y est $\frac{2y+1}{3-y}$.

Les homographiques

Soit a, b, c, d des réels avec $c \neq 0$, et $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. Si $ad - bc \neq 0$, f est une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$, et l'antécédent de y est $\frac{b-dy}{cy-a}$. Si $ad - bc = 0$, f est constante sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ (par exemple $\frac{2x+6}{x+3} = 2$).

Idée de la preuve. $f(x) - \frac{a}{c} = \frac{bc-ad}{c(cx+d)}$: cette différence ne s'annule jamais si $ad \neq bc$ (la valeur $\frac{a}{c}$ n'est pas atteinte), et elle est toujours nulle si $ad = bc$; puis on résout $f(x) = y$ comme ci-dessus.

Une formule, quatre applications. La formule $x \mapsto x^2$ donne quatre applications différentes selon le départ (en bleu sur l'axe des abscisses) et l'arrivée (en rose sur l'axe des ordonnées) :



Pour $y = 1$, deux antécédents -1 et 1 quand le départ est $\mathbb{R}$ (points verts) ; pour $y = -1$, aucun antécédent quand l'arrivée est $\mathbb{R}$ (point rouge). De $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$: si $x^2 = x'^2$ avec $x, x' \geq 0$, alors $x = x'$; et tout $y \geq 0$ a pour antécédent $\sqrt{y} \geq 0$. **Une application, c'est une formule et deux ensembles.**

Exemple : une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$: $f(x, y) = (x + y, x - y)$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On résout $f(x, y) = (a, b)$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, en ajoutant puis en retrans-

chant les deux lignes (opérations réversibles) :

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = b \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = a + b \\ 2y = a - b \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{a+b}{2} \\ y = \frac{a-b}{2} \end{cases}.$$

Chaque couple (a, b) a exactement un antécédent : f est **bijjective**, et l'antécédent de (a, b) est $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right)$. Par exemple, $(4, 2)$ a pour antécédent $(3, 1)$. Enfin, $x \mapsto x + \sqrt{x}$ est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$ (sections 5 et 6).

8 La bijection réciproque

Définition : bijection réciproque

Soit $f : E \rightarrow F$ une bijection. Sa **bijection réciproque** est l'application $f^{-1} : F \rightarrow E$ qui, à tout $y \in F$, associe l'**unique** antécédent de y par f :

$$\forall x \in E, \forall y \in F, \quad y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

Propriétés de la réciproque

Si $f : E \rightarrow F$ est bijective : $\forall x \in E, f^{-1}(f(x)) = x$ et $\forall y \in F, f(f^{-1}(y)) = y$, c'est-à-dire $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$ (composition : section 9). De plus, f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.

Démonstrations. Soit $x \in E$; avec $y = f(x)$, l'équivalence encadrée donne $x = f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x))$. Soit $y \in F$; avec $x = f^{-1}(y)$, elle donne $y = f(x) = f(f^{-1}(y))$. Lue de droite à gauche, la même équivalence dit que tout $x \in E$ a pour **unique** antécédent par f^{-1} l'élément $f(x)$: f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$. $\square$

Méthode : Comment calculer f^{-1}

On résout $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$, pour $y \in F$ quelconque (section 7) : la solution unique est $f^{-1}(y)$. La lettre est muette : on peut écrire $f^{-1}(x) = \dots$ pour tracer la courbe. **Contrôle** : on vérifie $f(f^{-1}(y)) = y$ sur une ou deux valeurs.

Modèle de rédaction. Soit $y \in F$. Résolvons l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ [équivalences, en notant chaque contrainte : $x \in E$, dénominateur non nul, signe] ... Cette équation admet une **unique** solution dans E , à savoir $x = \dots$. Ainsi, tout élément de F a exactement un antécédent par f : f est une bijection de E sur F , et $f^{-1} : F \rightarrow E, y \mapsto \dots$

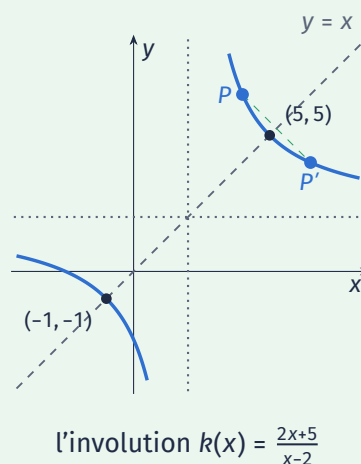
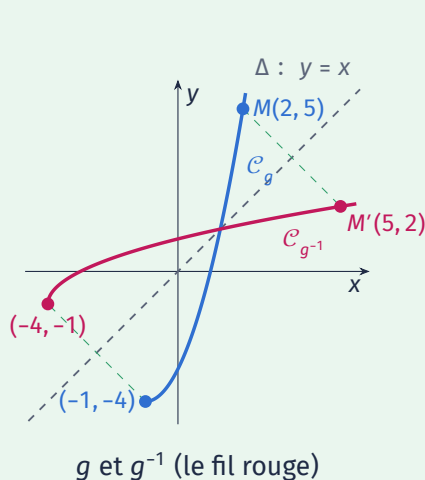
bijection	bijection réciproque
$h : \mathbb{R} \setminus \{-2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{3\}, x \mapsto \frac{3x-1}{x+2}$ (section 7)	$h^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-2\}, x \mapsto \frac{2x+1}{3-x}$
$[0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[, x \mapsto x^2$	$[0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[, x \mapsto \sqrt{x}$
$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, x - y)$	$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (a, b) \mapsto \left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right)$
$[0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[, x \mapsto x + \sqrt{x}$ (section 6)	$y \mapsto \left(\frac{-1+\sqrt{1+4y}}{2}\right)^2 = \frac{1+2y-\sqrt{1+4y}}{2}$
$g : [-1, +\infty[\rightarrow [-4, +\infty[, x \mapsto x^2 + 2x - 3$	$g^{-1} : [-4, +\infty[\rightarrow [-1, +\infty[, y \mapsto -1 + \sqrt{y+4}$

Le fil rouge, enfin inversé. g est bien à valeurs dans $[-4, +\infty[$ (car $g(x) = (x+1)^2 - 4 \geq -4$), injective (c'est ψ , section 5) et surjective : pour $y \geq -4$, le réel $x = -1 + \sqrt{y+4}$ vérifie $x \geq -1$ et $g(x) = y$. Contrôle : $g^{-1}(5) = -1 + 3 = 2$ et $g(2) = 5$.

Courbes de f et de f^{-1}

Dans un repère orthonormé, si $f : I \rightarrow J$ est une bijection (I, J parties de $\mathbb{R}$), les courbes de f et de f^{-1} sont **symétriques par rapport à la droite $\Delta : y = x$** .

Démonstration. $M(a, b) \in \mathcal{C}_f \iff b = f(a) \iff a = f^{-1}(b) \iff M'(b, a) \in \mathcal{C}_{f^{-1}}$. Or $M'(b, a)$ est le symétrique de $M(a, b)$ par rapport à Δ : le milieu $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$ de $[MM']$ est sur Δ , et $\vec{MM'}(b-a, a-b)$ est orthogonal au vecteur directeur $\vec{u}(1, 1)$ de Δ (produit scalaire $(b-a) + (a-b) = 0$). $\square$



Définition : involution

Une application $f : E \rightarrow E$ est une **involution** de E lorsque $\forall x \in E, f(f(x)) = x$: appliquer f deux fois ramène au point de départ.

Théorème

Une involution f de E est bijective, et $f^{-1} = f$.

Démonstration. Injective : si $f(x) = f(x')$, alors $f(f(x)) = f(f(x'))$, soit $x = x'$. **Surjective :** tout $y \in E$ s'écrit $y = f(f(y))$: il a pour antécédent $f(y)$. Cet antécédent est donc $f^{-1}(y) = f(y)$. $\square$

Exemples d'involutions : $x \mapsto -x$ sur $\mathbb{R}$; $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$; $(x, y) \mapsto (y, x)$ sur $\mathbb{R}^2$; $A \mapsto C_E^A$ sur $\mathcal{P}(E)$ (car $C_E^{C_E^A} = A$) ; $n \mapsto n + (-1)^n$ sur $\mathbb{Z}$, qui échange $2k$ et $2k+1$; $k(x) = \frac{2x+5}{x-2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$: on a $k(x) \neq 2$ (sinon $2x+5 = 2x-4$) et

$$k(k(x)) = \frac{2k(x)+5}{k(x)-2} = \frac{(2(2x+5)+5(x-2))/(x-2)}{((2x+5)-2(x-2))/(x-2)} = \frac{9x}{9} = x.$$

La courbe d'une involution est sa propre symétrique par rapport à $y = x$ (figure de droite : $P(4; 6,5)$ et $P'(6,5; 4)$ sont sur la courbe ; les points $(5, 5)$ et $(-1, -1)$ sont **fixes** : $k(5) = 5, k(-1) = -1$).

9

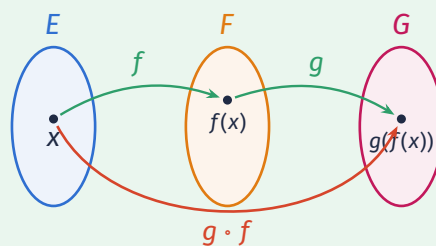
La composition

Définition : composée

Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$. La **composée** de f par g est l'application

$$g \circ f : E \rightarrow G, \quad x \mapsto g(f(x)).$$

On lit « g rond f » : on applique **d'abord** f , **puis** g . Plus généralement, $g \circ f$ a un sens dès que $f(E)$ est inclus dans l'ensemble de départ de g .



La composition n'est pas commutative. Avec $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = x^2$ (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) : $(g \circ f)(x) = (2x+1)^2$ et $(f \circ g)(x) = 2x^2 + 1$; pour $x = 1$: $9 \neq 3$, donc $g \circ f \neq f \circ g$. Parfois même, une seule des deux composées a un sens : avec $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x - 5$ et $r : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $f \circ r : x \mapsto \sqrt{x} - 5$ existe, mais pas $r \circ f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ($f(0) = -5$ n'a pas d'image par r).

Associativité, identité

Pour $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$ et $h : G \rightarrow H$: $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (on l'écrit $h \circ g \circ f$) et $f \circ \text{Id}_E = \text{Id}_F \circ f = f$.

Démonstration. Les deux applications vont de E dans H , et pour tout $x \in E$: $(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$ et $((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$. $\square$

Méthode : Domaine d'une composée de fonctions numériques

$g \circ f$ est définie en x lorsque $f(x)$ existe et appartient au domaine de g : $D_{g \circ f} = \{x \in D_f ; f(x) \in D_g\}$; c'est l'image réciproque de D_g par l'application $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ (section 4).

Exemple : $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ et $r(x) = \sqrt{x}$: deux composées, deux domaines

$r \circ f : (r \circ f)(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$ existe $\iff (x \neq 1 \text{ et } \frac{x+2}{x-1} \geq 0)$. Le quotient est nul en -2 , interdit en 1 , et du signe de $(x+2)(x-1)$, positif à l'extérieur des racines : $D_{r \circ f} =]-\infty, -2] \cup]1, +\infty[$.

$f \circ r : (f \circ r)(x) = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$ existe $\iff (x \geq 0 \text{ et } \sqrt{x} \neq 1)$: $D_{f \circ r} = [0, 1[\cup]1, +\infty[$.

Décomposer. Pour étudier $w(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$, on suit le calcul « de l'intérieur vers l'extérieur » : $w = c \circ b \circ a$ avec $a(x) = \frac{1}{x}$, $b(x) = 1 + x$, $c(x) = \sqrt{x}$. Domaine : $x \neq 0$ et $1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} \geq 0$, d'où $D_w =]-\infty, -1] \cup]0, +\infty[$.

Images et composition. Pour $A \subset E$ et $C \subset G$: $(g \circ f)(A) = g(f(A))$ et $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$, car $x \in (g \circ f)^{-1}(C) \iff g(f(x)) \in C \iff f(x) \in g^{-1}(C) \iff x \in f^{-1}(g^{-1}(C))$.

Sur $\mathbb{N}$. Avec $u(n) = 2n$ et $v(n) = E(\frac{n}{2})$ (sections 5 et 6) : $(v \circ u)(n) = E(n) = n$, donc $v \circ u = \text{Id}_{\mathbb{N}}$; mais $(u \circ v)(n) = 2E(\frac{n}{2})$ vaut n si n est pair et $n-1$ si n est impair : $u \circ v \neq \text{Id}_{\mathbb{N}}$, puisque $(u \circ v)(1) = 0$.

10

Composition et propriétés

Théorème (composées)

Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$. 1. Si f et g sont injectives, $g \circ f$ est injective. 2. Si f et g sont surjectives, $g \circ f$ est surjective. 3. Si f et g sont bijectives, $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Démonstrations. 1. Si $g(f(x)) = g(f(x'))$, alors $f(x) = f(x')$ (g injective), puis $x = x'$ (f injective). 2. Soit $z \in G : z = g(y)$ avec $y \in F$ (g surjective), puis $y = f(x)$ avec $x \in E$ (f surjective), donc $z = (g \circ f)(x)$. 3. D'après 1 et 2, $g \circ f$ est bijective. Pour $z \in G$, posons $x = f^{-1}(g^{-1}(z)) : (g \circ f)(x) = g(f(f^{-1}(g^{-1}(z)))) = g(g^{-1}(z)) = z$, donc x est l'antécédent de z par $g \circ f : (g \circ f)^{-1}(z) = f^{-1}(g^{-1}(z))$. $\square$

L'ordre s'inverse : on enfle les chaussettes (f) puis les chaussures (g) ; pour se déchausser, on enlève d'abord les chaussures (g^{-1}). Exemple : $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}^*$, $x \mapsto x+1$ et $g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$, $x \mapsto \frac{2}{x}$ sont bijectives, $f^{-1}(y) = y-1$ et $g^{-1} = g$ (involutions). Donc $g \circ f : x \mapsto \frac{2}{x+1}$ est une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ sur $\mathbb{R}^*$, et $(g \circ f)^{-1}(y) = f^{-1}(g^{-1}(y)) = \frac{2}{y} - 1$ (contrôle : $\frac{2}{x+1} = y \iff x = \frac{2}{y} - 1$). La formule fautive $g^{-1}(f^{-1}(y)) = \frac{2}{y-1}$ donne 2 au lieu de 0 pour $y = 2$.

Théorème (transfert)

Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$. 1. Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective. 2. Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Démonstrations. 1. Si $f(x) = f(x')$, alors $g(f(x)) = g(f(x'))$, donc $x = x'$ ($g \circ f$ injective). 2. Soit $z \in G$: il existe $x \in E$ tel que $g(f(x)) = z$; donc z a un antécédent par g , à savoir $f(x)$. $\square$

On ne peut pas conclure davantage : $v \circ u = \text{Id}_{\mathbb{N}}$ est bijective, mais v n'est pas injective et u n'est pas surjective (sections 5 et 6). Moyen mnémotechnique : la première appliquée (f) hérite de l'**injectivité**, la dernière (g) de la **surjectivité**.

Théorème (caractérisation des bijections)

$f : E \rightarrow F$ est bijective $\iff$ il existe $g : F \rightarrow E$ telle que $g \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ g = \text{Id}_F$. Dans ce cas, $g = f^{-1}$.

Démonstration. $(\Rightarrow) g = f^{-1}$ convient (section 8). $(\Leftarrow) g \circ f = \text{Id}_E$ est injective, donc f est injective ; $f \circ g = \text{Id}_F$ est surjective, donc f est surjective (théorème de transfert) : f est bijective. Enfin, par associativité, $g = g \circ \text{Id}_F = g \circ (f \circ f^{-1}) = (g \circ f) \circ f^{-1} = \text{Id}_E \circ f^{-1} = f^{-1}$. $\square$

Les deux égalités sont indispensables : $v \circ u = \text{Id}_{\mathbb{N}}$, et pourtant u n'est pas bijective. Avec $g = f$, on retrouve le théorème des involutions.

Exemple : deviner la réciproque, puis vérifier : $f : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$, $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

f est bien à valeurs dans $]-1, 1[: |f(x)| = \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} < 1$, car $\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} = |x|$. Posons $g :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ (défini car $y^2 < 1$).

• Pour $x \in \mathbb{R} : 1 - f(x)^2 = 1 - \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$, donc $\sqrt{1 - f(x)^2} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ et $g(f(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \times \sqrt{1+x^2} = x$.

• Pour $y \in]-1, 1[: 1 + g(y)^2 = 1 + \frac{y^2}{1-y^2} = \frac{1}{1-y^2}$, donc $f(g(y)) = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \times \sqrt{1-y^2} = y$.

Ainsi $g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$ et $f \circ g = \text{Id}_{]-1, 1[}$: f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$ et $f^{-1} = g$. Il y a « autant » de réels dans $]-1, 1[$ que dans $\mathbb{R}$ tout entier !

11

Pour aller plus loin

Applications entre ensembles finis

Soit E et F deux ensembles finis et $f : E \rightarrow F$. 1. Si f est injective, $\text{card } E \leq \text{card } F$. 2. Si f est surjective, $\text{card } E \geq \text{card } F$.

3. Si $\text{card } E = \text{card } F$: f injective $\iff f$ surjective $\iff f$ bijective.

Démonstrations. Notons $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ avec $n = \text{card } E$; alors $f(E) = \{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$ a **au plus** n éléments, et **exactement** n si et seulement si les $f(x_i)$ sont deux à deux distincts, c'est-à-dire si f est injective. 1. $f(E)$ a n éléments et $f(E) \subset F$, donc $n \leq \text{card } F$. 2. $F = f(E)$ a au plus n éléments. 3. Si f est injective, $f(E)$ est une partie de F à $n = \text{card } F$ éléments : c'est F tout entier, et f est surjective. Si f est surjective, $f(E) = F$ a n éléments, donc f est injective. $\square$

Exemples. Sur $\{0, 1, \dots, 7\}$, l'application « $x \mapsto$ reste de $5x$ dans la division par 8 » donne les images 0, 5, 2, 7, 4, 1, 6, 3, deux à deux distinctes : elle est injective, donc bijective (point 3), sans chercher d'antécédent. Sur $\{0, \dots, 5\}$, « $x \mapsto$ reste de $2x$ par 6 » donne 0, 2, 4, 0, 2, 4 : ni injective, ni surjective.

Le principe des tiroirs est la contraposée du point 1 : si $\text{card } E > \text{card } F$, **aucune** application de E dans F n'est injective ; deux éléments de E ont la même image. *Exemple* : si l'on choisit 6 entiers distincts dans $\{1, 2, \dots, 10\}$, deux d'entre eux ont pour somme 11. En effet, les 5 paires $\{1, 10\}$, $\{2, 9\}$, $\{3, 8\}$, $\{4, 7\}$, $\{5, 6\}$ partagent $\{1, \dots, 10\}$; l'application qui associe à chaque entier choisi sa paire va d'un ensemble à 6 éléments dans un ensemble à 5 éléments : elle n'est pas injective, donc deux entiers choisis sont dans la même paire, et leur somme vaut 11. Avec 5 entiers, c'est faux : $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

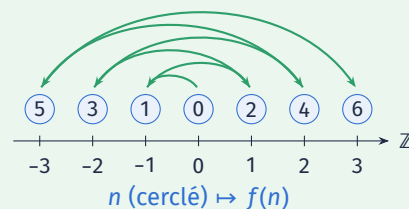
Théorème de Cantor (1891)

Pour tout ensemble E , il n'existe **aucune** surjection de E sur $\mathcal{P}(E)$.

Démonstration (par l'absurde). Supposons $f : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ surjective et posons $A = \{x \in E ; x \notin f(x)\}$, qui est une partie de E . Par surjectivité, $A = f(a)$ pour un certain $a \in E$. Alors $a \in A \iff a \notin f(a) \iff a \notin A$: contradiction. $\square$

Sur un exemple. $E = \{a, b\}$, $f(a) = \{a, b\}$, $f(b) = \emptyset$: $a \in f(a)$ et $b \notin f(b)$, donc $A = \{b\}$, qui n'est ni $f(a)$ ni $f(b)$. La partie A diffère de chaque $f(x)$ « au point x » : c'est l'**argument diagonal**. Comme $x \mapsto \{x\}$ est injective de E dans $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est « strictement plus gros » que E , même si E est infini.

Une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$. Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par $f(n) = \frac{n}{2}$ si n est pair, $f(n) = -\frac{n+1}{2}$ si n est impair : $0 \mapsto 0$, $1 \mapsto -1$, $2 \mapsto 1$, $3 \mapsto -2$, $4 \mapsto 2$... Posons $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$, $g(m) = 2m$ si $m \geq 0$, $g(m) = -2m - 1$ si $m < 0$. **Vérification.** Si $n = 2k$: $f(n) = k \geq 0$ et $g(k) = 2k = n$; si $n = 2k + 1$: $f(n) = -(k + 1) < 0$ et $g(f(n)) = 2(k + 1) - 1 = n$. Si $m \geq 0$: $f(2m) = m$; si $m < 0$: $-2m - 1$ est impair et $f(-2m - 1) = -\frac{-2m}{2} = m$. Donc $g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{N}}$ et $f \circ g = \text{Id}_{\mathbb{Z}}$: f est bijective. « Il y a autant d'entiers naturels que d'entiers relatifs. »



Définition : fonction indicatrice

Soit A une partie de E . La **fonction indicatrice** de A est $1_A : E \rightarrow \{0, 1\}$, définie par $1_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $1_A(x) = 0$ si $x \notin A$.

Pour A, B parties de E : $A = B \iff 1_A = 1_B$; $1_{A \cap B} = 1_A 1_B$; $1_{C \setminus A} = 1 - 1_A$; $1_A^2 = 1_A$; $1_{A \cup B} = 1_A + 1_B - 1_A 1_B$ (on vérifie chaque égalité en un point x , selon que $x \in A$ ou non, et $x \in B$ ou non : 4 cas). Ainsi $A \mapsto 1_A$ est une **bijection** de $\mathcal{P}(E)$ sur l'ensemble des applications de E dans $\{0, 1\}$ (la réciproque associe à h la partie $h^{-1}(\{1\})$) : elle transforme le calcul sur les ensembles en calcul sur les nombres.

Application : avec $a = 1_A$, $b = 1_B$, $c = 1_C$ et $a^2 = a$:

$$1_{A \cap (B \cup C)} = a(b + c - bc) = ab + ac - abc \quad \text{et} \quad 1_{(A \cap B) \cup (A \cap C)} = ab + ac - (ab)(ac) = ab + ac - abc :$$

les indicatrices sont égales, donc $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$: on retrouve la distributivité du chapitre 2, cette fois par un simple calcul.

12

Les pièges classiques

✗ Faux	✓ Vrai
« $f^{-1}(B)$ n'a de sens que si f est bijective »	$f^{-1}(B) = \{x \in E ; f(x) \in B\}$ existe toujours : $\varphi^{-1}([-3, 5]) = [-4, -2] \cup [0, 2]$
$f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$	seulement $\subset$: $\varphi(\{-3\} \cap \{1\}) = \emptyset$, mais $\varphi(\{-3\}) \cap \varphi(\{1\}) = \{0\}$
$f^{-1}(f(A)) = A$ et $f(f^{-1}(B)) = B$	seulement $A \subset f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(B)) \subset B$: $\varphi^{-1}(\varphi([0, 2])) = [-4, -2] \cup [0, 2]$
$f([a, b]) = [f(a), f(b)]$	faux si f n'est pas monotone : $\varphi([-3, 0]) = [-4, 0]$; on calcule par double inclusion
« $x \mapsto x^2$ est injective » (ou « ne l'est pas »), sans préciser les ensembles	cela dépend du départ et de l'arrivée : bijective de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$, ni injective ni surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$
« f injective : tout élément de F a un antécédent »	ça, c'est la surjectivité ; injective : tout élément de F a au plus un antécédent
« f injective : $x = x' \Rightarrow f(x) = f(x')$ »	c'est vrai pour toute application ! Injective : $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$
« injective $\Rightarrow$ surjective » pour une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$	$n \mapsto 2n$ est injective, pas surjective ; l'équivalence n'est vraie qu'entre ensembles finis de même cardinal
« injective $\Rightarrow$ strictement monotone »	$x \mapsto \frac{1}{x}$ est injective sur $\mathbb{R}^*$ sans être monotone ; seul « strictement monotone $\Rightarrow$ injective » est vrai
$g \circ f = f \circ g$	l'ordre compte : $(2x + 1)^2 \neq 2x^2 + 1$
« le domaine de $g \circ f$ est celui de f »	$D_{g \circ f} = \{x \in D_f ; f(x) \in D_g\}$: $\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$ est définie sur $]-\infty, -2] \cup]1, +\infty[$
$(g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$	$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ (chaussettes et chaussures)

« $g \circ f = \text{Id}_E$, donc f et g sont bijectives et réciproques »	seulement f injective et g surjective : $v \circ u = \text{Id}_N$; il faut aussi $f \circ g = \text{Id}_F$
$f^{-1}(x) = \frac{1}{f(x)}$	pour $f(x) = 2x$, $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$, et non $\frac{1}{2x}$
« $x \mapsto \frac{1}{x}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ »	ce n'est même pas une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (0 n'a pas d'image) : c'est une bijection de $\mathbb{R}^*$ sur $\mathbb{R}^*$

13

Les astuces des concours

★ Astuce de concours : factoriser $f(x) - f(x')$ par $x - x'$: l'autre facteur dit tout

Pour un polynôme ou une fraction rationnelle, $x - x'$ se met toujours en facteur dans $f(x) - f(x')$. Si l'autre facteur ne s'annule pas pour $x \neq x'$, f est injective ; s'il s'annule, ses zéros fournissent **deux points de même image**. **Exemple** : $f(x) = x^3 - 3x$, $f(x) - f(x') = (x - x')(x^2 + xx' + x'^2 - 3)$. Sur $[1, +\infty[$, si $x \neq x'$, l'un des deux est > 1 , donc $x^2 + xx' + x'^2 > 3$: f est injective sur $[1, +\infty[$. Sur $\mathbb{R}$, on cherche x' avec $x = -1$: $1 - x' + x'^2 = 3 \iff x' = 2$ ou $x' = -1$; d'où $f(-1) = f(2) = 2$.

★ Astuce de concours : résoudre $y = f(x)$ donne tout en une fois

Un seul calcul répond aux trois questions : existence (surjectivité), unicité (injectivité) et formule de f^{-1} . **Exemple** : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x|x|$. Soit $y \in \mathbb{R}$; $f(x)$ a le signe de x . Si $y \geq 0$: $f(x) = y \iff (x \geq 0 \text{ et } x^2 = y) \iff x = \sqrt{y}$. Si $y < 0$: $f(x) = y \iff (x < 0 \text{ et } -x^2 = y) \iff x = -\sqrt{-y}$. Une solution et une seule pour chaque y : f est bijective, $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ si $y \geq 0$ et $f^{-1}(y) = -\sqrt{-y}$ si $y < 0$.

★ Astuce de concours : deux images égales pour réfuter

Une **symétrie** tue l'injectivité : si $f(a - t) = f(a + t)$ (axe $x = a$), si $f(-x) = f(x)$, si $f(\frac{1}{x}) = f(x)$..., deux points distincts ont la même image. Pour le fil rouge, l'axe $x = -1$ donne $\varphi(-1 - t) = \varphi(-1 + t)$, d'où $\varphi(-3) = \varphi(1)$. Pour une application définie sur $\mathcal{P}(E)$, on cherche deux parties différentes de même image : $\emptyset \cap B = C_E^B \cap B$.

★ Astuce de concours : $f \circ f = \text{Id}$, $f \circ f \circ f = \text{Id}$: la réciproque sans calcul

Si $f \circ f = \text{Id}_E$, alors $f^{-1} = f$. Si $f \circ f \circ f = \text{Id}_E$, alors $f \circ (f \circ f) = (f \circ f) \circ f = \text{Id}_E$: par la caractérisation (section 10), f est bijective et $f^{-1} = f \circ f$. **Exemple** : $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$ sur $E = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ (on a $f(x) \neq 1$, et $f(x) = -1 \iff x = 1$, donc $f(x) \in E$). On calcule $f(f(x)) = \frac{(x-3)-3(x+1)}{(x-3)+(x+1)} = \frac{x+3}{1-x}$, puis $f(f(f(x))) = \frac{(x+3)-3(1-x)}{(x+3)+(1-x)} = \frac{4x}{4} = x$. Donc $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{1-x}$, sans résoudre d'équation.

★ Astuce de concours : composer pour transférer une propriété

Composer à gauche : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x, x^2)$ est injective, car avec $p(x, y) = x$, $p \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$ est injective (transfert). **Composer à droite** : la partie entière, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$, est surjective :

avec $j : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto n$, $E \cdot j = \text{Id}_{\mathbb{Z}}$ est surjective. **Les deux :** si $f \circ f$ est bijective, alors f est injective ($f \circ f$ injective) et surjective ($f \circ f$ surjective) : f est bijective.

★ *Astuce de concours : f commute avec $f \circ f$*

Pour toute $f : E \rightarrow E$, $f \circ (f \circ f) = (f \circ f) \circ f$: on calcule $f(f(f(x)))$ de deux façons. **Exemple :** soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(f(x)) = 3x - 2$ pour tout réel x . En appliquant l'hypothèse à $f(x) : f(f(f(x))) = 3f(x) - 2$; et en appliquant f à l'hypothèse : $f(f(f(x))) = f(3x - 2)$. Donc $f(3x - 2) = 3f(x) - 2$, et pour $x = 1 : f(1) = 3f(1) - 2$, soit $f(1) = 1$. De plus $f \circ f$ est bijective (affine), donc f aussi. (De telles f existent : $f(x) = \sqrt{3}x + 1 - \sqrt{3}$.)

★ *Astuce de concours : involutions sans point fixe : une question de parité*

Si f est une involution d'un ensemble **fini** E , les éléments non fixes se groupent par **paires** $\{x, f(x)\}$ (avec $x \neq f(x)$, et f échange x et $f(x)$). Donc $\text{card } E$ et le nombre de points fixes ont la **même parité** : une involution sans point fixe n'existe que si $\text{card } E$ est pair, et toute involution d'un ensemble à un nombre impair d'éléments a au moins un point fixe. **Exemple :** $x \mapsto 11 - x$ est une involution sans point fixe de $\{1, \dots, 10\}$ (5 paires). **Application :** sur l'ensemble des diviseurs de $n \in \mathbb{N}^*$, $d \mapsto \frac{n}{d}$ est une involution, dont le seul point fixe possible est $\sqrt{n}$: n a un nombre **impair** de diviseurs si et seulement si n est un carré parfait (36 en a 9, 12 en a 6).

★ *Astuce de concours : quand les inclusions deviennent des égalités*

f **injective** $\Rightarrow f^{-1}(f(A)) = A$ et $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$; f **surjective** $\Rightarrow f(f^{-1}(B)) = B$. *Preuves :* si $x \in f^{-1}(f(A))$, alors $f(x) = f(a)$ avec $a \in A$, donc $x = a \in A$; si $y \in f(A) \cap f(A')$, alors $y = f(a) = f(a')$ avec $a \in A, a' \in A'$, donc $a = a' \in A \cap A'$; si $y \in B$, alors $y = f(x)$ pour un x , et $x \in f^{-1}(B)$. Les réciproques sont vraies aussi (bon exercice).

14

L'essentiel du chapitre en une page

Application $f : E \rightarrow F, x \mapsto f(x)$

$\forall x \in E, f(x)$ existe et est **unique** ; $f(x)$: image de x ; x : antécédent de $f(x)$.

Graphe : $G_f = \{(x, f(x)) ; x \in E\} \subset E \times F$.

$f = g$: même départ, même arrivée,

$\forall x, f(x) = g(x)$.

Restriction $f|_A : A \rightarrow F$; prolongement $g : g|_E = f$ (non unique).

Image directe ($A \subset E$)

$f(A) = \{f(x) ; x \in A\}$:

$y \in f(A) \iff \exists x \in A, f(x) = y$.

Calcul : double inclusion (encadrer, puis résoudre).

$f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$; $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$.

Image réciproque ($B \subset F$, toujours définie)

$f^{-1}(B) = \{x \in E ; f(x) \in B\}$:

$x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$.

Calcul : résoudre « $f(x) \in B$ » par équivalences.

$f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$

$f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$

$f^{-1}(C_F^B) = C_E^{f^{-1}(B)}$

$A \subset f^{-1}(f(A))$; $f(f^{-1}(B)) = B \cap f(E) \subset B$.

Injective (au plus un antécédent)

$\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

Non injective : $x_1 \neq x_2$ et $f(x_1) = f(x_2)$.

Strictement monotone $\Rightarrow$ injective (réciproque fausse).

Surjective (au moins un antécédent)

$\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$, soit $f(E) = F$.

« Soit $y \in F$, cherchons x » et vérifier $x \in E$.

Non surjective : un $y \in F$ sans antécédent.

Bijective (exactement un antécédent)

$\forall y \in F, \exists! x \in E, f(x) = y \iff$ injective et surjective.

Résoudre $f(x) = y$: 0 solution $\rightarrow$ non surjective ; $\geq 2 \rightarrow$ non injective ; exactement 1 $\rightarrow$ bijective.

$\frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$) : bijection de $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$.

Réciproque (f bijective)

$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$; $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E, f \circ f^{-1} = \text{Id}_F$.

$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ symétriques par rapport à $y = x$.

Involution : $f \circ f = \text{Id}_E \Rightarrow f$ bijective et $f^{-1} = f$.

Composition $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Non commutative ; associative ;

$f \circ \text{Id}_E = \text{Id}_F \circ f = f$.

$D_{g \circ f} = \{x \in D_f ; f(x) \in D_g\}$.

Injective $\circ$ injective = injective ; de même pour surjective et bijective.

$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

$g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective ; $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.

f bijective $\iff \exists g, g \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ g = \text{Id}_F$ ($g = f^{-1}$).

À retenir pour les concours

Ensembles finis, $\text{card } E = \text{card } F$: injective $\iff$ surjective $\iff$ bijective.

Tiroirs : $\text{card } E > \text{card } F \Rightarrow f$ non injective.

Cantor : aucune surjection de E sur $\mathcal{P}(E)$

($A = \{x ; x \notin f(x)\}$).

Involution sans point fixe $\Rightarrow \text{card } E$ pair.

$f \circ f \circ f = \text{Id}_E \Rightarrow f^{-1} = f \circ f$; f commute avec $f \circ f$.

$\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B, \mathbf{1}_{C_E^A} = 1 - \mathbf{1}_A, \mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$.

Bon courage ! La régularité bat le talent.

Maths Olympiad

Partie B • Le parcours

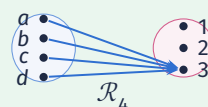
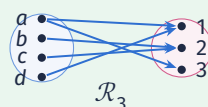
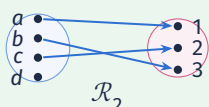
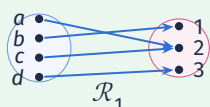
30 exercices sur 4 niveaux, du plus simple au niveau concours

Notations : $E(x)$ est la partie entière de x (l'entier k tel que $k \leq x < k+1$) ; $A \setminus B = A \cap C_E^B$; $f|_A$ est la restriction de f à A .

15 Niveau 1 • Bases

Exercice 1 Application ou pas ? ★

corrigé p. 40



- Ces diagrammes représentent des relations de $E = \{a, b, c, d\}$ vers $F = \{1, 2, 3\}$. Lesquelles sont des applications ? Justifier pour les autres. Pour chaque application : image de b , antécédents de chaque élément de F , graphe.
- Ces correspondances sont-elles des applications ? a) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$; b) de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, $n \mapsto$ reste de la division euclidienne de n par 5 ; c) de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$, $n \mapsto n^2 - 1$; d) de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$, $n \mapsto n - 1$.

Exercice 2 Images et antécédents ★

corrigé p. 40

- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{2x}{x^2+1}$. a) Calculer $f(0)$, $f(-1)$, $f(\sqrt{3})$, $f(\frac{1}{2})$. b) Déterminer les antécédents de 1, de 2, de $\frac{4}{5}$. c) Les points $A(2, \frac{4}{5})$ et $B(-2, \frac{4}{5})$ sont-ils sur le graphe de f ?
- Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$, $x \mapsto E(x^2)$. Calculer $g(1,5)$ et $g(-\sqrt{5})$; déterminer les antécédents de 0 et de 2.

Exercice 3 Égalité, restriction, prolongement ★

corrigé p. 40

- Les applications f et g sont-elles égales ? a) $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x + |x|)^2$, $g(x) = 4x^2$; et leurs restrictions à $[0, +\infty[$? que dire de $f|_{]-\infty, 0]}$? b) $f, g : \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(n) = 2^n$, $g(n) = \frac{n^3+5n+6}{6}$; et sur $\{0, 1, 2, 3, 4\}$?
- Soit $\psi : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x^2+x-6}{x-2}$. Trouver un prolongement de ψ à $\mathbb{R}$ qui soit une fonction affine. Combien ψ a-t-elle de prolongements à $\mathbb{R}$?

Exercice 4 Image directe, image réciproque : un exemple fini ★

corrigé p. 41

Soit $E = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $F = \{0, 1, \dots, 6\}$ et $f : E \rightarrow F$, $x \mapsto x^2 - x$.

- Représenter f par un diagramme sagittal. f est-elle injective ? surjective ?
- Déterminer $f(\{-1, 0, 1\})$, $f(\{-2, 3\})$, $f(E)$, $f^{-1}(\{2\})$, $f^{-1}(\{0, 6\})$, $f^{-1}(\{1, 3, 5\})$ et $f^{-1}(F)$.
- Comparer $f^{-1}(f(A))$ et A pour $A = \{0, 3\}$; $f(f^{-1}(B))$ et B pour $B = \{0, 4\}$; $f(A_1 \cap A_2)$ et $f(A_1) \cap f(A_2)$ pour $A_1 = \{-1, 0\}$ et $A_2 = \{1, 2\}$. 4. Pourquoi pouvait-on prévoir que $f^{-1}(\{1, 3, 5\}) = \emptyset$?

Exercice 5 Images d'intervalles ★

corrigé p. 41

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 3 - 2x$. Déterminer $f([-1, 2])$, $f(]0, +\infty[)$, $f^{-1}([1, 5])$, $f^{-1}(\{7\})$ et $f^{-1}(]-\infty, 0])$.
2. $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 4x + 1$. Vérifier que $g(x) = (x + 2)^2 - 3$, puis déterminer $g([-2, 1])$, $g([-5, -3])$, $g^{-1}(\{1\})$, $g^{-1}([-3, -2])$ et $g^{-1}(]-\infty, -4])$.

Exercice 6 Premières injections, premières surjections ★

corrigé p. 41

1. Soit $E = \{1, \dots, 6\}$. Pour $n \in E$, $f(n)$ est le reste de la division euclidienne de $3n$ par 7, et $g(n)$ celui de n^2 par 7. Dresser les tableaux de valeurs ; vérifier que f et g sont des applications de E dans E . Sont-elles injectives ? surjectives ?
2. Mêmes questions pour $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n + 3$ et pour $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto E(\sqrt{n})$.

Exercice 7 Injective ou non ? ★

corrigé p. 42

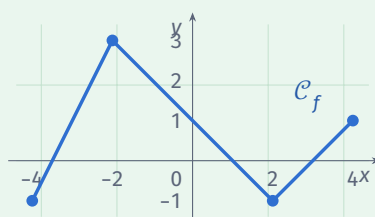
Montrer que l'application est injective (partir de $f(x) = f(x')$, ou utiliser la stricte monotonie) ou trouver deux réels distincts de même image : a) $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 5x - 7$; b) $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 3x$; c) $f_3 : [-\frac{3}{2}, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 + 3x$; d) $f_4 :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + \frac{4}{x}$; e) $f_5 :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x+1} - \frac{1}{x}$; f) $f_6 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x+1| - |x-1|$.

Exercice 8 Lecture graphique ★

corrigé p. 42

La courbe de $f : [-4, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ est la ligne brisée qui joint $(-4, -1)$, $(-2, 3)$, $(2, -1)$ et $(4, 1)$.

1. Lire $f(-2)$, $f(0)$, $f(3)$; antécédents de 1, 3, 4, 0 (écrire $f(x)$ sur chaque segment).
2. Déterminer $f([-4, -2])$, $f([0, 4])$, $f([-4, 4])$, $f^{-1}([2, 3])$ et $f^{-1}(]-\infty, 0])$.
3. f est-elle injective ? surjective sur $[-1, 3]$? sur $\mathbb{R}$?
4. Montrer que $g = f|_{[-2, 2]}$ est une bijection de $[-2, 2]$ sur $[-1, 3]$; déterminer g^{-1} .



16

Niveau 2 · Bac**Exercice 9 Type devoir surveillé (1) : images d'intervalles ★★**

corrigé p. 42

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 6x + 8$.

1. Écrire $f(x)$ sous forme canonique ; donner les variations de f .
2. Déterminer $f([3, 6])$, $f([0, 4])$, $f(]2, 4])$ et $f(\mathbb{R})$.
3. Déterminer $f^{-1}(\{0\})$, $f^{-1}(\{-1\})$, $f^{-1}([0, 3])$ et $f^{-1}(]-\infty, -2])$.
4. Pour $A = [0, 3]$, $A' = [3, 6]$ et $B = [-2, 0]$, comparer $f(A \cap A')$ et $f(A) \cap f(A')$, puis calculer $f(f^{-1}(B))$ et $f^{-1}(f(A'))$.
5. Montrer que f induit une bijection g de $]-\infty, 3]$ sur $[-1, +\infty[$ et déterminer $g^{-1}(y)$ pour $y \geq -1$.

Exercice 10 Type devoir surveillé (2) : une fonction homographique ★★

corrigé p. 43

Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{2x-5}{x-3}$.

1. Calculer $f(0)$ et $f(4)$; antécédents éventuels de 0, de 1 et de 2. 2. Montrer que f est injective. Est-elle surjective ?
3. Montrer que $f(\mathbb{R} \setminus \{3\}) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, puis que $g : \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}, x \mapsto f(x)$ est bijective ; déterminer g^{-1} .
4. Vérifier que $f(x) = 2 + \frac{1}{x-3}$. En déduire $f([3, +\infty[)$ et $f^{-1}([1, 3])$.

Exercice 11 Type devoir surveillé (3) : composition ★★

corrigé p. 43

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 3$; $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x-1}$; $u : [-3, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x+3}$.

1. Ensemble de définition et expression de $g \circ f$, puis de $f \circ g$. Comparer $(g \circ f)(0)$ et $(f \circ g)(0)$; conclure.
2. Montrer que $u \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$ et que $(u \circ f)(x) = |x|$, puis que $f \circ u = \text{Id}_{[-3, +\infty[}$. En déduire, sans calcul, que u est injective.
3. Calculer $U \circ F$ et $F \circ U$, où $F : [0, +\infty[\rightarrow [-3, +\infty[, x \mapsto x^2 - 3$ et $U : [-3, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[, x \mapsto \sqrt{x+3}$; conclure.
4. Soit $H :]2, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[, x \mapsto \frac{1}{x^2-4}$. Écrire H comme composée de deux bijections ; en déduire que H est bijective et calculer $H^{-1}(y)$.

Exercice 12 Type devoir surveillé (4) : une application sur les parties ★★

corrigé p. 43

Soit E un ensemble, $B \subset E$ et $\varphi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E), A \mapsto A \cup B$.

1. Ici $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $B = \{1, 2, 3\}$. a) Calculer $\varphi(\emptyset)$, $\varphi(\{4\})$, $\varphi(\{1, 4\})$. b) Déterminer les antécédents de $\{1, 2, 3, 5\}$, puis de $\{1, 2, 5\}$. c) Déterminer $\varphi(\mathcal{P}(E))$.
2. Cas général : montrer que φ est injective $\iff B = \emptyset \iff \varphi$ est surjective.
3. Soit $\mathcal{U} = \{C \in \mathcal{P}(E) \mid B \subset C\}$ et $\overline{B} = C_E^B$. Montrer que $\varphi(\mathcal{P}(E)) = \mathcal{U}$, puis que $\theta : \mathcal{P}(\overline{B}) \rightarrow \mathcal{U}, A \mapsto A \cup B$ est bijective ; déterminer θ^{-1} , puis $\theta^{-1}(C)$ pour chacune des parties C trouvées en 1.c).

Exercice 13 Applications de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ ★★

corrigé p. 44

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + 2y, 2x + 3y)$ et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x - 2y, 3x - 6y)$.

1. Calculer $f(1, -1)$ et les antécédents de $(0, 1)$ par f . En résolvant $f(x, y) = (u, v)$, montrer que f est bijective et donner $f^{-1}(u, v)$; vérifier que $f \circ f^{-1} = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$.
2. Calculer $g(2, 1)$ et $g(0, 0)$: g est-elle injective ? Montrer que $g(\mathbb{R}^2) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid v = 3u\}$; g est-elle surjective ? Déterminer $g^{-1}(\{(1, 3)\})$, $g^{-1}(\{(1, 2)\})$ et $g^{-1}(\{(0, 0)\})$.
3. Sans calcul, $f \circ g$ est-elle injective ? surjective ?

Exercice 14 Bijections et bijections réciproques ★★

corrigé p. 44

1. Soit $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{1-x^2}$, et $y \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $f(x) = y \iff yx^2 + x - y = 0$, équation qui a deux solutions de produit -1 , dont une seule est dans $] -1, 1[$. En déduire que f est bijective et que $f^{-1}(y) = \frac{2y}{1+\sqrt{1+4y^2}}$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.
2. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[, x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$. Justifier que g est à valeurs dans $] -1, 1[$, puis montrer que g est bijective, de réciproque $y \mapsto \frac{y}{1-|y|}$.

Exercice 15 Involutions ★★

corrigé p. 44

$f : E \rightarrow E$ est une *involution* si $f \circ f = \text{Id}_E$; $x \in E$ est un *point fixe* de f si $f(x) = x$.

- Montrer que c'est une involution et déterminer ses points fixes : a) $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto 5 - n$; b) $t : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, x \mapsto -\frac{2}{x}$; c) $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, -y)$.
- a) Montrer que $n \mapsto 7 - n$ est une involution de $\{1, \dots, 6\}$ sans point fixe, et $n \mapsto 8 - n$ une involution de $\{1, \dots, 7\}$ ayant un seul point fixe. b) Donner une involution de $\{1, \dots, 7\}$ ayant exactement 3 points fixes. (Voir l'exercice 30.)

Exercice 16 Vrai ou faux ? ★★

corrigé p. 45

$f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont des applications, A et A' des parties de E . Démontrer ou réfuter :

- Toute application strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est surjective.
- Si $f(A) \subset f(A')$, alors $A \subset A'$.
- Si $A \cap A' = \emptyset$, alors $f(A) \cap f(A') = \emptyset$.
- Si $f(A) \cap f(A') = \emptyset$, alors $A \cap A' = \emptyset$.
- Si $g \circ f$ est injective, alors g est injective.
- Si $g \circ f$ est bijective, alors f et g sont bijectives.
- Il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$ pour laquelle chaque entier a exactement deux antécédents.

17**Niveau 3 · Approfondissement****Exercice 17 Caractériser par les images ★★★**

corrigé p. 45

Soit $f : E \rightarrow F$. Cours : si f est injective, $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$ et $f^{-1}(f(A)) = A$ ($A, A' \subset E$) ; si f est surjective, $f(f^{-1}(B)) = B$ ($B \subset F$).

- Démontrer les réciproques : a) si $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$ pour toutes parties A, A' de E , f est injective ; b) si $f^{-1}(f(A)) = A$ pour toute $A \subset E$, f est injective ; c) si $f(f^{-1}(B)) = B$ pour toute $B \subset F$, f est surjective.
- Montrer que f est bijective si et seulement si $f(C_E^A) = C_F^{f(A)}$ pour toute partie A de E .

Exercice 18 Composer pour transférer les propriétés ★★★

corrigé p. 45

Soit $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$ et $h : G \rightarrow H$ des applications.

- Montrer que si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective. 2. Montrer que si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective.
- On suppose $g \circ f$ et $h \circ g$ bijectives. Montrer que f, g et h sont bijectives.
- Soit $p : E \rightarrow E$ telle que $p \circ p = p$. Montrer que si p est injective, ou surjective, alors $p = \text{Id}_E$. Exemples : E sur $\mathbb{R}, (x, y) \mapsto (x, 0)$ sur $\mathbb{R}^2$; qu'en conclure ?

Exercice 19 L'application $x \mapsto x + E(x)$ ★★★

corrigé p. 45

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + E(x)$, et $D = \{y \in \mathbb{R} / E(y) \text{ est pair}\}$.

- Calculer $f(2), f(2,5), f(-0,5)$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, exprimer $f(x)$ sur $[n, n + 1[$.
- Montrer que f est strictement croissante. Qu'en déduit-on ? 3. Montrer que $f(\mathbb{R}) = D$. f est-elle surjective ?
- Montrer que $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow D, x \mapsto f(x)$ est bijective et que $\tilde{f}^{-1}(y) = y - \frac{E(y)}{2}$ pour tout $y \in D$.
- Résoudre $f(x) = 7,3$ et $f(x) = 10,5$; déterminer $f^{-1}([0, 3])$ et $f(f^{-1}([0, 3]))$.

Exercice 20 Une application d'ordre 3 ★★★

corrigé p. 46

Soit $E = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ et $f : E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1-x}$.

1. Montrer que $f(E) \subset E$, calculer $f \circ f$ et montrer que $f \circ f \circ f = \text{Id}_E$. En déduire que f est bijective et exprimer f^{-1} . Est-ce une involution ? Points fixes ? Calculer $f(2)$, $f(f(2))$, $f(f(f(2)))$.
2. Trouver les $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\varphi(x) + \varphi(f(x)) = x$ pour tout $x \in E$ (analyse : écrire la relation en x , $f(x)$, $f(f(x))$; puis synthèse).

Exercice 21 Applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ ★★★

corrigé p. 46

1. Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante. a) Montrer que $f(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. b) On suppose de plus f surjective : montrer que $f = \text{Id}_{\mathbb{N}}$.
2. Déterminer les $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telles que $f(n) + f(n+1) = 2n+1$ pour tout n (poser $c = f(0)$). Sont-elles bijectives ?

Exercice 22 Applications « linéaires » de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{Z}^2$ ★★★

corrigé p. 47

Pour $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, on note $\varphi : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2, (m, n) \mapsto (am + bn, cm + dn)$, et $\delta = ad - bc$.

1. Si $\varphi(m, n) = (m + n, m - n)$, montrer que φ est injective, d'image $\{(u, v) \mid u - v \text{ pair}\}$. Surjective ?
2. Si $\delta = \pm 1$, montrer que φ est bijective (résoudre $\varphi(m, n) = (u, v)$). Exemple : f de l'exercice 13.
3. Si $\delta = 0$, calculer $\varphi(b, -a)$ et $\varphi(d, -c)$; en déduire que φ n'est pas injective.
4. On suppose $|\delta| \geq 2$ et, par l'absurde, $\varphi(m_1, n_1) = (1, 0)$, $\varphi(m_2, n_2) = (0, 1)$. Calculer $\delta m_1, \delta n_1, \delta m_2, \delta n_2$; en déduire que δ^2 divise δ . Conclure.

Exercice 23 Somme et produit ★★★

corrigé p. 47

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + y, xy)$.

1. Calculer $\varphi(2, 3)$ et $\varphi(3, 2)$. φ est-elle injective ?
2. Montrer que (s, p) a un antécédent si et seulement si $s^2 \geq 4p$ (penser à $t^2 - st + p = 0$). Surjective ? $\varphi^{-1}(\{(1, -6)\})$? $\varphi^{-1}(\{(4, 4)\})$?
3. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$ et $\Delta = \{(s, p) \in \mathbb{R}^2 \mid s^2 \geq 4p\}$. Montrer que $\psi : D \rightarrow \Delta, (x, y) \mapsto (x + y, xy)$ est bijective et expliciter ψ^{-1} .

18

Niveau 4 · Concours**Exercice 24** L'équation $f(f(n)) = 3n$ ★★★★★

corrigé p. 47

Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $f(f(n)) = 3n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $f(0) = 0$, $f(1) = 2$ et $f(2) = 3$. 2. Montrer que $f(3n) = 3f(n)$; en déduire $f(3^k)$ et $f(2 \times 3^k)$ ($k \in \mathbb{N}$).
3. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leq j \leq 3^k$, montrer que $f(3^k + j) = 2 \times 3^k + j$, puis que $f(2 \times 3^k + j) = 3^{k+1} + 3j$.
4. Calculer $f(100)$ et $f(2027)$. 5. Montrer que $f(0) = 0$ et les formules de 3. donnent une solution.

Exercice 25 Ensembles finis et tiroirs ★★★★★

corrigé p. 48

On admet que 2027 est premier.

1. Soit $R = \{0, \dots, 2026\}$ et $f : R \rightarrow R, n \mapsto \text{reste de } 7n \text{ dans la division par } 2027$. a) Montrer que f est injective, puis bijective. b) En déduire $n \in R$ et $q \in \mathbb{N}$ tels que $7n = 2027q + 1$; vérifier que $n = 1448$ convient.

2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $N_k = 11 \dots 1$ s'écrit avec k chiffres 1. a) Montrer que deux des entiers $N_1, \dots, N_{2028}$ ont le même reste dans la division par 2027. b) En déduire un multiple de 2027 qui s'écrit avec des 1 seulement.

Exercice 26 Quasi-inverses : $f \circ g \circ f = f$ ★★★★★

corrigé p. 48

Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$ deux applications telles que $f \circ g \circ f = f$.

1. Montrer que si f est injective, alors $g \circ f = \text{Id}_E$; que si f est surjective, alors $f \circ g = \text{Id}_F$; et que si f est bijective, alors $g = f^{-1}$.
2. Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, vérifier que $g(y) = \sqrt{|y|}$ convient.
3. Si $u : E \rightarrow E$ vérifie $u \circ u \circ u = u$, montrer que u est injective si et seulement si elle est surjective, et qu'alors $u^{-1} = u$. Exemple ni injectif ni surjectif ?

Exercice 27 Une bijection de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$ ★★★★★

corrigé p. 48

Soit $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $(m, n) \mapsto 2^m(2n+1) - 1$.

1. Tableau des $\varphi(m, n)$ pour $0 \leq m, n \leq 3$.
2. Montrer que tout entier $k \geq 1$ s'écrit de façon unique $k = 2^m a$ ($m \in \mathbb{N}$, a impair) : existence par récurrence forte, unicité par l'absurde.
3. En déduire que φ est bijective, calculer $\varphi^{-1}(2027)$ et $\varphi^{-1}(1023)$. Bijection de $\mathbb{N}^3$ sur $\mathbb{N}$?

Exercice 28 Cantor appliqué ★★★★★

corrigé p. 49

Cantor (cours) : aucune application de E dans $\mathcal{P}(E)$ n'est surjective. L'indicatrice $\mathbf{1}_A$ de $A \subset E$ vaut 1 sur A , 0 ailleurs ; $\mathcal{F}(E)$ est l'ensemble des applications de E dans $\{0, 1\}$.

1. Soit E non vide. Montrer qu'il n'existe aucune injection $j : \mathcal{P}(E) \rightarrow E$ (construire une surjection de E sur $\mathcal{P}(E)$).
2. Montrer que $\Phi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{F}(E)$, $A \mapsto \mathbf{1}_A$ est bijective, de réciproque $u \mapsto u^{-1}(\{1\})$. En déduire qu'il n'existe aucune surjection de E sur $\mathcal{F}(E)$.
3. Diagonale. Si $\Psi : E \rightarrow \mathcal{F}(E)$, $x \mapsto \psi_x$, montrer que $\delta : x \mapsto 1 - \psi_x(x)$ n'est pas dans $\Psi(E)$.

Exercice 29 Construire des bijections ★★★★★

corrigé p. 49

1. Soit f définie sur $[0, 1]$ par $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et $f(x) = x$ sinon. Montrer que f est une bijection de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$.
2. Sur le même modèle, construire une bijection de $[0, 1]$ sur $]0, 1[$.
3. À l'aide de g (exercice 14), d'une application affine et de 2., construire une bijection de $\mathbb{R}$ sur $[0, 1]$.
4. Construire une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 30 Le défi de la couverture ★★★★★

corrigé p. 49

1. On suppose que $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ vérifie $f(f(n)) = n + 1$ pour tout n . a) Montrer que $f(n+1) = f(n) + 1$ (calculer $f(f(f(n)))$ de deux façons). b) En déduire $f(n) = n + f(0)$, puis une contradiction.
2. Trouver $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $f(f(n)) = n + 2026$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. On suppose que $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ vérifie $f(f(n)) = n + 2027$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; on pose $R = \{0, 1, \dots, 2026\}$.
 - a) Montrer que $f(n + 2027) = f(n) + 2027$, puis $f(n + 2027q) = f(n) + 2027q$ ($n, q \in \mathbb{N}$).
 - b) Pour $r \in R$, soit $g(r)$ le reste de $f(r)$ dans la division par 2027. Montrer que si n a pour reste r , alors $f(n)$ a pour reste $g(r)$.
 - c) Montrer que $g \circ g = \text{Id}_R$ et que g n'a pas de point fixe. d) Soit $S = \{r \in R / r < g(r)\}$. Montrer que g induit une bijection de S sur $R \setminus S$. Conclure.
4. Pour quels entiers $k \in \mathbb{N}$ existe-t-il $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $f(f(n)) = n + k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?

Partie C • La banque

36 exercices supplémentaires classés par thème, du niveau Bases au niveau Concours

19 Images et antécédents

Une application associe à chaque élément de l'ensemble de départ **une et une seule** image dans l'ensemble d'arrivée ; un élément de l'ensemble d'arrivée peut avoir zéro, un ou plusieurs antécédents.

Exercice 31 Application ou pas ? ★

corrigé p. 50

- Sur $E = F = \{1, 2, 3, 4\}$, on considère les relations $\mathcal{R}_1$: « y est le reste de la division euclidienne de x^2 par 5 », $\mathcal{R}_2$: « y divise x », $\mathcal{R}_3$: « $x + y = 5$ » et $\mathcal{R}_4$: « x divise y et $x \neq y$ ».
a) Représenter le graphe de chaque relation dans un tableau (lignes : $x \in E$; colonnes : $y \in F$; une croix si x est en relation avec y). b) Lesquelles sont des applications de E dans F ? Comment le voit-on sur le tableau ? c) Pour celles-ci, donner les antécédents de chaque élément de F .
- Définit-on ainsi une application de l'ensemble de départ dans l'ensemble d'arrivée indiqués ? Justifier.
a) $n \mapsto \frac{n(n+1)}{2}$, de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$; b) $n \mapsto \frac{n^2+1}{2}$, de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, puis de l'ensemble I des entiers naturels impairs dans $\mathbb{N}$;
c) $x \mapsto \sqrt{4-x^2}$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de $[-2, 2]$ dans $[0, 1]$, puis de $[-2, 2]$ dans $[0, 2]$; d) $x \mapsto \frac{x+2}{x^2+x+1}$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$;
e) « à tout réel x , on associe un entier n tel que $|x - n| \leq \frac{1}{2}$ », de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$. Même question en remplaçant « $\leq$ » par « $<$ », et $\mathbb{R}$ par l'ensemble D des réels qui ne s'écrivent pas $k + \frac{1}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 32 Calculer des images et des antécédents ★

corrigé p. 51

- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x^2 + 4x - 1$.
a) Vérifier que $f(x) = 2(x+1)^2 - 3$. Calculer les images par f de 0, $-1, \frac{1}{2}$ et $-1 + \sqrt{2}$.
b) Déterminer les antécédents par f de -1 , de -3 , de -5 et de 1.
c) Selon la valeur du réel y , donner le nombre d'antécédents de y par f , puis les calculer.
d) Les points $A(-2, -1)$ et $B(1, 4)$ appartiennent-ils au graphe de f ? Quels sont les points du graphe d'ordonnée 15 ?
- Soit $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |2x - 3| + 1$. Calculer $k(0)$, $k(\frac{3}{2})$ et $k(-1)$, puis les antécédents de 6, de 1 et de 0. Plus généralement, combien un réel y a-t-il d'antécédents par k ?

Exercice 33 Combien d'antécédents ? ★★

corrigé p. 51

Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2+5}{x-2}$, et soit y un réel.

1. Montrer que les antécédents de y par f sont exactement les solutions réelles de l'équation $(\mathcal{E}_y) : x^2 - yx + 2y + 5 = 0$ (vérifier que 2 n'est jamais solution de $(\mathcal{E}_y)$).
2. Calculer et factoriser le discriminant de $(\mathcal{E}_y)$. En déduire, selon y , le nombre d'antécédents de y . Quels réels ont exactement un antécédent ?
3. En déduire $f(\mathbb{R} \setminus \{2\})$, l'ensemble des réels qui ont au moins un antécédent. Interpréter avec les droites d'équation $y = m$ et la courbe de f .
4. a) Vérifier que $f(x) - 10 = \frac{(x-5)^2}{x-2}$ et $f(x) + 2 = \frac{(x+1)^2}{x-2}$. b) En déduire que $f(x) \geq 10$ si $x > 2$, et $f(x) \leq -2$ si $x < 2$. c) Montrer que, si $y > 10$, les deux antécédents de y sont strictement supérieurs à 2. Que dire si $y < -2$?

Exercice 34 Égalité, restriction, prolongement ★★

corrigé p. 52

1. Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $f(x) = |x - 1| + |x + 1|$ et $g(x) = |x| + 1 + \big||x| - 1\big|$. Montrer que $f = g$. Donner une expression simple de chacune des restrictions $f|_{[-1,1]}$ et $f|_{[1,+\infty[}$.
2. On note u, v et w les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ qui associent à n le reste de la division euclidienne, respectivement, de n^2 par 4, de n par 2 et de n^2 par 8. Montrer que $u = v$, que $w \neq u$, et que la restriction de w à l'ensemble I des entiers naturels impairs est constante.
3. Soit $h : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 5x$. a) Montrer que h admet un unique prolongement pair $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, et l'écrire à l'aide d'une valeur absolue. b) Même question pour un prolongement impair $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. c) L'application $x \mapsto x^2 + 1$, de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, admet-elle un prolongement impair à $\mathbb{R}$?

Exercice 35 Graphes dans le plan ★★★

corrigé p. 52

Une partie Γ de $\mathbb{R}^2$ est le graphe d'une application de A dans $\mathbb{R}$ si et seulement si A est l'ensemble des abscisses des points de Γ et si chaque $x \in A$ est l'abscisse d'un **seul** point de Γ . On note $E(y)$ la partie entière de y (l'entier n tel que $n \leq y < n + 1$).

1. Pour chacune des parties suivantes, déterminer l'ensemble A des abscisses de ses points, puis dire si elle est le graphe d'une application de A dans $\mathbb{R}$ (si oui, donner cette application) :

$$\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - 2xy + x^2 = 0\}; \quad \Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy - y = 2x\};$$

$$\Gamma_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y + |y| = 2x\}; \quad \Gamma_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = E(y)\}.$$

2. Soit $\Gamma_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - (x + 2)y + 2x = 0\}$.

- a) Montrer que Γ_5 est la réunion de deux droites. Est-ce le graphe d'une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?
- b) Montrer qu'il existe une infinité d'applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dont le graphe est contenu dans Γ_5 .
- c) Montrer qu'une seule d'entre elles vérifie $f(x) \geq x$ et $f(x) \geq 2$ pour tout réel x , et que c'est $x \mapsto \frac{x+2+|x-2|}{2}$.

Exercice 36 Une boucle dans le plan ★★★

corrigé p. 53

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t^2 - 1, t^3 - t)$. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des points (x, y) du plan tels que $y^2 = x^2(x + 1)$.

1. Calculer $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(-1)$, $\varphi(2)$ et $\varphi(-2)$. Déterminer les antécédents par φ des points $(3, 6)$, $(0, 0)$, $(-1, 1)$ et $(8, 24)$.
2. Montrer que $\varphi(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}$. Réciproquement, soit $M(x, y) \in \mathcal{C}$: montrer que M a un antécédent (distinguer $x = 0$ et $x \neq 0$, et poser alors $t = \frac{y}{x}$). Conclure.
3. Montrer que tout point de $\mathcal{C}$ autre que l'origine O a un **unique** antécédent, et que O en a deux (on dit que O est un *point double* de $\mathcal{C}$).
4. Montrer que $\varphi([-1, 1])$ est l'ensemble des points de $\mathcal{C}$ d'abscisse comprise entre -1 et 0 (la « boucle »). Déterminer de même $\varphi([1, +\infty[)$.

20

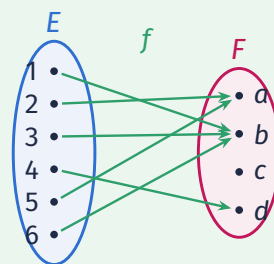
Image directe et réciproque

Pour obtenir $f(A) = J$: on encadre $f(x)$ pour $x \in A$ (inclusion $f(A) \subset J$), puis, pour $y \in J$, on trouve $x \in A$ tel que $f(x) = y$ (inclusion $J \subset f(A)$). Pour $f^{-1}(B)$: on résout « $f(x) \in B$ ».

Exercice 37 Sur un diagramme ★

corrigé p. 54

L'application $f : E \rightarrow F$, avec $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $F = \{a, b, c, d\}$, est donnée par le diagramme ci-contre.



1. Déterminer $f(\{1, 2\})$, $f(\{1, 3, 6\})$, $f(\{4, 5, 6\})$ et $f(E)$.
2. Déterminer $f^{-1}(\{a\})$, $f^{-1}(\{b, c\})$, $f^{-1}(\{c\})$, $f^{-1}(\{a, d\})$ et $f^{-1}(F)$.
3. Trouver toutes les parties A de E telles que $f(A) = \{a, d\}$.
4. Trouver toutes les parties B de F telles que $f^{-1}(B) = \{2, 4, 5\}$. Existe-t-il une partie B de F telle que $f^{-1}(B) = \{1, 2\}$?
5. Comparer $f(f^{-1}(\{a, c\}))$ et $\{a, c\}$, puis $f^{-1}(f(\{1\}))$ et $\{1\}$.

Exercice 38 Valeur absolue et fonction affine ★

corrigé p. 54

1. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x - 2|$.
 - a) Déterminer $g([3, 5])$, $g([0, 3])$ et $g(]-1, 1[)$.
 - b) Déterminer $g^{-1}([0, 1])$, $g^{-1}([2, +\infty[)$, $g^{-1}(\{3\})$ et $g^{-1}([-2, -1])$.
 - c) Comparer $g([0, 3])$ et $g([0, 2]) \cup g([2, 3])$, puis $g([0, 2] \cap [2, 4])$ et $g([0, 2]) \cap g([2, 4])$.
2. Soit $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 4 - \frac{x}{2}$. Déterminer $a([-2, 6])$, $a(]-\infty, 0])$ et $a^{-1}([0, 3])$.

Exercice 39 Un trinôme et des intervalles ★★

corrigé p. 55

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -x^2 + 4x - 1$.

1. Écrire $f(x)$ sous forme canonique ; en déduire le sens de variation de f et, pour $y \leq 3$, les antécédents de y .
2. Déterminer $f([0, 3])$, $f([3, 5])$ et $f(]-1, 1])$.

- Déterminer $f^{-1}([2, 3])$, $f^{-1}(]-\infty, -1[)$, $f^{-1}(\{4\})$ et $f^{-1}([-1, 2])$.
- On pose $A = [0, 1]$ et $A' = [3, 4]$. Calculer $f(A)$ et $f(A')$. Comparer $f(A \cap A')$ et $f(A) \cap f(A')$, puis $f^{-1}(f(A))$ et A . Comparer enfin $f(f^{-1}([2, 7]))$ et $[2, 7]$.
- a) Déterminer le réel $a \leq 2$ tel que $f([a, 2]) = [-6, 3]$. b) Déterminer tous les réels $b \geq 2$ tels que $f([0, b]) = [-1, 3]$.

Exercice 40 Racine carrée et quotient ★★

corrigé p. 55

- Soit $r : [-2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 3 - \sqrt{x+2}$.
a) Étudier le sens de variation de r et, pour $y \leq 3$, résoudre $r(x) = y$. b) Déterminer $r([-1, 7])$ et $r([-2, +\infty[)$.
c) Déterminer $r^{-1}([1, 2])$, $r^{-1}([3, 5])$, $r^{-1}(]-\infty, 0[)$ et $r^{-1}([-1, 3])$.
- Soit $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{4}{x^2+1}$.
a) Montrer que $k(\mathbb{R}) =]0, 4]$. b) Déterminer $k([-1, 2])$ et $k([1, +\infty[)$.
c) Déterminer $k^{-1}([1, 2])$, $k^{-1}(]2, +\infty[)$, $k^{-1}(\{4\})$ et $k^{-1}(]-\infty, 0])$.
d) Calculer $k^{-1}([2, 8])$, puis $k(k^{-1}([2, 8]))$.

Exercice 41 Formules et inclusions ★★★

corrigé p. 56

Soit $f : E \rightarrow F$ une application, A une partie de E et B une partie de F . On pourra utiliser les inclusions du cours $A \subset f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

- Montrer que $f(A) \subset B \iff A \subset f^{-1}(B)$.
- Montrer que $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$. En déduire que $f(A) \cap B = \emptyset \iff A \cap f^{-1}(B) = \emptyset$.
- Montrer que $f(f^{-1}(f(A))) = f(A)$ et que $f^{-1}(f(f^{-1}(B))) = f^{-1}(B)$.
- a) Montrer que $A = f^{-1}(f(A))$ si et seulement s'il existe une partie B' de F telle que $A = f^{-1}(B')$.
b) Ici $E = F = \mathbb{R}$ et $f(x) = |x - 1|$. Montrer que $A = f^{-1}(f(A))$ si et seulement si, pour tout $x \in A$, $2 - x \in A$. Vérifier sur $A = [0, 2]$ et sur $A = [1, 2]$.

Exercice 42 Le segment invariant ★★★

corrigé p. 57

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 - 2$. On dit qu'un segment $[a, b]$ (avec $a < b$) est *invariant* si $f([a, b]) = [a, b]$.

- Montrer que $f([-2, 2]) = [-2, 2]$, $f([2, +\infty[) = [2, +\infty[$ et $f^{-1}([-2, 2]) = [-2, 2]$.
- Soit $[a, b]$ un segment invariant. Montrer que $[a, b] = [-2, 2]$ en examinant les trois cas :
a) $0 \leq a$; b) $b \leq 0$ (montrer alors que $a + b = -1$) ; c) $a < 0 < b$ (montrer alors que $f([a, b]) = [-2, M - 2]$, où M est le plus grand des réels a^2 et b^2).
- a) Montrer que, pour toute partie B de $\mathbb{R}$: si $x \in f^{-1}(B)$, alors $-x \in f^{-1}(B)$.
b) Déterminer les segments $[a, b]$ ($a < b$) tels que $f^{-1}([a, b]) = [a, b]$.

21 Injections et surjections

Injectivité : de $f(x) = f(x')$, on déduit $x = x'$. Surjectivité : pour $y \in F$, on cherche $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Pour réfuter : deux éléments distincts de même image, ou un élément de F sans antécédent.

Exercice 43 Départ et arrivée ★

corrigé p. 57

- Dire si l'application $f : E \rightarrow F, x \mapsto |x + 2|$, est injective, surjective, bijective lorsque :
 a) $E = F = \mathbb{R}$; b) $E = [-2, +\infty[, F = \mathbb{R}$; c) $E = \mathbb{R}, F = [0, +\infty[$;
 d) $E = [-2, +\infty[, F = [0, +\infty[$; e) $E = [-3, 1], F = [0, 3]$.
- Soient $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{a, b, c\}$. a) Donner une surjection de E sur F . b) Expliquer pourquoi il n'existe aucune injection de E dans F . c) Donner une injection de F dans E . Existe-t-il une surjection de F sur E ?

Exercice 44 Applications de $\mathbb{N}$ et de $\mathbb{Z}$ ★

corrigé p. 58

Chaque application est-elle injective ? surjective ? (Contre-exemple en cas de réponse négative.)

- a) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto 3n + 2$; b) $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*, n \mapsto$ nombre de chiffres de n ($g(0) = 1$) ; c) $h : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto n^2 + n$; d) $k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto (-1)^n n$.

Décrire $f(\mathbb{N})$; comparer $h(-1 - n)$ et $h(n)$; montrer que $h|_{\mathbb{N}}$ est injective.

Exercice 45 Une application du plan ★★

corrigé p. 58

Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (y - x^2, y + x^2)$.

- Calculer $\varphi(1, 0)$, $\varphi(-1, 0)$, $\varphi(2, 3)$ et $\varphi(0, 1)$. L'application φ est-elle injective ?
- Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre $\varphi(x, y) = (u, v)$; en déduire, selon u et v , le nombre d'antécédents de (u, v) .
- φ est-elle surjective ? Montrer que $\varphi(\mathbb{R}^2) = \Delta$, où $\Delta = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u \leq v\}$.
- Soit $P = [0, +\infty[\times \mathbb{R}$. Montrer que $\psi : P \rightarrow \Delta, (x, y) \mapsto \varphi(x, y)$ est bijective, et donner ψ^{-1} .

Exercice 46 Deux fonctions numériques ★★

corrigé p. 59

- Soit $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$. a) Montrer que u n'est pas injective.
 b) Montrer que $u(x) = 1 - \frac{2}{x^2 + 1}$, puis que $-1 \leq u(x) < 1$; u est-elle surjective ?
 c) Montrer que $u(\mathbb{R}) = [-1, 1[$. d) Montrer que l'application $U : [0, +\infty[\rightarrow [-1, 1[, x \mapsto u(x)$, est bijective.
- On note $E(x)$ la partie entière de x (l'unique entier k tel que $k \leq x < k + 1$), et $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x - 2E(x)$.
 a) Calculer $v\left(\frac{1}{2}\right)$, $v(1)$, $v\left(\frac{3}{2}\right)$ et $v\left(-\frac{1}{2}\right)$. L'application v est-elle monotone sur $\mathbb{R}$?
 b) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $k = E(x)$. Montrer que $-k \leq v(x) < -k + 1$, et en déduire que $E(v(x)) = -E(x)$.
 c) En déduire que v est injective. d) Calculer $v(y - 2E(y))$; conclure. Que montre cet exemple ?

Exercice 47 Une application sur $\mathcal{P}(E)$ ★★★

corrigé p. 59

Soient E un ensemble, B et C deux parties de E , et $\Phi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(B) \times \mathcal{P}(C)$, $A \mapsto (A \cap B, A \cap C)$.

1. Si $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{2, 3\}$: calculer $\Phi(\{1, 3, 4\})$ et $\Phi(\{1, 3\})$; $(\{2\}, \emptyset)$ a-t-il un antécédent ?
2. Montrer que Φ est injective si et seulement si $B \cup C = E$ (sens direct : par contraposée).
3. Montrer que Φ est surjective si et seulement si $B \cap C = \emptyset$.
4. On suppose que $C = C_E^B$. Montrer que Φ est bijective et que sa réciproque est $(U, V) \mapsto U \cup V$.

Exercice 48 Images de parties ★★★

corrigé p. 60

Soit $f : E \rightarrow F$. On pose $\varphi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(F)$, $A \mapsto f(A)$, et $\psi : \mathcal{P}(F) \rightarrow \mathcal{P}(E)$, $B \mapsto f^{-1}(B)$.

1. Exemple : $E = \{1, 2, 3\}$, $F = \{a, b, c\}$, $f(1) = f(2) = a$, $f(3) = b$. Montrer que φ et ψ ne sont ni injectives ni surjectives.
2. Montrer : f injective $\iff \varphi$ injective (singletons) ; f surjective $\iff \varphi$ surjective.
3. Montrer : f surjective $\iff \psi$ injective ; f injective $\iff \psi$ surjective.

22

Bijections et réciproques

Pour montrer que $f : E \rightarrow F$ est bijective, on fixe $y \in F$ et l'on résout $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$: **une solution et une seule** pour chaque y , c'est la bijectivité, et cette solution est $f^{-1}(y)$.

Exercice 49 Résoudre $y = f(x)$ ★

corrigé p. 60

1. Vérifier que chaque application est bien définie et bijective (résoudre « image = y »), et donner sa réciproque :
 a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{5-2x}{4}$; b) $g :]-\infty, 2] \rightarrow [-5, +\infty[$, $x \mapsto 3x^2 - 12x + 7$; c) $h : [0, +\infty[\rightarrow [0, 1[$,
 $x \mapsto \frac{x}{x+2}$.
2. Calculer $f^{-1}(1)$, $g^{-1}(7)$ et $h^{-1}(\frac{1}{2})$, et vérifier chaque résultat.
3. Montrer que $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 3x^2 - 12x + 7$ n'est ni injective ni surjective. Qu'est-ce qui a changé par rapport à g ?

Exercice 50 Les symétries d'un carré ★

corrigé p. 61

$ABCD$ est un carré de centre O (sommets nommés dans le sens direct) et $E = \{A, B, C, D\}$. On note $r : E \rightarrow E$ le quart de tour direct de centre O : $r(A) = B$, $r(B) = C$, $r(C) = D$, $r(D) = A$; et $s : E \rightarrow E$ la symétrie d'axe (AC) .

1. Représenter r et s par des diagrammes sagittaux. Justifier qu'elles sont bijectives et donner r^{-1} .
2. Montrer que $s \circ s = \text{Id}_E$. Calculer $r \circ r$, $r \circ r \circ r$, $r \circ r \circ r \circ r$, et en déduire r^{-1} à l'aide de r .
3. Calculer $r \circ s$ et $s \circ r$. Sont-elles égales ? Montrer que ce sont des involutions et les interpréter.
4. Calculer $(r \circ s)^{-1}$ avec la formule du cours, puis à l'aide de 3. A-t-on $(r \circ s)^{-1} = r^{-1} \circ s^{-1}$?

Exercice 51 Deux transformations du plan ★★

corrigé p. 61

On définit $\varphi, \psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ par $\varphi(x, y) = (x + y^2, y)$ et $\psi(x, y) = (x, y - 2x)$.

1. Montrer que φ et ψ sont bijectives en résolvant « image = (u, v) » ; donner φ^{-1} et ψ^{-1} .
2. On pose $\theta = \psi \circ \varphi$. Calculer $\theta(x, y)$; montrer que θ est bijective et donner $\theta^{-1}(u, v)$; vérifier que $\theta^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}$.
3. Comparer $\psi^{-1} \circ \varphi^{-1}$ et θ^{-1} au point $(0, 1)$. Déterminer les points invariants de θ .

Exercice 52 Une bijection affine par morceaux ★★

corrigé p. 62

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + |x - 1|$.

1. Écrire $f(x)$ sans valeur absolue. Soit $y \in \mathbb{R}$: résoudre $f(x) = y$ en distinguant $y < 2$ et $y \geq 2$. En déduire que f est bijective, exprimer $f^{-1}(y)$, et vérifier que $f^{-1}(y) = \frac{2y-1-|y-2|}{3}$.
2. Tracer dans un repère orthonormé les courbes de f , de f^{-1} et la droite $\Delta : y = x$.
3. Montrer que $f(x) > x$ pour tout réel x ; en déduire que $f^{-1}(y) < y$, puis que les courbes de f et f^{-1} ne se coupent pas.
4. Comparer l'image réciproque de $[0, 5]$ par f et l'image directe de $[0, 5]$ par f^{-1} . Pourquoi la notation $f^{-1}(B)$ est-elle sans ambiguïté lorsque f est bijective ?

Exercice 53 Une involution du plan ★★★

corrigé p. 62

Dans un repère orthonormé d'origine O , on note P^* le plan privé de O (identifié à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$) et l'on définit $\tau : P^* \rightarrow P^*$ par $\tau(x, y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right)$.

1. Justifier que τ est bien définie. Pour $M \in P^*$ et $M' = \tau(M)$, montrer que $\vec{OM}' = \frac{1}{OM^2} \vec{OM}$ et que $OM \times OM' = 1$.
2. Montrer que $\tau \circ \tau = \text{Id}_{P^*}$; en déduire que τ est bijective et donner τ^{-1} . Déterminer l'ensemble des points fixes de τ .
3. Soit D la droite d'équation $x = 1$, $I\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et Γ l'ensemble des points $M(x, y) \neq O$ tels que $x^2 + y^2 = x$.
a) Montrer que $M \in \Gamma \iff (M \neq O \text{ et } IM = \frac{1}{2})$. b) Déterminer l'image réciproque de D par τ , puis en déduire $\tau(D)$ et $\tau(\Gamma)$.
4. Soit $\sigma(x, y) = (x, -y)$. Montrer que $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$, puis que $\tau \circ \sigma$ est une involution de P^* ; déterminer ses points fixes.

Exercice 54 Involutions ★★★

corrigé p. 63

Rappel : si $f \circ f = \text{Id}_E$ (f est une *involution*), alors f est bijective et $f^{-1} = f$.

1. Soit $u : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $u(x) = \frac{1-x}{1+x}$. a) Justifier que u est bien définie et que c'est une involution. b) Déterminer ses points fixes. c) Montrer que u est strictement décroissante, puis que $u([0, \sqrt{2} - 1]) = [\sqrt{2} - 1, 1]$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une involution strictement croissante. Montrer par l'absurde que $f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$.
3. Soit s et t deux involutions d'un ensemble E . a) Montrer que $(s \circ t)^{-1} = t \circ s$, puis que $s \circ t$ est une involution si et seulement si $s \circ t = t \circ s$. b) Exemple : $s(x) = -x$ et $t(x) = 2 - x$ sur $\mathbb{R}$; calculer $s \circ t$ et $t \circ s$. Montrer que toute translation $x \mapsto x + c$ est la composée de deux involutions de $\mathbb{R}$.

23 Composition

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$ existe si $x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$. On compose pour calculer, pour décomposer et pour transférer des propriétés ; en général, $g \circ f \neq f \circ g$.

Exercice 55 Composer dans les deux sens ★

corrigé p. 63

Soit $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5 - 2x$ et $g(x) = x^2 + 2$.

1. Calculer $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$ et $(f \circ f)(x)$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$? Montrer que $(f \circ g)(x) < (g \circ f)(x)$ pour tout réel x .
2. Calculer $(f \circ g \circ f)(x)$ de deux façons : $((f \circ g) \circ f)(x)$ et $(f \circ (g \circ f))(x)$.
3. Avec $r(x) = \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$ et $i(x) = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$, écrire comme composée de deux des fonctions f, g, r, i , en précisant le domaine : a) $\sqrt{x^2 + 2}$; b) $\frac{1}{5-2x}$; c) $5 - 2\sqrt{x}$; d) $\frac{1}{x^2} + 2$; e) $\frac{1}{x^2+2}$.

Exercice 56 Domaine d'une composée ★

corrigé p. 64

Soit $f(x) = \sqrt{x-2}$ et $g(x) = \frac{1}{x-3}$.

1. Donner D_f et D_g . Déterminer le domaine de $g \circ f$ et exprimer $(g \circ f)(x)$.
2. Même question pour $f \circ g$ (écrire $g(x) - 2$ sous la forme d'un quotient).
3. Même question pour $f \circ f$, puis pour $g \circ g$. L'expression simplifiée de $(g \circ g)(x)$ a-t-elle un sens en $x = 3$? Commenter.

Exercice 57 Une droite et ses projections ★★

corrigé p. 64

D est la droite d'équation $y = 3x - 1$; on pose $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (t, 3t - 1)$ et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = \frac{y-x+1}{2}$.

1. Montrer que $g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$. Qu'en déduit-on pour f et pour g ?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = D$. f est-elle surjective ? g est-elle injective ? A-t-on $f \circ g = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$?
3. Soit $p = f \circ g$. a) Calculer $p(x, y)$ et montrer, sans calcul, que $p \circ p = p$. b) Montrer que $p(M) \in D$, que $p(M) = M \iff M \in D$, et que $Mp(M)$ est colinéaire à $\vec{u}(1, 1)$. Interpréter p .
4. Déterminer les applications $g_1(x, y) = ax + by + c$ (a, b, c réels) telles que $g_1 \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$. Y en a-t-il une seule ? Interpréter $f \circ g_1$ pour $g_1(x, y) = x$.

Exercice 58 Images d'une composée ★★

corrigé p. 64

Soit $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x) = x^2 - 2x$, $v : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $v(t) = \frac{2}{t}$, et $w = v \circ u$.

1. Déterminer le domaine D_w et $w(x)$. Vérifier que $w(2-x) = w(x)$; w est-elle injective ?
2. Montrer que $u(]2, +\infty[) =]0, +\infty[$ et $u(]0, 2[) = [-1, 0[$; en déduire, avec $(v \circ u)(A) = v(u(A))$, les ensembles $w(]2, +\infty[)$ et $w(]0, 2[)$.
3. Déterminer $v^{-1}(]1, +\infty[)$, puis résoudre $w(x) \geq 1$ en utilisant $w^{-1}(C) = u^{-1}(v^{-1}(C))$.
4. Montrer que la restriction W de w à $]2, +\infty[$ est une bijection de $]2, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$ et calculer $W^{-1}(y)$.

Exercice 59 Composer dans $\mathcal{P}(E)$ ★★★

corrigé p. 65

Soit E un ensemble. Pour $B \subset E$, on définit sur $\mathcal{P}(E)$ les applications $i_B : A \mapsto A \cap B$ et $u_B : A \mapsto A \cup B$; on note $c : A \mapsto C_E^A$.

1. Montrer que $i_B \circ i_{B'} = i_{B \cap B'}$ et $u_B \circ u_{B'} = u_{B \cup B'}$. Que vaut $i_B \circ i_B$?
2. Montrer que $c \circ i_B \circ c = u_{C_E^B}$, puis en déduire, sans calcul sur les ensembles, que $c \circ u_B \circ c = i_{C_E^B}$.
3. Soit $B, C \subset E$. Calculer $(i_B \circ u_C)(A)$ et $(u_C \circ i_B)(A)$; montrer que $i_B \circ u_C = u_C \circ i_B \iff C \subset B$.
4. Soit $h = i_B \circ u_C$. a) Montrer que $h \circ h = h$. b) Montrer que $h(A) = A \iff C \cap B \subset A \subset B$; en déduire $h(\mathcal{P}(E))$. c) Pour $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{3, 4\}$: lister les A tels que $h(A) = A$. h est-elle injective ? surjective ?

Exercice 60 Applications conjuguées ★★★

corrigé p. 65

Soit $\varphi : E \rightarrow F$ une bijection. À toute application $f : E \rightarrow E$, on associe $f^* = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$, application de F dans F (on dit que f et f^* sont conjuguées).

1. Montrer que $(\text{Id}_E)^* = \text{Id}_F$ et que $(f \circ g)^* = f^* \circ g^*$. En déduire que si f est une involution, f^* aussi, et que si f est bijective, f^* aussi, avec $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.
2. Montrer que $f(x) = x \iff f^*(\varphi(x)) = \varphi(x)$. En déduire que φ réalise une bijection de l'ensemble des points fixes de f sur celui de f^* .
3. Ici $E = F = \mathbb{R}$, $\varphi(x) = x + 3$ et $f(x) = 2x$. Calculer $f^*(y)$, puis $f^* \circ f^* \circ f^*$ à l'aide de $f \circ f \circ f$; vérifier.
4. a) Trouver φ affine telle que $x \mapsto 4 - x$ soit la conjuguée de $x \mapsto -x$. b) Montrer que $x \mapsto 2 - x$ et $x \mapsto x + 1$ ne sont conjuguées par aucune bijection φ de $\mathbb{R}$.

24

Défis de concours

Équation fonctionnelle, ensembles finis, argument diagonal, constructions de bijections : les applications au cœur des concours.

Exercice 61 Une équation fonctionnelle sur $\mathbb{Z}$ ★★★★★

corrigé p. 66

1. On cherche les $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ telles que $(*) \forall x \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathbb{Z}, f(x + f(y)) = f(x) + y$. Soit f une solution et $a = f(0)$.
a) Montrer que $f(f(y)) = y + a$ pour tout y , puis que f est bijective. b) Soit y_0 l'antécédent de 0. En prenant $y = y_0$ dans $(*)$, montrer que $y_0 = 0$, puis que $a = 0$ et $f \circ f = \text{Id}_{\mathbb{Z}}$. c) En remplaçant y par $f(y)$ dans $(*)$, montrer que $f(x + y) = f(x) + f(y)$, puis que $f(n) = n f(1)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. d) Déterminer toutes les solutions.
2. Montrer qu'aucune $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ne vérifie $f(x + f(y)) = f(x) + 2y$ pour tous $x, y \in \mathbb{Z}$. Et pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et x, y réels ?

Exercice 62 Le mélange parfait ★★★★★

corrigé p. 66

Pour $h : E \rightarrow E$, on pose $h_1 = h$ et $h_{k+1} = h \circ h_k$ ($h_k = h \circ \dots \circ h$, k fois) ; on admet que $h_{i+j} = h_i \circ h_j$.

1. Soit E un ensemble fini non vide et h une bijection de E . a) Justifier qu'il n'y a qu'un nombre fini d'applications de E dans E , puis qu'il existe $1 \leq i < j$ tels que $h_i = h_j$. b) Montrer qu'il existe $k \geq 1$ tel que $h_k = \text{Id}_E$. c) Montrer par des exemples que c'est faux si h n'est pas bijective, ou si E est infini.
2. On numérote $0, \dots, 2m - 1$ (de haut en bas) les positions des $2m$ cartes d'un paquet ($m \geq 2$), et $N = 2m - 1$. Un *mélange parfait* coupe le paquet en deux moitiés et les intercale : la carte de position $i \leq m - 1$ va en position $s(i) = 2i$, celle de position $m + j$ ($0 \leq j \leq m - 1$) en position $s(m + j) = 2j + 1$.
 - a) Montrer que s est une bijection de $\{0, \dots, N\}$, que $s(N) = N$ et que, pour $i \leq N - 1$, $s(i)$ est le reste de la division euclidienne de $2i$ par N .
 - b) Montrer par récurrence que, pour $i \leq N - 1$, $s_k(i)$ est le reste de $2^k i$ par N ; en déduire que $s_k = \text{Id} \iff N$ divise $2^k - 1$.
 - c) Combien de mélanges parfaits faut-il au minimum pour retrouver l'ordre initial d'un paquet de 10 cartes ? de 52 cartes ?

Exercice 63 La diagonale de Cantor et les points fixes ★★★★★

corrigé p. 67

On note $\mathcal{A}(E, F)$ l'ensemble des applications de E dans F ; pour $\Phi : E \rightarrow \mathcal{A}(E, F)$, on note $\Phi_x = \Phi(x)$.

1. *Exemple.* Pour $n \in \mathbb{N}$, $\Phi_n(m) = nm + 1$ ($m \in \mathbb{N}$), et $h(m) = \Phi_m(m) + 1$. Montrer que $h \neq \Phi_n$ pour tout n . Conclusion ?
2. *Point fixe.* Soit $\Phi : E \rightarrow \mathcal{A}(E, F)$ surjective et $t : F \rightarrow F$ quelconque. On pose $h(x) = t(\Phi_x(x))$ pour $x \in E$. Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que $h = \Phi_a$, puis que $\Phi_a(a)$ est un point fixe de t .
3. En déduire que, si F a au moins deux éléments, il n'existe aucune surjection de E sur $\mathcal{A}(E, F)$. Exemples : $\mathbb{N}$ et $\mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$; $\mathbb{R}$ et l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Que se passe-t-il si F a un seul élément ?

Exercice 64 Parties finies et écriture binaire ★★★★★

corrigé p. 67

Soit $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$. Pour $A \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$, $b(A)$ est la somme des 2^a pour $a \in A$, et $b(\emptyset) = 0$; par exemple $b(\{0, 2, 5\}) = 1 + 4 + 32 = 37$.

1. Calculer $b(\{0, 3, 4\})$. Montrer que, si $A \subset \{0, 1, \dots, m - 1\}$, alors $b(A) \leq 2^m - 1$.
2. *Injectivité.* Soit $A \neq B$ dans $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ et m le plus grand entier qui appartient à une seule des deux parties, disons $m \in A$, $m \notin B$. Montrer que $b(A) - b(B) \geq 2^m - (2^m - 1)$ et conclure.
3. *Surjectivité.* Montrer par récurrence forte que tout $n \in \mathbb{N}$ a un antécédent par b (si $n \geq 1$, considérer l'entier m tel que $2^m \leq n < 2^{m+1}$). Conclure, puis déterminer $b^{-1}(100)$ et $b^{-1}(2026)$.

Exercice 65 Permutations et parité ★★★★★

corrigé p. 68

Soit $n \geq 1$, $E_n = \{1, \dots, n\}$ et σ une bijection de E_n sur E_n (une *permutation*).

1. On suppose n impair. Montrer par l'absurde que $P = (\sigma(1) - 1)(\sigma(2) - 2) \dots (\sigma(n) - n)$ est pair (compter les éléments pairs et impairs de E_n). Pour n pair, donner un σ pour laquelle P est impair.
2. Justifier que $\sigma(1) + \dots + \sigma(n) = 1 + \dots + n$, puis montrer que $|\sigma(1) - 1| + \dots + |\sigma(n) - n|$ est pair.

3. Soit r_k le reste de la division euclidienne de $k + \sigma(k)$ par n . a) Si n est pair, montrer par l'absurde que $r_1, \dots, r_n$ ne sont pas deux à deux distincts (que vaudrait leur somme ?). b) Si n est impair, montrer que pour $\sigma = \text{Id}_{E_n}$ ils sont deux à deux distincts.

Exercice 66 Un point fixe et le théorème de Cantor–Bernstein ★★★★★

corrigé p. 68

$\Phi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ est croissante si $A \subset B \Rightarrow \Phi(A) \subset \Phi(B)$.

1. Soit Φ croissante et M l'ensemble des $x \in E$ appartenant à au moins une partie A telle que $A \subset \Phi(A)$. a) Montrer que $M \subset \Phi(M)$. b) En déduire que $\Phi(M) \subset M$, puis que $\Phi(M) = M$.
2. Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$ deux injections, et $\Phi(A) = E \setminus g(F \setminus f(A))$ pour $A \subset E$.
 - a) Montrer que Φ est croissante. On fixe M telle que $\Phi(M) = M$. b) Montrer que tout $x \notin M$ a un unique antécédent par g , noté $\gamma(x)$, et que $\gamma(x) \notin f(M)$.
 - c) Soit $h : E \rightarrow F$, $h(x) = f(x)$ si $x \in M$ et $h(x) = \gamma(x)$ si $x \notin M$. Montrer que h est bijective (théorème de Cantor–Bernstein).
3. Application : $E = F = \mathbb{N}$, $f(n) = n + 1$, $g(n) = n + 2$. a) Montrer que $\Phi(A) = \{0, 1\} \cup \{a + 3 : a \in A\}$. b) Vérifier que l'ensemble M des entiers de reste 0 ou 1 dans la division par 3 vérifie $\Phi(M) = M$. c) Expliciter h .

Partie D • Corrigés

Des solutions détaillées, rédigées comme sur une copie

25 Corrigés du niveau I

■ Corrigé de l'exercice 1

1. Une relation de E vers F est une application lorsque chaque élément de E a exactement une image (une flèche et une seule). $\mathcal{R}_2$ n'en est pas une : d n'a pas d'image. $\mathcal{R}_3$ non plus : a a deux images, 1 et 3. $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_4$ sont des applications.
 $\mathcal{R}_1$: l'image de b est 1 ; antécédents : b pour 1, a et c pour 2, d pour 3 ; graphe $\{(a, 2), (b, 1), (c, 2), (d, 3)\}$.
 $\mathcal{R}_4$ (application constante égale à 3) : l'image de b est 3 ; 1 et 2 n'ont pas d'antécédent, 3 en a quatre ; graphe $\{(a, 3), (b, 3), (c, 3), (d, 3)\} = E \times \{3\}$.
2. a) **Non** : 1 n'a pas d'image ($1^2 - 1 = 0$) ; c'est en revanche une application de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ dans $\mathbb{R}$. b) **Oui** : le reste existe, il est unique et appartient à $\{0, 1, 2, 3, 4\} \subset \mathbb{N}$. c) **Non** : l'image de 0 serait $-1 \notin \mathbb{N}$ (l'ensemble d'arrivée compte). d) **Non** : l'image de 1 serait $0 \notin \mathbb{N}^*$.

■ Corrigé de l'exercice 2

1. a) $f(0) = 0$, $f(-1) = \frac{-2}{2} = -1$, $f(\sqrt{3}) = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{5/4} = \frac{4}{5}$.
b) On résout l'équation $f(x) = k$. Comme $x^2 + 1 > 0$: $f(x) = k \iff kx^2 - 2x + k = 0$.
 $k = 1$: $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 = 0 \iff x = 1$: un seul antécédent, $\boxed{1}$.
 $k = 2$: $x^2 - x + 1 = 0$, $\Delta = -3 < 0$: **aucun** antécédent.
 $k = \frac{4}{5}$: $4x^2 - 10x + 4 = 0 \iff (2x - 1)(x - 2) = 0$: deux antécédents, $\boxed{\frac{1}{2}}$ et $\boxed{2}$.
c) $f(2) = \frac{4}{5}$: A est sur le graphe ; $f(-2) = -\frac{4}{5} \neq \frac{4}{5}$: B n'y est pas.
2. $g(1,5) = E(2,25) = 2$ et $g(-\sqrt{5}) = E(5) = 5$.
 $g(x) = 0 \iff 0 \leq x^2 < 1 \iff -1 < x < 1$: les antécédents de 0 sont les réels de $\boxed{]-1, 1[}$.
 $g(x) = 2 \iff 2 \leq x^2 < 3 \iff \sqrt{2} \leq |x| < \sqrt{3}$: antécédents de 2 : $\boxed{]-\sqrt{3}, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \sqrt{3}[}$ (une infinité).

■ Corrigé de l'exercice 3

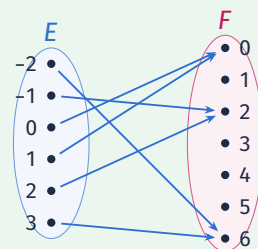
1. a) Deux applications sont égales si elles ont mêmes ensembles de départ et d'arrivée et les mêmes images. $f(-1) = 0 \neq 4 = g(-1)$: $f \neq g$. Pour $x \geq 0$, $|x| = x$ et $f(x) = (2x)^2 = g(x)$: les restrictions à $[0, +\infty[$ sont égales. Pour $x \leq 0$, $|x| = -x$ et $f(x) = 0$: $f|_{]-\infty, 0]}$ est l'application constante nulle.
b) $f(0) = 1 = \frac{6}{6}$, $f(1) = 2 = \frac{12}{6}$, $f(2) = 4 = \frac{24}{6}$, $f(3) = 8 = \frac{48}{6}$: $f = g$ sur $\{0, 1, 2, 3\}$. Sur $\{0, \dots, 4\}$: $f(4) = 16 \neq 15 = \frac{90}{6} = g(4)$: $f \neq g$. Égales sur un ensemble, différentes sur un ensemble plus

grand !

2. $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$, donc $\psi(x) = x + 3$ pour $x \neq 2$: $\boxed{x \mapsto x + 3}$ (définie sur $\mathbb{R}$) prolonge ψ . Un prolongement de ψ à $\mathbb{R}$ coïncide avec ψ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et prend en 2 une valeur a *quelconque* : il y en a **une infinité** (une par réel a) ; un seul est affine ($a = 5$).

■ Corrigé de l'exercice 4

- Images : $-2 \mapsto 6, -1 \mapsto 2, 0 \mapsto 0, 1 \mapsto 0, 2 \mapsto 2, 3 \mapsto 6$ (diagramme ci-contre). f n'est **pas injective** : $f(0) = f(1)$ avec $0 \neq 1$; **pas surjective** : 1 n'a pas d'antécédent.
- $f(\{-1, 0, 1\}) = \{0, 2\}$; $f(\{-2, 3\}) = \{6\}$; $f(E) = \{0, 2, 6\}$; $f^{-1}(\{2\}) = \{-1, 2\}$; $f^{-1}(\{0, 6\}) = \{-2, 0, 1, 3\}$; $f^{-1}(\{1, 3, 5\}) = \emptyset$; $f^{-1}(F) = E$.
- $f(A) = \{0, 6\}$, donc $f^{-1}(f(A)) = \{-2, 0, 1, 3\} \supsetneq A$. $f^{-1}(B) = \{0, 1\}$ (4 n'a pas d'antécédent), donc $f(f^{-1}(B)) = \{0\} \subsetneq B$. $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, donc $f(A_1 \cap A_2) = \emptyset$, alors que $f(A_1) \cap f(A_2) = \{0, 2\} \cap \{0, 2\} = \{0, 2\}$: seule l'inclusion $\subset$ est vraie.
- $x^2 - x = x(x - 1)$ est le produit de deux entiers consécutifs, dont l'un est pair : il est toujours **pair**. Les nombres impairs 1, 3, 5 n'ont donc pas d'antécédent.



■ Corrigé de l'exercice 5

- f est affine : pour $y \in \mathbb{R}$, $f(x) = y \iff x = \frac{3-y}{2}$; on raisonne par équivalences. $y \in f([-1, 2]) \iff -1 \leq \frac{3-y}{2} \leq 2 \iff -1 \leq y \leq 5$: $\boxed{f([-1, 2]) = [-1, 5]}$. De même $y \in f([0, +\infty[) \iff \frac{3-y}{2} > 0 \iff y < 3$: $\boxed{f([0, +\infty[) =]-\infty, 3]}$.
 $1 \leq 3 - 2x \leq 5 \iff -1 \leq x \leq 1$: $\boxed{f^{-1}([1, 5]) = [-1, 1]}$; $f^{-1}(\{7\}) = \{-2\}$; $3 - 2x \leq 0 \iff x \geq \frac{3}{2}$: $\boxed{f^{-1}(]-\infty, 0]) = [\frac{3}{2}, +\infty[}$.
- $(x + 2)^2 - 3 = x^2 + 4x + 4 - 3 = g(x)$. Pour une image directe : encadrer, puis vérifier que chaque valeur est atteinte. Si $x \in [-2, 1]$, alors $0 \leq x + 2 \leq 3$, $0 \leq (x + 2)^2 \leq 9$ et $-3 \leq g(x) \leq 6$; inversement, tout $y \in [-3, 6]$ vaut $g(-2 + \sqrt{y + 3})$, avec $-2 + \sqrt{y + 3} \in [-2, 1]$. $\boxed{g([-2, 1]) = [-3, 6]}$. Si $x \in [-5, -3]$, alors $-3 \leq x + 2 \leq -1$, $1 \leq (x + 2)^2 \leq 9$, $-2 \leq g(x) \leq 6$, et $y = g(-2 - \sqrt{y + 3})$ pour $y \in [-2, 6]$: $\boxed{g([-5, -3]) = [-2, 6]}$.
 $g(x) = 1 \iff (x + 2)^2 = 4 \iff x + 2 = \pm 2$: $\boxed{g^{-1}(\{1\}) = \{-4, 0\}}$. $-3 \leq g(x) \leq -2 \iff (x + 2)^2 \leq 1 \iff |x + 2| \leq 1$: $\boxed{g^{-1}([-3, -2]) = [-3, -1]}$. $g(x) \geq -3$ pour tout x : $g^{-1}(]-\infty, -4]) = \emptyset$.

■ Corrigé de l'exercice 6

n	1	2	3	4	5	6
$3n$	3	6	9	12	15	18
$f(n)$	3	6	2	5	1	4

1.

n	1	2	3	4	5	6
n^2	1	4	9	16	25	36
$g(n)$	1	4	2	2	4	1

Le nombre premier 7 ne divise ni 3 ni n ($1 \leq n \leq 6$), donc il ne divise ni $3n$ ni n^2 : les restes sont non nuls, dans $\{1, \dots, 6\} = E$. f prend chaque valeur de E exactement une fois : elle est **bijjective** (injective et surjective). $g(3) = g(4) = 2$: g n'est **pas injective** ; 3, 5, 6 n'ont pas d'antécédent : **pas surjective**.

2. $h(n) = h(m) \Rightarrow n + 3 = m + 3 \Rightarrow n = m$: h est **injective** ; $h(n) \geq 3$, donc 0, 1, 2 n'ont pas d'antécédent : **non surjective**. $k(1) = k(2) = 1$: k n'est **pas injective** ; pour tout $m \in \mathbb{N}$, $k(m^2) = E(m) = m$: k est **surjective**.

■ Corrigé de l'exercice 7

- a) $f_1(x) = f_1(x') \Rightarrow 5x = 5x' \Rightarrow x = x'$: **injective**. b) $f_2(0) = 0 = f_2(-3)$: **non injective**.
 c) Partons de $f_3(x) = f_3(x')$. $x^2 - x'^2 + 3(x - x') = 0 \iff (x - x')(x + x' + 3) = 0$. Comme $x \geq -\frac{3}{2}$ et $x' \geq -\frac{3}{2}$, $x + x' + 3 \geq 0$, avec égalité seulement si $x = x' = -\frac{3}{2}$. Dans tous les cas $x = x'$: **injective**.
 d) $f_4(1) = 5 = f_4(4)$: **non injective**. e) Sur $]0, +\infty[$, $x \mapsto \sqrt{x+1}$ et $x \mapsto -\frac{1}{x}$ sont strictement croissantes, donc leur somme f_5 aussi ; une fonction strictement monotone est **injective**. f) $f_6(2) = 3 - 1 = 2$ et $f_6(3) = 4 - 2 = 2$: **non injective** (f_6 vaut 2 sur tout $[1, +\infty[$).

■ Corrigé de l'exercice 8

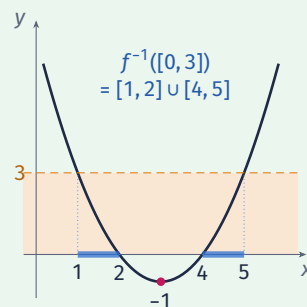
1. Chaque segment est porté par une droite : $f(x) = 2x + 7$ sur $[-4, -2]$, $f(x) = 1 - x$ sur $[-2, 2]$, $f(x) = x - 3$ sur $[2, 4]$. Donc $f(-2) = 3$, $f(0) = 1$, $f(3) = 0$. On résout $f(x) = k$ sur chaque segment :
 $k = 1$: $x = -3$, $x = 0$, $x = 4$: antécédents $\boxed{-3, 0, 4}$; $k = 3$: seulement $\boxed{-2}$ ($x - 3 = 3$ donne $6 \notin [2, 4]$) ; $k = 4$: **aucun** ($f \leq 3$) ; $k = 0$: $\boxed{-\frac{7}{2}, 1, 3}$.
 2. $f([-4, -2]) = [-1, 3]$ (f croissante affine) ; $f([0, 4]) = f([0, 2]) \cup f([2, 4]) = [-1, 1] \cup [-1, 1] = \boxed{[-1, 1]}$;
 $f([-4, 4]) = [-1, 3]$. $f^{-1}([2, 3])$: sur $[-4, -2]$, $2x + 7 \geq 2 \iff x \geq -\frac{5}{2}$; sur $[-2, 2]$, $1 - x \geq 2 \iff x \leq -1$; sur $[2, 4]$, $f \leq 1$: $f^{-1}([2, 3]) = \boxed{[-\frac{5}{2}, -1]}$. De même $f^{-1}(]-\infty, 0]) = \boxed{[-4, -\frac{7}{2}] \cup [1, 3]}$.
 3. Non injective ($f(-3) = f(0)$) ; surjective de $[-4, 4]$ sur $[-1, 3]$, car $f([-4, 4]) = [-1, 3]$; non surjective sur $\mathbb{R}$ (4 n'a pas d'antécédent).
 4. Pour $y \in [-1, 3]$: $g(x) = y \iff 1 - x = y \iff x = 1 - y$, et $1 - y \in [-2, 2]$: un unique antécédent. g est bijective et $\boxed{g^{-1}(y) = 1 - y}$.

26

Corrigés du niveau 2

■ Corrigé de l'exercice 9

1. $f(x) = (x - 3)^2 - 1$: f est strictement décroissante sur $]-\infty, 3]$, strictement croissante sur $[3, +\infty[$, de minimum $f(3) = -1$.
 2. On encadre $(x - 3)^2$, puis on vérifie que chaque valeur est atteinte. Si $3 \leq x \leq 6$, alors $0 \leq (x - 3)^2 \leq 9$ et $-1 \leq f(x) \leq 8$; inversement, $y \in [-1, 8]$ vaut $f(3 + \sqrt{y+1})$ avec $3 + \sqrt{y+1} \in [3, 6]$: $\boxed{f([3, 6]) = [-1, 8]}$. Si $0 \leq x \leq 4$, alors $-3 \leq x - 3 \leq 1$, $0 \leq (x - 3)^2 \leq 9$; et $y \in [-1, 8]$ vaut $f(3 - \sqrt{y+1})$ avec $3 - \sqrt{y+1} \in [0, 3]$: $\boxed{f([0, 4]) = [-1, 8]}$ (même image !). Si $2 < x < 4$, alors $(x - 3)^2 < 1$ et $f(x) \in [-1, 0]$; inversement $y \in [-1, 0]$ vaut $f(3 + \sqrt{y+1})$ avec $3 + \sqrt{y+1} \in [3, 4]$: $\boxed{f([2, 4]) = [-1, 0]}$. Enfin $f \geq -1$ et tout $y \geq -1$ vaut $f(3 + \sqrt{y+1})$: $\boxed{f(\mathbb{R}) = [-1, +\infty]}$.
 3. $f(x) = 0 \iff (x - 3)^2 = 1 \iff x \in \{2, 4\}$; $f^{-1}(\{-1\}) = \{3\}$; $0 \leq f(x) \leq 3 \iff 1 \leq (x - 3)^2 \leq 4 \iff 1 \leq |x - 3| \leq 2$: $\boxed{f^{-1}([0, 3]) = [1, 2] \cup [4, 5]}$ (figure) ; $f^{-1}(]-\infty, -2]) = \emptyset$ car $f \geq -1$.
 4. $A \cap A' = \{3\}$, donc $f(A \cap A') = \{-1\}$, alors que $f(A) = f(A') = [-1, 8]$ et $f(A) \cap f(A') = [-1, 8]$: seule l'inclusion $\subset$ est vraie. $f^{-1}(B) = \{x \mid (x - 3)^2 \leq 1\} = [2, 4]$, donc $f(f^{-1}(B)) = [-1, 0] \subsetneq B$ (c'est $B \cap f(\mathbb{R})$). $f^{-1}(f(A')) = f^{-1}([-1, 8]) = \{x \mid (x - 3)^2 \leq 9\} = [0, 6] \supsetneq A'$.
 5. Pour $x \leq 3$, $f(x) \geq -1$: g est bien définie. Soit $y \geq -1$: pour $x \leq 3$, $f(x) = y \iff (x - 3)^2 = y + 1 \iff 3 - x = \sqrt{y+1}$ (car $3 - x \geq 0$) $\iff x = 3 - \sqrt{y+1}$, qui est bien ≤ 3 . Unique antécédent :



g est bijective et $g^{-1}(y) = 3 - \sqrt{y+1}$. (Attention au signe : $3 + \sqrt{y+1}$ est l'antécédent situé dans $[3, +\infty[$.)

■ Corrigé de l'exercice 10

- $f(0) = \frac{5}{3}$, $f(4) = 3$. On résout $f(x) = k$ pour $x \neq 3$: $2x - 5 = k(x - 3) \iff (2 - k)x = 5 - 3k$. $k = 0$: $x = \frac{5}{2}$; $k = 1$: $x = 2$; $k = 2$: $0 = -1$, impossible : 2 n'a pas d'antécédent.
- Partons de $f(x) = f(x')$, avec $x, x' \neq 3$: $(2x - 5)(x' - 3) = (2x' - 5)(x - 3) \iff -6x - 5x' = -6x' - 5x \iff x = x'$. f est injective ; elle n'est pas surjective (2 n'a pas d'antécédent).
- Soit $y \in \mathbb{R}$: $f(x) = y \iff (2 - y)x = 5 - 3y$. Si $y \neq 2$, l'unique solution est $x = \frac{3y-5}{y-2}$, et $x \neq 3$ (sinon $3y - 5 = 3y - 6$) ; si $y = 2$, pas de solution. Donc $f(\mathbb{R} \setminus \{3\}) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ et tout $y \neq 2$ a exactement un antécédent : g est bijective, $g^{-1}(y) = \frac{3y-5}{y-2}$.
- $2 + \frac{1}{x-3} = \frac{2x-6+1}{x-3} = f(x)$. Si $x > 3$, $\frac{1}{x-3} > 0$; inversement, $y > 2$ s'écrit $f\left(3 + \frac{1}{y-2}\right)$ avec $3 + \frac{1}{y-2} > 3$: $f([3, +\infty[) = [2, +\infty[$. $1 \leq f(x) \leq 3 \iff \left|\frac{1}{x-3}\right| \leq 1 \iff |x-3| \geq 1$: $f^{-1}([1, 3]) =]-\infty, 2] \cup [4, +\infty[$.

■ Corrigé de l'exercice 11

- Domaine d'une composée** : $D_{g \circ f} = \{x \in D_f / f(x) \in D_g\}$. $x^2 - 3 \neq 1 \iff x \neq \pm 2$: $g \circ f$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ et $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x^2-4}$. $f \circ g$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $(f \circ g)(x) = \frac{1}{(x-1)^2} - 3$. Comme $(g \circ f)(0) = -\frac{1}{4} \neq -2 = (f \circ g)(0)$: $g \circ f \neq f \circ g$ (même les domaines diffèrent).
- Pour tout réel x , $f(x) = x^2 - 3 \geq -3$: $u \circ f$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $(u \circ f)(x) = \sqrt{x^2} = |x|$. Pour $x \geq -3$, $(f \circ u)(x) = (x+3) - 3 = x$: $f \circ u = \text{Id}_{[-3, +\infty[}$. Cette identité est injective, et (cours) si $f \circ u$ est injective, alors u est injective.
- Pour $x \geq 0$, $(U \circ F)(x) = \sqrt{x^2} = x$; pour $x \geq -3$, $(F \circ U)(x) = x$. Donc $U \circ F = \text{Id}_{[0, +\infty[}$ et $F \circ U = \text{Id}_{[-3, +\infty[}$: F est **bijjective** et $F^{-1} = U$.
- $F_2 : [2, +\infty[\rightarrow]1, +\infty[$, $x \mapsto x^2 - 3$ est bijective (pour $y > 1$, l'antécédent $\sqrt{y+3}$ de y par F est > 2), et $G :]1, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$, $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ est bijective, de réciproque $y \mapsto 1 + \frac{1}{y}$. Comme $\frac{1}{(x^2-3)-1} = \frac{1}{x^2-4}$: $H = G \circ F_2$, composée de bijections, est bijective, et $H^{-1} = F_2^{-1} \circ G^{-1}$: $H^{-1}(y) = \sqrt{1 + \frac{1}{y} + 3} = \sqrt{4 + \frac{1}{y}}$.
Contrôle : $H\left(\sqrt{4 + \frac{1}{y}}\right) = \frac{1}{1/y} = y$ ✓.

■ Corrigé de l'exercice 12

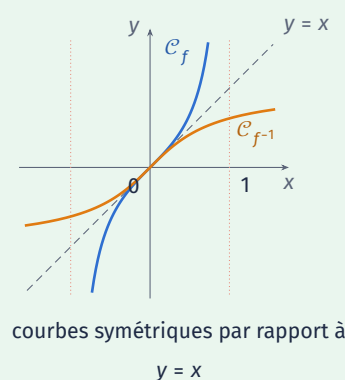
- a) $\varphi(\emptyset) = \{1, 2, 3\}$, $\varphi(\{4\}) = \varphi(\{1, 4\}) = \{1, 2, 3, 4\}$. b) $A \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 5\} \iff (A \subset \{1, 2, 3, 5\} \text{ et } 5 \in A) \iff A = \{5\} \cup X \text{ avec } X \subset \{1, 2, 3\}$: huit antécédents : $\{5\}$, $\{1, 5\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 5\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 3, 5\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{1, 2, 3, 5\}$. $\{1, 2, 5\}$ n'a aucun antécédent : 3 appartient à tout $\varphi(A)$. c) $\varphi(A) = \{1, 2, 3\} \cup (A \cap \{4, 5\})$: $\varphi(\mathcal{P}(E)) = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, E\}$.
- Disjonction des cas**. Si $B = \emptyset$, $\varphi = \text{Id}_{\mathcal{P}(E)}$ est bijective. Si $B \neq \emptyset$: $\varphi(\emptyset) = B = \varphi(B)$ avec $\emptyset \neq B$, donc φ n'est pas injective ; tout $\varphi(A)$ contient B , donc $\emptyset$ n'a pas d'antécédent : φ n'est pas surjective. Ainsi φ injective $\iff B = \emptyset \iff \varphi$ surjective.
- Double inclusion**. $B \subset A \cup B$, donc $\varphi(\mathcal{P}(E)) \subset \mathcal{U}$; si $C \in \mathcal{U}$, $\varphi(C) = C \cup B = C$: $C \in \varphi(\mathcal{P}(E))$. θ est bien à valeurs dans $\mathcal{U}$. Soit $C \in \mathcal{U}$ et $A \subset \bar{B}$. Si $A \cup B = C$, alors $C \cap \bar{B} = (A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{B}) = A$. Réciproquement, $A = C \cap \bar{B}$ donne $A \cup B = (C \cap \bar{B}) \cup B = C \cap (\bar{B} \cup B) = C \cap E = C$ (car $B \subset C$). Chaque C a donc un unique antécédent : θ est bijective et $\theta^{-1}(C) = C \cap \bar{B} = C \setminus B$. Avec les données de 1. : $\bar{B} = \{4, 5\}$ et θ^{-1} envoie $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$, $\{1, 2, 3, 5\}$, E sur $\emptyset$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{4, 5\}$: les parties de E contenant B correspondent exactement aux parties de $\bar{B}$.

■ Corrigé de l'exercice 13

1. $f(1, -1) = (-1, -1)$. On résout le système $x + 2y = u$ (L_1), $2x + 3y = v$ (L_2) : $2L_1 - L_2$ donne $y = 2u - v$, puis $x = u - 2y = -3u + 2v$. Tout (u, v) a exactement un antécédent : f est bijective et $f^{-1}(u, v) = (-3u + 2v, 2u - v)$; l'antécédent de $(0, 1)$ est $(2, -1)$. Contrôle : $f(-3u + 2v, 2u - v) = (-3u + 2v + 4u - 2v, -6u + 4v + 6u - 3v) = (u, v)$ ✓.
2. $g(2, 1) = (0, 0) = g(0, 0)$: g n'est **pas injective**. $g(x, y) = (x - 2y, 3(x - 2y))$ vérifie $v = 3u$; inversement $(u, 3u) = g(u, 0)$: $g(\mathbb{R}^2) = \{(u, v) \mid v = 3u\} \neq \mathbb{R}^2$ ($(1, 0)$ n'a pas d'antécédent) : **pas surjective**. $g^{-1}(\{(1, 3)\}) = \{(x, y) \mid x - 2y = 1\} = \{(1 + 2t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ (une droite) ; $g^{-1}(\{(1, 2)\}) = \emptyset$ ($2 \neq 3 \times 1$) ; $g^{-1}(\{(0, 0)\})$ est la droite d'équation $x = 2y$.
3. $(f \circ g)(2, 1) = f(0, 0) = (f \circ g)(0, 0)$: $f \circ g$ n'est **pas injective**. Si $f \circ g$ était surjective, $g = f^{-1} \circ (f \circ g)$ le serait (composée de surjections) : $f \circ g$ n'est **pas surjective**.

■ Corrigé de l'exercice 14

1. On résout $f(x) = y$. Pour $x \in]-1, 1[$, $1 - x^2 > 0$, donc $f(x) = y \iff x = y(1 - x^2) \iff yx^2 + x - y = 0$. Pour $y \neq 0$, $\Delta = 1 + 4y^2 > 0$: deux solutions réelles, de produit $\frac{-y}{y} = -1$. Aucune ne vaut ± 1 (pour $x = \pm 1$, $yx^2 + x - y = \pm 1 \neq 0$) ; comme le produit de leurs valeurs absolues vaut 1, l'une est de valeur absolue < 1 et l'autre > 1 : **un seul antécédent** dans $]-1, 1[$. Pour $y = 0$: seul $x = 0$ convient. Donc f est bijective. La solution de $]-1, 1[$ est $\frac{-1 + \sqrt{1 + 4y^2}}{2y} = \frac{2y}{1 + \sqrt{1 + 4y^2}}$ (on multiplie par la quantité conjuguée) : sa valeur absolue est < 1 car $2|y| < \sqrt{1 + 4y^2}$, et la formule donne 0 pour $y = 0$.
$$f^{-1}(y) = \frac{2y}{1 + \sqrt{1 + 4y^2}}.$$



2. $|g(x)| = \frac{|x|}{1+|x|} < 1$. Soit $y \in]-1, 1[$. Si $g(x) = y$, x et y ont le même signe. Cas $y \geq 0$: $x \geq 0$ et $x = y(1 + x) \iff x = \frac{y}{1-y}$. Cas $y < 0$: $x < 0$ et $x = y(1 - x) \iff x = \frac{y}{1+y}$. Dans les deux cas $x = \frac{y}{1-|y|}$, qui a bien le signe de y et vérifie $g(x) = y$: unique antécédent, g est bijective et
$$g^{-1}(y) = \frac{y}{1 - |y|}.$$

■ Corrigé de l'exercice 15

1. a) $s(s(n)) = 5 - (5 - n) = n$; point fixe : $2n = 5$, impossible dans $\mathbb{Z}$: **aucun**. b) $t(x) \neq 0$ et $t(t(x)) = -\frac{2}{-2/x} = x$; point fixe : $x^2 = -2$: **aucun**. c) $\sigma(\sigma(x, y)) = \sigma(x + y, -y) = (x + y - y, y) = (x, y)$; points fixes : $x + y = x$ et $-y = y \iff y = 0$: **les points** $(x, 0)$ (axe des abscisses).
2. a) Pour $1 \leq n \leq 6$, $1 \leq 7 - n \leq 6$ et $7 - (7 - n) = n$: involution ; $7 - n = n \iff n = \frac{7}{2} \notin \mathbb{N}$: **aucun point fixe**. Pour $1 \leq n \leq 7$, $1 \leq 8 - n \leq 7$: involution ; $8 - n = n \iff n = 4$: **un seul point fixe**. b) Par exemple e qui échange 1 et 2, échange 3 et 4, et fixe 5, 6, 7. Une involution échange des éléments deux par deux ; avec 7 éléments, l'un au moins reste seul : c'est un point fixe (exercice 30).

■ Corrigé de l'exercice 16

- a) **Faux** : $f(x) = x$ si $x < 0$, $f(x) = x+1$ si $x \geq 0$ est strictement croissante, mais $\frac{1}{2}$ n'a pas d'antécédent ($x < 0 \Rightarrow f(x) < 0$; $x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 1$).
- b) **Faux** : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2, A = \{-1\}, A' = \{1\} : f(A) = f(A') = \{1\}$ mais $A \not\subset A'$ (c'est vrai si f est injective). c) **Faux** : même exemple : $A \cap A' = \emptyset$ et $f(A) \cap f(A') = \{1\}$.
- d) **Vrai**, par contraposée : si $x \in A \cap A'$, alors $f(x) \in f(A) \cap f(A')$, qui n'est pas vide.
- e) **Faux** : $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2 : g \circ f : x \mapsto x^2$ est injective sur $[0, +\infty[$, mais $g(-1) = g(1)$.
- f) **Faux** : $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[, x \mapsto x^2 : g \circ f$ est une bijection de $[0, +\infty[$ sur lui-même, mais f n'est pas surjective et g pas injective (seuls « f injective » et « g surjective » sont garantis).
- g) **Vrai** : $n \mapsto E\left(\frac{n}{2}\right) : E\left(\frac{n}{2}\right) = m \iff 2m \leq n < 2m+2 \iff n \in \{2m, 2m+1\}$.

27 Corrigés du niveau 3

■ Corrigé de l'exercice 17

- a) **Raisonnons par contraposée** : supposons f non injective : $x \neq x'$ et $f(x) = f(x')$. Avec $A = \{x\}$, $A' = \{x'\} : f(A \cap A') = f(\emptyset) = \emptyset$, alors que $f(A) \cap f(A') = \{f(x)\} \neq \emptyset$. b) Mêmes x, x' et $A = \{x\} : x' \in f^{-1}(f(A))$ mais $x' \notin A$. c) **Par contraposée** : si $y_0 \in F$ n'a pas d'antécédent, $B = \{y_0\}$ vérifie $f^{-1}(B) = \emptyset$, donc $f(f^{-1}(B)) = \emptyset \neq B$.
- Sens direct**. Supposons f bijective. Soit $y \in F$ et x son unique antécédent. Alors $y \in f(A) \iff x \in A$ (un antécédent de y dans A ne peut être que x) et $y \in f(C_E^A) \iff x \notin A$. Donc $y \in f(C_E^A) \iff y \notin f(A) : f(C_E^A) = C_F^{f(A)}$.
Réciproque. $A = \emptyset$ donne $f(E) = C_F^\emptyset = F : f$ est surjective. $A = \{x\}$ donne $f(E \setminus \{x\}) = F \setminus \{f(x)\} : \text{aucun } x' \neq x \text{ n'a pour image } f(x) ; f \text{ est injective. Donc } f \text{ est bijective.}$

■ Corrigé de l'exercice 18

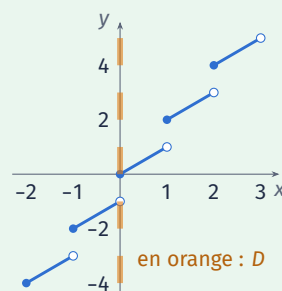
- Soit $y, y' \in F$ tels que $g(y) = g(y')$; montrons que $y = y'$. f est surjective : $y = f(x), y' = f(x')$. Alors $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$, donc $x = x'$ ($g \circ f$ injective), d'où $y = y'$.
- Soit $y \in F$; cherchons-lui un antécédent par f . $g(y) \in G = (g \circ f)(E) : \text{il existe } x \text{ tel que } g(y) = g(f(x)) ; g \text{ étant injective, } y = f(x)$.
- D'après le cours : $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective ; $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective ; $h \circ g$ injective $\Rightarrow g$ injective ; $h \circ g$ surjective $\Rightarrow h$ surjective. Donc g est **bijective**, puis $f = g^{-1} \circ (g \circ f)$ et $h = (h \circ g) \circ g^{-1}$ sont bijectives (composées de bijections).
- Si p est injective : $p(p(x)) = p(x)$ donne $p(x) = x$. Si p est surjective : tout y s'écrit $p(x)$, et $p(y) = p(p(x)) = p(x) = y$. Dans les deux cas $\boxed{p = \text{Id}_E}$. $E(E(x)) = E(x)$ car $E(x) \in \mathbb{Z}$, et $(x, 0) \mapsto (x, 0) : \text{ces deux applications vérifient } p \circ p = p \text{ sans être l'identité ; elles ne sont donc ni injectives ni surjectives } (E(0) = E(\frac{1}{2}), \frac{1}{2} \notin E(\mathbb{R}) ; (0, 0) \text{ et } (0, 1) \text{ ont même image, } (0, 1) \text{ n'a pas d'antécédent}).$

■ Corrigé de l'exercice 19

1. $f(2) = 4$, $f(2,5) = 4,5$, $f(-0,5) = -0,5 - 1 = -1,5$. Sur $[n, n+1[$, $E(x) = n$ et $f(x) = x + n$: la courbe est le segment de pente 1 qui va de $(n, 2n)$ (inclus) à $(n+1, 2n+1)$ (exclu) ; ci-contre.
2. Soit $x < x'$. $E(x)$ est un entier $\leq x < x'$, donc $E(x) \leq E(x')$. En ajoutant : $x + E(x) < x' + E(x')$: f est strictement croissante, donc **injective**.
3. **Double inclusion**. Si $y = f(x)$ et $n = E(x)$: $y = x + n \in [2n, 2n+1[$, donc $E(y) = 2n$ est pair : $y \in D$. Inversement, si $E(y) = 2n$, posons $x = y - n$: $n \leq x < n+1$, donc $E(x) = n$ et $f(x) = y$. Ainsi $f(\mathbb{R}) = D$; $1 \notin D$: f n'est **pas surjective**.
4. $\tilde{f}$ est injective comme f , et surjective par 3. : **bijective** ; l'antécédent trouvé en 3. est $y - n$ avec $2n = E(y)$:

$$\tilde{f}^{-1}(y) = y - \frac{E(y)}{2}.$$

5. $E(7,3) = 7$ est impair : **pas de solution**. $E(10,5) = 10$: $x = 10,5 - 5 = 5,5$. $f(0) = 0$, $f(2) = 4$ et f est strictement croissante : $f(x) < 0$ si $x < 0$ et $f(x) \geq 4$ si $x \geq 2$. Sur $[0, 1[$, $f(x) = x \in [0, 1[$; sur $[1, 2[$, $f(x) = x + 1 \in [2, 3[$. Donc $f^{-1}([0, 3]) = [0, 2[$ et $f(f^{-1}([0, 3])) = [0, 1[\cup [2, 3[= [0, 3] \cap D \neq [0, 3]$.



■ Corrigé de l'exercice 20

1. Pour $x \in E$, $f(x) = \frac{1}{1-x}$ existe ($x \neq 1$), est non nul, et $f(x) = 1 \iff x = 0$, exclu : $f(x) \in E$. Ensuite $(f \circ f)(x) = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{-x} = \frac{x-1}{x}$ et $(f \circ f \circ f)(x) = \frac{1}{1-\frac{x-1}{x}} = \frac{1}{\frac{1-x+1}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$. Ainsi $f \circ (f \circ f) = (f \circ f) \circ f = \text{Id}_E$: f est **bijective** et $f^{-1} = f \circ f : x \mapsto \frac{x-1}{x}$. $f(2) = -1$, $f(-1) = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}) = 2$: $f(f(2)) = \frac{1}{2} \neq 2$, f n'est **pas une involution** (elle « tourne » par cycles de trois). Point fixe : $\frac{1}{1-x} = x \iff x^2 - x + 1 = 0$, $\Delta = -3 < 0$: **aucun**.
2. **Analyse**. Soit φ une solution, $x \in E$, $y = f(x)$, $z = f(y)$; alors $f(z) = x$. La relation en x, y, z donne : $\varphi(x) + \varphi(y) = x$, $\varphi(y) + \varphi(z) = y$, $\varphi(z) + \varphi(x) = z$. La somme des première et troisième, moins la deuxième : $2\varphi(x) = x - y + z$, soit

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{x-1} + \frac{x-1}{x} \right) = \frac{x^2(x-1) + x + (x-1)^2}{2x(x-1)} = \frac{x^3 - x + 1}{2x(x-1)}.$$

Synthèse. Avec $\varphi(x) = \frac{1}{2}(x - f(x) + f(f(x)))$ et $f(f(f(x))) = x$: $\varphi(f(x)) = \frac{1}{2}(f(x) - f(f(x)) + x)$, donc

$$\varphi(x) + \varphi(f(x)) = x \quad \checkmark. \text{ Il y a une unique solution : } \varphi(x) = \frac{x^3 - x + 1}{2x(x-1)}.$$

■ Corrigé de l'exercice 21

1. a) Notons $\mathcal{P}(n)$: « $f(n) \geq n$ ». **Initialisation**. $f(0) \in \mathbb{N}$, donc $f(0) \geq 0$. **Hérédité**. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un entier $n \geq 0$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$: $f(n+1) > f(n) \geq n$, et $f(n+1)$ est un entier, donc $f(n+1) \geq n+1$. **Conclusion**. $f(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 b) **Récurrence forte**. Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons $f(k) = k$ pour tout $k < n$ (rien à supposer si $n = 0$). n a un antécédent a : $f(a) = n$. Si $a < n$, $f(a) = a < n$: impossible ; donc $a \geq n$ et, f étant croissante, $f(n) \leq f(a) = n$. Avec a) : $f(n) = n$. **Conclusion**. $f = \text{Id}_{\mathbb{N}}$.
2. **Analyse**. Montrons par récurrence $\mathcal{P}(n)$: « $f(n) = n + (-1)^n c$ ». **Initialisation**. $f(0) = c$. **Hérédité**. si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, $f(n+1) = 2n+1 - f(n) = 2n+1 - n - (-1)^n c = (n+1) + (-1)^{n+1} c$. **Conclusion**. $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n . De plus $f(1) = 1 - c \in \mathbb{N}$, donc $c \leq 1$: $c \in \{0, 1\}$.
Synthèse. Pour $c \in \{0, 1\}$, $n + (-1)^n c \in \mathbb{N}$ (le signe $-$ n'apparaît que pour n impair, donc $n \geq 1 \geq c$)

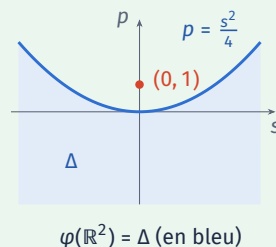
et $f(n) + f(n+1) = 2n+1 + c((-1)^n + (-1)^{n+1}) = 2n+1$ ✓. **Deux solutions** : $\text{Id}_{\mathbb{N}}$ ($c = 0$) et, pour $c = 1$, $f(n) = n+1$ si n est pair, $n-1$ si n est impair : elle échange $2k$ et $2k+1$; c'est une involution, donc une bijection. Les deux solutions sont **bijectives**.

■ Corrigé de l'exercice 22

- Si $(m+n, m-n) = (m'+n', m'-n')$, la somme et la différence donnent $2m = 2m'$ et $2n = 2n'$: **injective**. Si $(u, v) = \varphi(m, n)$, $u-v = 2n$ est pair. Inversement, si $u-v$ est pair, $u+v = (u-v) + 2v$ aussi : $m = \frac{u+v}{2}$ et $n = \frac{u-v}{2}$ sont entiers et $\varphi(m, n) = (u, v)$. $(1, 0)$ n'est pas atteint : **non surjective** (sur $\mathbb{R}^2$, la même formule est bijective : les ensembles comptent).
- On résout le système** $am+bn = u$ (L_1), $cm+dn = v$ (L_2) : $dL_1 - bL_2$ donne $\delta m = du - bv$ et $aL_2 - cL_1$ donne $\delta n = av - cu$. Si $\delta = \pm 1$ (donc $\frac{1}{\delta} = \delta$) : $m = \delta(du - bv)$, $n = \delta(av - cu)$, qui sont entiers ; réciproquement ces valeurs vérifient L_1 ($a\delta(du - bv) + b\delta(av - cu) = \delta^2 u = u$) et L_2 . Antécédent unique : φ est **bijective**. Pour f de l'exercice 13 ($a = 1, b = 2, c = 2, d = 3, \delta = -1$) : bijection de $\mathbb{Z}^2$, $f^{-1}(u, v) = (-3u + 2v, 2u - v)$.
- $\varphi(b, -a) = (ab - ba, cb - da) = (0, -\delta) = (0, 0)$ et $\varphi(d, -c) = (ad - bc, cd - dc) = (0, 0)$. Si $(a, b) \neq (0, 0)$, le couple $(b, -a) \neq (0, 0)$ a la même image que $(0, 0)$; sinon, si $(c, d) \neq (0, 0)$, on prend $(d, -c)$; si $a = b = c = d = 0$, φ est constante. Jamais **injective**.
- Les relations de 2. (valables pour toute solution) donnent $\delta m_1 = d, \delta n_1 = -c, \delta m_2 = -b, \delta n_2 = a$: δ divise a, b, c, d . En écrivant $a = \delta a'$, etc. : $\delta = ad - bc = \delta^2(a'd' - b'c')$, donc δ^2 divise $\delta \neq 0$, d'où $\delta^2 \leq |\delta|$ et $|\delta| \leq 1$: contradiction. **Conclusion** : $\delta = \pm 1 \Rightarrow$ bijective ; $\delta = 0 \Rightarrow$ non injective ; $|\delta| \geq 2 \Rightarrow$ non surjective : φ bijective $\iff \delta = \pm 1$.

■ Corrigé de l'exercice 23

- $\varphi(2, 3) = (5, 6) = \varphi(3, 2)$: **non injective**.
- Sens direct**. Si $\varphi(x, y) = (s, p)$: $s^2 - 4p = (x+y)^2 - 4xy = (x-y)^2 \geq 0$. **Réciproque**. Si $s^2 \geq 4p$, posons $r = \sqrt{s^2 - 4p}$, $x = \frac{s-r}{2}$, $y = \frac{s+r}{2}$: $x+y = s$ et $xy = \frac{s^2 - r^2}{4} = p$. Non surjective : $(0, 1)$ n'a pas d'antécédent ($0 < 4$). $\varphi(x, y) = (1, -6) \iff y = 1-x$ et $x^2 - x - 6 = 0$: $\varphi^{-1}(\{(1, -6)\}) = \{(3, -2), (-2, 3)\}$; $y = 4-x$ et $(x-2)^2 = 0$: $\varphi^{-1}(\{(4, 4)\}) = \{(2, 2)\}$.
- φ est bien à valeurs dans Δ (2.). **Surjective** : l'antécédent construit en 2. vérifie $x \leq y$ ($r \geq 0$). **Injective** : si $(x, y) \in D$ vérifie $x+y = s$ et $xy = p$, alors $(y-x)^2 = s^2 - 4p$ et $y-x \geq 0$, donc $y-x = \sqrt{s^2 - 4p}$: x et y sont déterminés. $\varphi^{-1}(s, p) = \left(\frac{s - \sqrt{s^2 - 4p}}{2}, \frac{s + \sqrt{s^2 - 4p}}{2} \right)$. (La parabole bordant Δ est l'image de la droite $y = x$: $\varphi(t, t) = (2t, t^2)$.)



28

Corrigés du niveau 4

■ Corrigé de l'exercice 24

- On exploite la stricte croissance**. Soit $a = f(0)$. Si $a > 0$, alors $f(a) > f(0) = a > 0$, alors que $f(a) = f(f(0)) = 0$: absurde. Donc $f(0) = 0$. Ensuite $f(1) > f(0) = 0$; si $f(1) = 1$, alors $f(f(1)) = 1 \neq 3$; donc $f(1) \geq 2 > 1$, d'où $f(f(1)) > f(1)$, soit $3 > f(1)$: $f(1) = 2$, puis $f(2) = f(f(1)) = 3$.

- On applique f à $f(f(n)) = 3n$ et la relation à $f(n) : f(3n) = f(f(f(n))) = 3f(n)$. Par récurrence sur k : $f(3^k) = 3^k f(1) = 2 \times 3^k$ et $f(2 \times 3^k) = 3^k f(2) = 3^{k+1}$.
- Posons $a_j = f(3^k + j)$ pour $0 \leq j \leq 3^k$: ce sont des entiers, $a_{j+1} \geq a_j + 1$, $a_0 = 2 \times 3^k$ et $a_{3^k} = 3^{k+1}$. Par récurrence, $a_j \geq a_0 + j = 2 \times 3^k + j$ et $a_j \leq a_{3^k} - (3^k - j) = 2 \times 3^k + j$: les $3^k + 1$ entiers de $[3^k, 2 \times 3^k]$ sont envoyés sur les $3^k + 1$ entiers de $[2 \times 3^k, 3^{k+1}]$ « sans saut » : $f(3^k + j) = 2 \times 3^k + j$. Puis $f(2 \times 3^k + j) = f(f(3^k + j)) = 3(3^k + j) = 3^{k+1} + 3j$.
- $100 = 3^4 + 19$ avec $0 \leq 19 \leq 81$: $f(100) = 162 + 19 = 181$. $2027 = 2 \times 3^6 + 569$ ($1458 + 569$, $0 \leq 569 \leq 729$) : $f(2027) = 3^7 + 3 \times 569 = 2187 + 1707 = 3894$.
- Tout $n \geq 1$ est dans un intervalle $[3^k, 2 \times 3^k]$ ou $[2 \times 3^k, 3^{k+1}]$, et aux bornes communes les formules coïncident ($2 \times 3^k \mapsto 3^{k+1}$, $3^{k+1} \mapsto 2 \times 3^{k+1}$) : f est bien définie, affine de pente 1 ou 3 sur chaque intervalle, raccordée aux bornes, donc strictement croissante (et $f(0) = 0 < f(1) = 2$). Si $n = 3^k + j$: $f(n) = 2 \times 3^k + j$ et $f(f(n)) = 3^{k+1} + 3j = 3n$. Si $n = 2 \times 3^k + j$: $f(n) = 3^{k+1} + 3j$ avec $0 \leq 3j \leq 3^{k+1}$, donc $f(f(n)) = 2 \times 3^{k+1} + 3j = 3n$. **Conclusion** : il existe une **unique** application du type cherché.

■ Corrigé de l'exercice 25

- a) Soit $n \geq m$ dans R tels que $f(n) = f(m)$; montrons $n = m$. $7n = 2027q + r$ et $7m = 2027q' + r$, donc $7(n - m) = 2027(q - q')$: le nombre premier 2027 divise $7(n - m)$ sans diviser 7, donc il divise $n - m$ (lemme d'Euclide) ; or $0 \leq n - m \leq 2026$: $n = m$. Une injection de R dans R (ensemble fini) est une **bijection** (cours). b) $1 \in R$ a donc un antécédent n : $7n = 2027q + 1$. Et $7 \times 1448 = 10\,136 = 5 \times 2027 + 1$ ✓.
- a) L'application $k \mapsto$ reste de N_k par 2027 va de $\{1, \dots, 2028\}$ (2028 éléments) dans $\{0, \dots, 2026\}$ (2027 éléments) : elle n'est pas injective (tiroirs) ; il existe $i < j$ tels que N_i et N_j ont le même reste. b) 2027 divise $N_j - N_i = \underbrace{1 \dots 1}_{j-i} \underbrace{0 \dots 0}_i = N_{j-i} \times 10^i$. Le nombre premier 2027 ne divise ni 2 ni 5, donc pas 10^i (lemme d'Euclide répété) : il divise N_{j-i} , qui s'écrit avec $j - i$ chiffres 1. (Le plus petit tel multiple a 1013 chiffres.)

■ Corrigé de l'exercice 26

- On simplifie à gauche ou à droite. Si f est injective : $f(g(f(x))) = f(x)$ donne $g(f(x)) = x$: $g \circ f = \text{Id}_F$. Si f est surjective : tout $y \in F$ s'écrit $f(x)$, et $f(g(y)) = f(g(f(x))) = f(x) = y$: $f \circ g = \text{Id}_F$. Si f est bijective : $g = f^{-1} \circ (f \circ g) = f^{-1} \circ \text{Id}_F = f^{-1}$.
- $f(g(f(x))) = (\sqrt{|x^2|})^2 = |x|^2 = x^2 = f(x)$ ✓. ($-\sqrt{|y|}$ convient aussi : g n'est pas déterminée par f .)
- $u \circ u \circ u = u$ est la relation de l'énoncé avec $f = g = u$. Si u est injective, 1. donne $u \circ u = \text{Id}_F$: u est bijective et $u^{-1} = u$; de même si u est surjective. Donc $u \text{ injective} \iff u \text{ surjective}$ (et alors $u \circ u = \text{Id}_F$). Exemple : $u(x) = |x|$ sur $\mathbb{R}$: $u \circ u \circ u = u$, $u(-1) = u(1)$, et -1 n'a pas d'antécédent.

■ Corrigé de l'exercice 27

- Tableau, ligne par ligne ($n = 0, 1, 2, 3$) : $m = 0$: 0, 2, 4, 6 ; $m = 1$: 1, 5, 9, 13 ; $m = 2$: 3, 11, 19, 27 ; $m = 3$: 7, 23, 39, 55. La ligne m contient les $\varphi(m, n) = 2^{m+1}n + 2^m - 1$: les pairs ($m = 0$), les entiers de reste 1 par 4 ($m = 1$), de reste 3 par 8 ($m = 2$)... Aucun entier n'apparaît deux fois : on devine une bijection.
- Existence, par récurrence forte.** $1 = 2^0 \times 1$. Soit $k \geq 2$; supposons la propriété vraie pour 1, ..., $k - 1$. Si k est impair, $k = 2^0 \times k$. Si k est pair, $k = 2k'$ avec $1 \leq k' < k$: $k' = 2^{m'}a$, donc $k = 2^{m'+1}a$.

Unicité, par l'absurde. Supposons $2^m a = 2^{m'} a'$ avec a, a' impairs et $(m, a) \neq (m', a')$. Si $m = m'$, alors $a = a'$: contradiction ; sinon, par exemple $m < m'$, et $a = 2^{m'-m} a'$ est pair : contradiction.

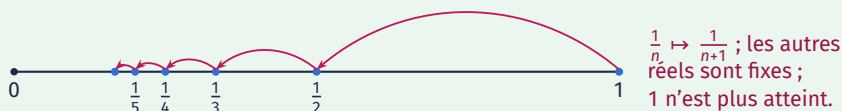
3. Soit $N \in \mathbb{N} : \varphi(m, n) = N \iff 2^m(2n+1) = N+1$. $N+1 \geq 1$ s'écrit de façon unique $2^m a$ avec a impair, et $a = 2n+1 \iff n = \frac{a-1}{2} \in \mathbb{N}$: antécédent unique ; φ est **bijectif**. $2028 = 4 \times 507 : \boxed{\varphi^{-1}(2027) = (2, 253)}$; $1024 = 2^{10} \times 1 : \boxed{\varphi^{-1}(1023) = (10, 0)}$. $(a, b, c) \mapsto \varphi(\varphi(a, b), c)$ est une bijection de $\mathbb{N}^3$ sur $\mathbb{N}$: c'est la composée de $(a, b, c) \mapsto (\varphi(a, b), c)$, bijection de $\mathbb{N}^3$ sur $\mathbb{N}^2$ (réciproque $(N, c) \mapsto (\varphi^{-1}(N), c)$), et de φ .

■ Corrigé de l'exercice 28

1. **Par l'absurde**, soit $j : \mathcal{P}(E) \rightarrow E$ injective. Définissons $s : E \rightarrow \mathcal{P}(E) : \text{si } x \in j(\mathcal{P}(E)), s(x) \text{ est l'unique partie } A \text{ telle que } j(A) = x ; \text{ sinon } s(x) = \emptyset$. Pour toute partie A , $s(j(A)) = A$: s est surjective, ce qui contredit le théorème de Cantor.
2. Soit $\Gamma : \mathcal{F}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E), u \mapsto u^{-1}(\{1\})$. D'une part $\Gamma(\Phi(A)) = 1_A^{-1}(\{1\}) = A$; d'autre part $\Phi(\Gamma(u)) = u$, car ces deux applications valent 1 exactement sur $u^{-1}(\{1\})$ et 0 ailleurs (u ne prend que les valeurs 0 et 1). Donc $\Gamma \circ \Phi = \text{Id}_{\mathcal{P}(E)}$ et $\Phi \circ \Gamma = \text{Id}_{\mathcal{F}(E)}$: Φ est **bijectif**, $\Phi^{-1} = \Gamma$. Si $S : E \rightarrow \mathcal{F}(E)$ était surjective, $\Gamma \circ S : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ le serait (composée de surjections) : contradiction avec Cantor.
3. δ prend ses valeurs dans $\{0, 1\} : \delta \in \mathcal{F}(E)$. **Par l'absurde**, si $\delta = \psi_a$ pour un $a \in E : \delta(a) = \psi_a(a)$ et $\delta(a) = 1 - \psi_a(a)$, d'où $2\psi_a(a) = 1$: impossible. Donc $\delta \notin \Psi(E)$. (δ est l'indicatrice de $\{x \in E / x \notin A_x\}$, où $A_x = \psi_x^{-1}(\{1\})$: c'est la partie de la preuve de Cantor.)

■ Corrigé de l'exercice 29

1. **Montrons que tout $y \in [0, 1[$ a exactement un antécédent.** L'écriture $\frac{1}{n}$ détermine $n : f$ est bien définie. $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} \in]0, \frac{1}{2}]$ et, si x n'est pas de la forme $\frac{1}{n}$, $x \neq 1$ et $f(x) = x \in [0, 1[: f$ est à valeurs dans $[0, 1[$. Soit $y \in [0, 1[$. Si $y = \frac{1}{m}$ avec $m \geq 2$: un antécédent x ne peut pas être « ordinaire » ($f(x) = x = y$ serait de la forme $\frac{1}{n}$), donc $x = \frac{1}{n}$ avec $\frac{1}{n+1} = \frac{1}{m} : x = \frac{1}{m-1}$, unique. Sinon : y n'est l'image d'aucun $\frac{1}{n}$, donc son unique antécédent est y . f est bijective : c'est l'« hôtel de Hilbert » (figure).

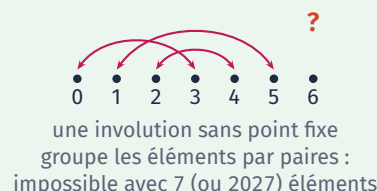


2. Soit $h(0) = \frac{1}{2}, h\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+2} (n \in \mathbb{N}^*)$ et $h(x) = x$ sinon. $A = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est envoyé bijectivement sur $\left\{\frac{1}{m} / m \geq 2\right\}$ ($0 \mapsto \frac{1}{2}, 1 \mapsto \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \mapsto \frac{1}{4}, \dots$), et le reste de $[0, 1]$, c'est-à-dire $]0, 1[$ privé des $\frac{1}{m} (m \geq 2)$, est fixe : h est une bijection de $[0, 1]$ sur $]0, 1[$.
3. $g : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$ (exercice 14), $a :]-1, 1[\rightarrow]0, 1[, t \mapsto \frac{t+1}{2}$ (réciproque $u \mapsto 2u - 1$) et $h^{-1} :]0, 1[\rightarrow [0, 1]$ sont bijectives : $\boxed{h^{-1} \circ a \circ g}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $[0, 1]$ (composée de bijections).
4. $k(n) = n + 1$ si $n \in \mathbb{N}, k(x) = x$ si $x \notin \mathbb{N} : k$ envoie bijectivement $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ sur lui-même ; ces deux images sont disjointes et leur réunion est $\mathbb{R} \setminus \{0\}$: k est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^*$.

■ Corrigé de l'exercice 30

1. a) **On calcule $f(f(f(n)))$ de deux façons.** La relation appliquée à $f(n)$ donne $f(f(f(n))) = f(n) + 1$; l'image par f de $f(f(n)) = n + 1$ donne $f(f(f(n))) = f(n + 1)$. Donc $\boxed{f(n + 1) = f(n) + 1}$. b) Par récurrence, $f(n) = n + a$ avec $a = f(0) \in \mathbb{N}$. Alors $f(f(n)) = n + 2a = n + 1$, soit $2a = 1$: impossible pour un entier. **Aucune** application ne convient.
2. $f(n) = n + 1013 : f(f(n)) = n + 2026 \checkmark$.

3. a) Comme en 1. : $f(n+2027) = f(f(f(n))) = f(n) + 2027$. Par récurrence sur q : $f(n+2027(q+1)) = f(n+2027q) + 2027 = f(n) + 2027(q+1)$.
- b) Si $n = 2027q + r$ ($0 \leq r \leq 2026$) et $f(r) = 2027q' + g(r)$: $f(n) = f(r) + 2027q = 2027(q+q') + g(r)$ avec $0 \leq g(r) \leq 2026$: le reste de $f(n)$ est $g(r)$.
- c) $f(r)$ a pour reste $g(r)$, donc (b) $f(f(r))$ a pour reste $g(g(r))$. Or $f(f(r)) = r + 2027$ a pour reste r : $g \circ g = \text{Id}_R$. **Par l'absurde**, si $g(r) = r$: $f(r) = 2027q + r$, puis $f(f(r)) = f(r + 2027q) = f(r) + 2027q = r + 4054q$; donc $4054q = 2027$, soit $2q = 1$: impossible. g n'a **pas de point fixe**.
- d) Si $r \in S$: $g(g(r)) = r < g(r)$, donc $g(r) \notin S$: $g(S) \subset R \setminus S$. Si $t \in R \setminus S$: $t \geq g(t)$ et $t \neq g(t)$, donc $g(t) < t = g(g(t))$: $g(t) \in S$ et $t = g(g(t)) \in g(S)$. Ainsi g induit une surjection de S sur $R \setminus S$, injective car g est bijective : une **bijection**. S et $R \setminus S$ ont donc le même nombre s d'éléments, et $2027 = \text{card } R = 2s$ serait pair : **contradiction**. Il n'existe pas de $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $f(f(n)) = n + 2027$.
4. Si $k = 2a$ est pair, $f(n) = n + a$ convient ($\text{Id}_{\mathbb{N}}$ pour $k = 0$). Si k est impair, le raisonnement de 3. (avec k au lieu de 2027 et $R = \{0, \dots, k-1\}$) fournit une involution sans point fixe d'un ensemble à k éléments, ce qui est impossible ($k = 1$: c'est 1.). **Une telle f existe $\iff k$ est pair**.



29

Corrigés : images et antécédents

■ Corrigé de l'exercice 31

1. a) $\mathcal{R}_1$: $1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 9 = 5 + 4, 4^2 = 16 = 3 \times 5 + 1$. $\mathcal{R}_2$: diviseurs de x dans F . $\mathcal{R}_3$: $y = 5 - x$. $\mathcal{R}_4$: multiples de x , autres que x , dans F .

$\mathcal{R}_1$	1	2	3	4
1	x			
2			x	
3				x
4	x			

$\mathcal{R}_2$	1	2	3	4
1	x			
2	x	x		
3	x		x	
4	x	x		x

$\mathcal{R}_3$	1	2	3	4
1				x
2			x	
3		x		
4	x			

$\mathcal{R}_4$	1	2	3	4
1		x	x	x
2				x
3				
4				

- b) Une relation est une application de E dans F si et seulement si **chaque ligne contient exactement une croix** (chaque x a une et une seule image). $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_3$ sont des applications ; $\mathcal{R}_2$ ne l'est pas (2 aurait deux images, 1 et 2) ; $\mathcal{R}_4$ non plus (3 n'a aucune image, 1 en aurait trois).
- c) Les antécédents de y se lisent dans la **colonne** de y . Pour $\mathcal{R}_1$: 1 a pour antécédents 1 et 4 ; 4 a pour antécédents 2 et 3 ; 2 et 3 n'en ont aucun. Pour $\mathcal{R}_3$ ($x \mapsto 5 - x$) : chaque $y \in F$ a exactement un antécédent, $5 - y$.
2. a) **Oui** : n et $n + 1$ sont deux entiers consécutifs, l'un d'eux est pair, donc $n(n + 1)$ est pair et $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$.
- b) De $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$: **non**, l'image de 0 serait $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$. De I dans $\mathbb{N}$: **oui**, car pour $n = 2k + 1$, $\frac{n^2+1}{2} = \frac{4k^2+4k+2}{2} = 2k^2 + 2k + 1 \in \mathbb{N}$.
- c) De $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: **non**, 3 n'a pas d'image ($4 - 3^2 < 0$). De $[-2, 2]$ dans $[0, 1]$: **non**, l'image de 0 est $2 \notin [0, 1]$. De $[-2, 2]$ dans $[0, 2]$: **oui**, car pour $-2 \leq x \leq 2$, $0 \leq 4 - x^2 \leq 4$, donc $\sqrt{4 - x^2}$ existe et appartient à $[0, 2]$.

d) **Oui** : $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, le dénominateur ne s'annule jamais.

e) **Non** : pour $x = \frac{1}{2}$, les entiers 0 et 1 vérifient tous deux $\left|\frac{1}{2} - n\right| \leq \frac{1}{2}$; la phrase ne désigne pas une image unique.

Avec « < » et l'ensemble D : **oui**. *Existence*. Soit $x \in D$ et $n = E\left(x + \frac{1}{2}\right)$: $n \leq x + \frac{1}{2} < n + 1$ donne $-\frac{1}{2} \leq x - n < \frac{1}{2}$, et $x - n \neq -\frac{1}{2}$ car $x \neq n - \frac{1}{2}$; donc $|x - n| < \frac{1}{2}$. *Unicité*. Si n et n' conviennent, $|n - n'| \leq |n - x| + |x - n'| < 1$, donc $n = n'$ (entiers). L'image de x est l'entier le plus proche de x .

■ Corrigé de l'exercice 32

1. a) $2(x+1)^2 - 3 = 2x^2 + 4x + 2 - 3 = f(x)$. $f(0) = \boxed{-1}$, $f(-1) = \boxed{-3}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 2 - 1 = \boxed{\frac{3}{2}}$,
 $f(-1 + \sqrt{2}) = 2 \times 2 - 3 = \boxed{1}$.

b) $f(x) = -1 \iff 2x^2 + 4x = 0 \iff 2x(x+2) = 0$: antécédents $\boxed{0 \text{ et } -2}$. $f(x) = -3 \iff (x+1)^2 = 0$: $\boxed{-1}$ seulement. $f(x) = -5 \iff (x+1)^2 = -1$: **aucun** antécédent. $f(x) = 1 \iff (x+1)^2 = 2$: $\boxed{-1 - \sqrt{2} \text{ et } -1 + \sqrt{2}}$.

c) $f(x) = y \iff (x+1)^2 = \frac{y+3}{2}$. Si $y < -3$: aucun antécédent. Si $y = -3$: un seul, -1 . Si $y > -3$: deux, $\boxed{-1 - \sqrt{\frac{y+3}{2}} \text{ et } -1 + \sqrt{\frac{y+3}{2}}}$.

d) $f(-2) = 8 - 8 - 1 = -1$: A **appartient** au graphe. $f(1) = 5 \neq 4$: B **n'appartient pas** au graphe. $f(x) = 15 \iff (x+1)^2 = 9 \iff x+1 = \pm 3$: les points $\boxed{(2, 15) \text{ et } (-4, 15)}$.

2. $k(0) = 4$, $k\left(\frac{3}{2}\right) = 1$, $k(-1) = 6$. $k(x) = 6 \iff |2x - 3| = 5 \iff 2x - 3 = 5 \text{ ou } 2x - 3 = -5$: antécédents $\boxed{4 \text{ et } -1}$. $k(x) = 1 \iff 2x - 3 = 0$: $\boxed{\frac{3}{2}}$. $k(x) = 0 \iff |2x - 3| = -1$: **aucun**.

En général, $k(x) = y \iff |2x - 3| = y - 1$: si $y > 1$, deux antécédents $\frac{y+2}{2}$ et $\frac{4-y}{2}$; si $y = 1$, un seul ; si $y < 1$, aucun.

■ Corrigé de l'exercice 33

1. Pour $x \neq 2$: $f(x) = y \iff x^2 + 5 = y(x - 2) \iff x^2 - yx + 2y + 5 = 0$. De plus 2 n'est jamais solution de $(\mathcal{E}_y)$, car $4 - 2y + 2y + 5 = 9 \neq 0$. Les solutions réelles de $(\mathcal{E}_y)$ sont donc toutes dans $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, et ce sont exactement les antécédents de y .

2. $\Delta = y^2 - 4(2y + 5) = y^2 - 8y - 20 = \boxed{(y - 10)(y + 2)}$ (racines -2 et 10). Donc :

- si $y < -2$ ou $y > 10$: $\Delta > 0$, **deux** antécédents ;
- si $y = -2$ ou $y = 10$: $\Delta = 0$, **un seul** antécédent, $x = \frac{y}{2}$: $\boxed{-1 \text{ pour } y = -2, 5 \text{ pour } y = 10}$;
- si $-2 < y < 10$: $\Delta < 0$, **aucun** antécédent.

3. $f(\mathbb{R} \setminus \{2\}) =]-\infty, -2] \cup [10, +\infty[$. La droite d'équation $y = m$ coupe la courbe de f en deux points si $m < -2$ ou $m > 10$, en un seul point si $m \in [-2, 10]$, et ne la coupe pas si $-2 < m < 10$.

4. a) $f(x) - 10 = \frac{x^2 + 5 - 10x + 20}{x - 2} = \frac{(x - 5)^2}{x - 2}$ et $f(x) + 2 = \frac{x^2 + 5 + 2x - 4}{x - 2} = \frac{(x + 1)^2}{x - 2}$.

b) Si $x > 2$, $\frac{(x - 5)^2}{x - 2} \geq 0$, donc $f(x) \geq 10$. Si $x < 2$, $\frac{(x + 1)^2}{x - 2} \leq 0$, donc $f(x) \leq -2$.

c) Soit $y > 10$ et x un antécédent de y . Si l'on avait $x < 2$, b) donnerait $y = f(x) \leq -2 < 10$: absurde. Donc $x > 2$: **les deux antécédents de y sont dans $]2, +\infty[$** . De même, si $y < -2$, un antécédent $x > 2$ donnerait $y \geq 10$: les deux antécédents sont dans $]-\infty, 2[$.

Ainsi $f(]2, +\infty[) = [10, +\infty[$ (minimum 10 atteint en 5) et $f(]-\infty, 2[) =]-\infty, -2]$ (maximum -2 atteint en -1).

■ Corrigé de l'exercice 34

1. f et g ont mêmes ensembles de départ et d'arrivée ; comparons $f(x)$ et $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Si $|x| \geq 1$: $g(x) = |x| + 1 + |x| - 1 = 2|x|$; si $x \geq 1$, $f(x) = (x - 1) + (x + 1) = 2x = 2|x|$; si $x \leq -1$, $f(x) = (1 - x) + (-x - 1) = -2x = 2|x|$.

Si $|x| < 1$: $g(x) = |x| + 1 + 1 - |x| = 2$ et $f(x) = (1 - x) + (x + 1) = 2$.

Donc $f(x) = g(x)$ pour tout x : $f = g$. $f|_{[-1,1]}$ est l'application **constante** égale à 2 (aussi en ± 1) ; $f|_{[1,+\infty[}$ est $x \mapsto 2x$.

2. Si $n = 2k$: $n^2 = 4k^2$, donc $u(n) = 0 = v(n)$. Si $n = 2k + 1$: $n^2 = 4(k^2 + k) + 1$, donc $u(n) = 1 = v(n)$. Même départ, même arrivée, mêmes images : $u = v$, bien que les formules diffèrent.

$w(2) = 4$ (car $4 = 0 \times 8 + 4$) alors que $u(2) = 0$: $w \neq u$. Enfin, pour $n = 2k + 1 \in I$: $n^2 = 4k(k + 1) + 1$, et $k(k + 1)$ est pair (produit de deux entiers consécutifs), donc $4k(k + 1)$ est un multiple de 8 et $w(n) = 1$: $w|_I$ **est la constante 1**.

3. a) Analyse. Si H est un prolongement pair de h et $x < 0$: $H(x) = H(-x) = h(-x) = x^2 + 5x$. Donc $H(x) = x^2 - 5x$ si $x \geq 0$ et $x^2 + 5x$ si $x < 0$, soit $H(x) = x^2 - 5|x|$: **au plus un** prolongement pair.

Synthèse. $H(x) = x^2 - 5|x|$ est définie sur $\mathbb{R}$, vaut $h(x)$ pour $x \geq 0$, et $H(-x) = x^2 - 5|x| = H(x)$.

$H(x) = x^2 - 5|x|$ est l'unique prolongement pair.

b) Si K est un prolongement impair et $x < 0$: $K(x) = -K(-x) = -h(-x) = -x^2 - 5x$; pour $x \geq 0$, $K(x) = x^2 - 5x$. Dans les deux cas $K(x) = x|x| - 5x$. Réciproquement, $x \mapsto x|x| - 5x$ prolonge h et $K(-x) = -x|x| + 5x = -K(x)$: $K(x) = x|x| - 5x$ est l'unique prolongement impair.

c) Non. Si L est impaire, $L(0) = -L(0)$, donc $L(0) = 0$; mais un prolongement de $x \mapsto x^2 + 1$ vérifie $L(0) = 1$. Contradiction.

■ Corrigé de l'exercice 35

1. $\Gamma_1 : y^2 - 2xy + x^2 = (y - x)^2 = 0 \iff y = x$. Pour tout réel x , un seul y : $A = \mathbb{R}$ et Γ_1 est le graphe de $\text{Id}_{\mathbb{R}}$.

$\Gamma_2 : xy - y = 2x \iff y(x - 1) = 2x$. Pour $x = 1$, on obtient $0 = 2$: aucun point d'abscisse 1. Pour $x \neq 1$, un seul $y = \frac{2x}{x-1}$. Donc $A = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et Γ_2 **est le graphe de $x \mapsto \frac{2x}{x-1}$** , de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{R}$.

Γ_3 : si $y \geq 0$, l'équation devient $2y = 2x$, soit $y = x$, ce qui impose $x \geq 0$; si $y < 0$, elle devient $0 = 2x$, soit $x = 0$. Donc $\Gamma_3 = \{(x, x) : x \geq 0\} \cup \{(0, y) : y < 0\}$ et $A = [0, +\infty[$. **Ce n'est pas un graphe** : l'abscisse 0 porte une infinité de points $(0, y)$, $y \leq 0$.

$\Gamma_4 : x = E(y)$ est un entier, et pour $n \in \mathbb{Z}$, $(n, n) \in \Gamma_4$: $A = \mathbb{Z}$. **Ce n'est pas un graphe** : pour $x = 0$, tous les $y \in [0, 1[$ conviennent.

2. a) En développant, $(y - x)(y - 2) = y^2 - 2y - xy + 2x = y^2 - (x + 2)y + 2x$. Donc $(x, y) \in \Gamma_5 \iff y = x$ ou $y = 2$: Γ_5 est la réunion des droites $y = x$ et $y = 2$. Ce n'est pas un graphe : $(0, 0)$ et $(0, 2)$ appartiennent à Γ_5 .

b) Le graphe de f est contenu dans Γ_5 si et seulement si $f(x) \in \{x, 2\}$ pour tout x . Pour chaque réel $a \neq 2$, posons $f_a(a) = 2$ et $f_a(x) = x$ si $x \neq a$: le graphe de f_a est dans Γ_5 , et si $a \neq b$, $f_a(a) = 2 \neq a = f_b(a)$, donc $f_a \neq f_b$. Il y a donc une **infinité** de telles applications.

c) Analyse. Soit f une telle application, avec $f(x) \geq x$ et $f(x) \geq 2$. Si $x > 2$: $f(x) \geq x > 2$, donc $f(x) \neq 2$ et $f(x) = x$. Si $x < 2$: $f(x) \geq 2 > x$, donc $f(x) \neq x$ et $f(x) = 2$. Si $x = 2$: $f(2) = 2$. Il y a donc **au plus une** solution.

Synthèse. L'application définie par $f(x) = x$ si $x \geq 2$ et $f(x) = 2$ si $x < 2$ convient. Enfin, si $x \geq 2$, $\frac{x+2+(x-2)}{2} = x$, et si $x < 2$, $\frac{x+2+(2-x)}{2} = 2$: $f(x) = \frac{x+2+|x-2|}{2}$ (le plus grand des deux réels x et 2).

■ Corrigé de l'exercice 36

1. $\varphi(0) = (-1, 0)$, $\varphi(1) = \varphi(-1) = (0, 0)$, $\varphi(2) = (3, 6)$, $\varphi(-2) = (3, -6)$.

$(3, 6)$: $t^2 - 1 = 3$ donne $t = \pm 2$, et seul $t = 2$ donne $t^3 - t = 6$: antécédent $\boxed{2}$. $(0, 0)$: $t^2 = 1$ donne $t = \pm 1$, et les deux donnent $t^3 - t = 0$: antécédents $\boxed{-1 \text{ et } 1}$. $(-1, 1)$: $t^2 = 0$ donne $t = 0$, mais $0^3 - 0 \neq 1$: **aucun** antécédent. $(8, 24)$: $t = \pm 3$ et $27 - 3 = 24$: antécédent $\boxed{3}$.

2. $\varphi(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}$. Si $(x, y) = \varphi(t)$, alors $x + 1 = t^2$ et $y = t(t^2 - 1) = tx$, d'où $y^2 = t^2 x^2 = (x + 1)x^2$.

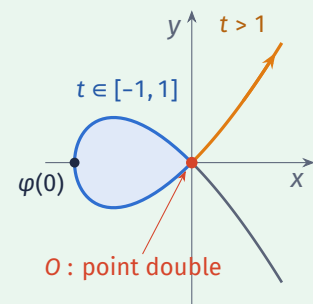
$\mathcal{C} \subset \varphi(\mathbb{R})$. Soit $M(x, y) \in \mathcal{C}$. Si $x = 0$, alors $y^2 = 0$, donc $M = O = \varphi(1)$. Si $x \neq 0$, posons $t = \frac{y}{x}$: $t^2 = \frac{y^2}{x^2} = x + 1$, donc $x = t^2 - 1$, et $y = tx = t^3 - t$: $M = \varphi(t)$.

Par double inclusion, $\boxed{\varphi(\mathbb{R}) = \mathcal{C}}$.

3. Soit $M(x, y) \in \mathcal{C}$, $M \neq O$. Alors $x \neq 0$ (sinon $y = 0$). Si $\varphi(t) = M$, on a $y = tx$ (question 2), donc $t = \frac{y}{x}$: M a **au plus un** antécédent, et il en a un d'après 2. Pour O : $t^2 - 1 = 0$ impose $t = \pm 1$, et les deux conviennent : **deux** antécédents.

4. Si $t \in [-1, 1]$, $t^2 \in [0, 1]$, donc $x = t^2 - 1 \in [-1, 0]$. Réciproquement, soit $M(x, y) \in \mathcal{C}$ avec $-1 \leq x \leq 0$: si $M = O$, $M = \varphi(1)$; sinon, son antécédent t vérifie $t^2 = x + 1 \in [0, 1]$, donc $t \in [-1, 1]$. Ainsi $\boxed{\varphi([-1, 1]) = \{(x, y) \in \mathcal{C} : -1 \leq x \leq 0\}}$: c'est la boucle (en couleur).

Si $t > 1$: $x = t^2 - 1 > 0$ et $y = tx > 0$. Réciproquement, si $M(x, y) \in \mathcal{C}$ avec $x > 0$ et $y > 0$, son antécédent $t = \frac{y}{x}$ est positif et $t^2 = x + 1 > 1$, donc $t > 1$. Ainsi $\varphi(]1, +\infty[)$ est la **branche de $\mathcal{C}$ située dans le quart de plan $x > 0, y > 0$** .



30

Corrigés : images de parties

■ Corrigé de l'exercice 37

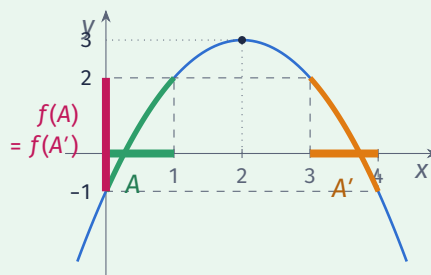
- $f(\{1, 2\}) = \{f(1), f(2)\} = \{a, b\}$; $f(\{1, 3, 6\}) = \{b\}$; $f(\{4, 5, 6\}) = \{a, b, d\}$; $f(E) = \{a, b, d\}$ (c n'a pas d'antécédent).
- On rassemble les éléments dont l'image est dans la partie : $f^{-1}(\{a\}) = \{2, 5\}$; $f^{-1}(\{b, c\}) = \{1, 3, 6\}$; $f^{-1}(\{c\}) = \emptyset$; $f^{-1}(\{a, d\}) = \{2, 4, 5\}$; $f^{-1}(F) = E$.
- Si $f(A) = \{a, d\}$, alors $A \subset f^{-1}(\{a, d\}) = \{2, 4, 5\}$; $d \in f(A)$ impose $4 \in A$, et $a \in f(A)$ impose $2 \in A$ ou $5 \in A$. Réciproquement, ces parties conviennent : $A = \{2, 4\}, \{4, 5\}$ ou $\{2, 4, 5\}$.
- Si $f^{-1}(B) = \{2, 4, 5\}$: $2 \in f^{-1}(B)$ impose $a \in B$, $4 \in f^{-1}(B)$ impose $d \in B$, et $1 \notin f^{-1}(B)$ impose $b \notin B$; c, qui n'a pas d'antécédent, est libre. Réciproquement, ces parties conviennent : $B = \{a, d\}$ ou $\{a, c, d\}$.
Pour $\{1, 2\}$: si $1 \in f^{-1}(B)$, alors $b = f(1) \in B$, donc 3 et 6 sont aussi dans $f^{-1}(B)$. **Aucune** partie ne convient : une image réciproque contient, avec un élément, tous ceux qui ont la même image.
- $f(f^{-1}(\{a, c\})) = f(\{2, 5\}) = \{a\} \subsetneq \{a, c\}$ (c n'a pas d'antécédent) ; $f^{-1}(f(\{1\})) = f^{-1}(\{b\}) = \{1, 3, 6\} \supsetneq \{1\}$. On n'a que les inclusions du cours.

■ Corrigé de l'exercice 38

- Pour $y \geq 0$: $g(x) = y \iff x = 2 - y$ ou $x = 2 + y$. $g([3, 5])$. Si $3 \leq x \leq 5$, $1 \leq x - 2 \leq 3$, donc $g(x) = x - 2 \in [1, 3]$; pour $y \in [1, 3]$, $x = 2 + y \in [3, 5]$: $g([3, 5]) = [1, 3]$. $g([0, 3])$. Si $0 \leq x \leq 3$, $-2 \leq x - 2 \leq 1$, donc $0 \leq g(x) \leq 2$; pour $y \in [0, 2]$, $x = 2 - y \in [0, 2] \subset [0, 3]$: $g([0, 3]) = [0, 2]$. $g([-1, 1])$. Si $-1 < x < 1$, $-3 < x - 2 < -1$, donc $g(x) = 2 - x \in]1, 3[$; pour $y \in]1, 3[$, $x = 2 - y \in]-1, 1[$: $g([-1, 1]) =]1, 3[$.
 - $g(x) \leq 1 \iff -1 \leq x - 2 \leq 1 \iff 1 \leq x \leq 3$ (et $g(x) \geq 0$ toujours) : $g^{-1}([0, 1]) = [1, 3]$. $g(x) > 2 \iff x - 2 > 2$ ou $x - 2 < -2$: $g^{-1}(]2, +\infty[) =]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$. $|x - 2| = 3 \iff x = 5$ ou $x = -1$: $g^{-1}(\{3\}) = \{-1, 5\}$. $g(x) \geq 0$, donc $g^{-1}([-2, -1]) = \emptyset$.
 - Comme ci-dessus, $g([0, 2]) = [0, 2]$ (antécédent $2 - y$) et $g([2, 3]) = [0, 1]$ (antécédent $2 + y$) : $g([0, 2]) \cup g([2, 3]) = [0, 2] = g([0, 3])$, conformément à $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$.
 $[0, 2] \cap [2, 4] = \{2\}$, donc $g([0, 2] \cap [2, 4]) = \{0\}$, alors que $g([0, 2]) \cap g([2, 4]) = [0, 2] \cap [0, 2] = [0, 2]$: seule l'inclusion $\{0\} \subset [0, 2]$ est vraie (par exemple $g(1) = g(3) = 1$, avec 1 dans la première partie seulement et 3 dans la seconde seulement).
- a est affine de coefficient $-\frac{1}{2} < 0$, donc strictement décroissante, et $a(x) = y \iff x = 8 - 2y$. Si $-2 \leq x \leq 6$, $a(6) \leq a(x) \leq a(-2)$, soit $1 \leq a(x) \leq 5$; pour $y \in [1, 5]$, $x = 8 - 2y \in [-2, 6]$: $a([-2, 6]) = [1, 5]$. Si $x \leq 0$, $a(x) \geq 4$; pour $y \geq 4$, $x = 8 - 2y \leq 0$: $a(]-\infty, 0]) = [4, +\infty[$.
 $0 \leq 4 - \frac{x}{2} < 3 \iff 1 < \frac{x}{2} \leq 4 \iff 2 < x \leq 8$: $a^{-1}([0, 3]) =]2, 8]$.

■ Corrigé de l'exercice 39

1. $f(x) = -(x^2 - 4x) - 1 = -((x-2)^2 - 4) - 1 = 3 - (x-2)^2$. Donc f est strictement croissante sur $]-\infty, 2]$, strictement décroissante sur $[2, +\infty[$, de maximum $f(2) = 3$. Pour $y \leq 3$: $f(x) = y \iff (x-2)^2 = 3-y \iff x = 2 - \sqrt{3-y}$ ou $x = 2 + \sqrt{3-y}$; les réels $y > 3$ n'ont pas d'antécédent.
2. $f([0, 3])$. Sur $[0, 2]$, f croît : $f(0) \leq f(x) \leq f(2)$, soit $f(x) \in [-1, 3]$; pour $y \in [-1, 3]$, $0 \leq 3-y \leq 4$ et $x = 2 - \sqrt{3-y} \in [0, 2]$. Donc $f([0, 2]) = [-1, 3]$; de même $f([2, 3]) = [2, 3]$ (antécédent $2 + \sqrt{3-y}$), d'où $f([0, 3]) = [-1, 3]$. $f([3, 5])$. f décroît sur $[3, 5]$: $f(5) = -6 \leq f(x) \leq f(3) = 2$; pour $y \in [-6, 2]$, $1 \leq 3-y \leq 9$, donc $x = 2 + \sqrt{3-y} \in [3, 5]$. $f([3, 5]) = [-6, 2]$.
 $f(]-1, 1])$. f croît : $-6 = f(-1) < f(x) \leq f(1) = 2$; pour $y \in [-6, 2]$, $1 \leq 3-y < 9$, donc $x = 2 - \sqrt{3-y} \in]-1, 1]$. $f(]-1, 1]) = [-6, 2]$.
3. On résout avec la forme canonique : $2 \leq f(x) \leq 3 \iff (x-2)^2 \leq 1 \iff |x-2| \leq 1$: $f^{-1}([2, 3]) = [1, 3]$. $f(x) < -1 \iff (x-2)^2 > 4 \iff |x-2| > 2$: $f^{-1}(]-\infty, -1]) =]-\infty, 0] \cup [4, +\infty[$.
 $f(x) = 4 \iff (x-2)^2 = -1$: $f^{-1}(\{4\}) = \emptyset$. $-1 \leq f(x) \leq 2 \iff 1 \leq (x-2)^2 \leq 4 \iff 1 \leq |x-2| \leq 2$: $f^{-1}([-1, 2]) = [0, 1] \cup [3, 4]$.
4. Comme en 2 : $f(A) = [f(0), f(1)] = [-1, 2]$ (antécédent $2 - \sqrt{3-y} \in [0, 1]$) et $f(A') = [f(4), f(3)] = [-1, 2]$ (antécédent $2 + \sqrt{3-y} \in [3, 4]$) : $f(A) = f(A') = [-1, 2]$ (figure).
 $A \cap A' = \emptyset$, donc $f(A \cap A') = \emptyset \neq [-1, 2] = f(A) \cap f(A')$.
 $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}([-1, 2]) = [0, 1] \cup [3, 4] \neq A$.
 $f^{-1}([2, 7]) = \{x : (x-2)^2 \leq 1\} = [1, 3]$ (les réels de $]3, 7]$ n'ont pas d'antécédent) et $f([1, 3]) = [2, 3]$:
 $f(f^{-1}([2, 7])) = [2, 3] \neq [2, 7]$.
5. a) Sur $]-\infty, 2]$, f croît : pour $a \leq 2$, $f([a, 2]) = [f(a), 3]$ (antécédent $2 - \sqrt{3-y} \in [a, 2]$). Il faut $f(a) = -6$, soit $(a-2)^2 = 9$, et $a \leq 2$ donne $a = -1$.
b) Pour $b \geq 2$: $f([0, b]) = f([0, 2]) \cup f([2, b]) = [-1, 3] \cup [f(b), 3]$. Cet intervalle est $[-1, 3]$ si et seulement si $f(b) \geq -1$, soit $(b-2)^2 \leq 4$, c'est-à-dire $b \leq 4$: $b \in [2, 4]$.



■ Corrigé de l'exercice 40

1. a) Si $-2 \leq x < x'$, alors $0 \leq x+2 < x'+2$, donc $\sqrt{x+2} < \sqrt{x'+2}$ et $r(x) > r(x')$: r est **strictement décroissante**. Pour $y \leq 3$: $r(x) = y \iff \sqrt{x+2} = 3-y \iff x+2 = (3-y)^2$ (car $3-y \geq 0$) $\iff x = (3-y)^2 - 2$, qui est bien ≥ -2 .
b) $r(-1) = 2$ et $r(7) = 0$; pour $x \in [-1, 7]$, $0 \leq r(x) \leq 2$; pour $y \in [0, 2]$, $x = (3-y)^2 - 2 \in [1-2, 9-2] = [-1, 7]$: $r([-1, 7]) = [0, 2]$. Comme $\sqrt{x+2} \geq 0$, $r(x) \leq 3$, et tout $y \leq 3$ a un antécédent : $r(]-2, +\infty[) =]-\infty, 3]$.
c) $1 \leq r(x) \leq 2 \iff 1 \leq \sqrt{x+2} \leq 2 \iff 1 \leq x+2 \leq 4$: $r^{-1}([1, 2]) = [-1, 2]$. $r(x) \leq 3$: $r^{-1}([3, 5]) = \emptyset$. $r(x) < 0 \iff \sqrt{x+2} > 3 \iff x > 7$: $r^{-1}(]-\infty, 0]) = [7, +\infty[$. $r(x) \geq -1 \iff \sqrt{x+2} \leq 4 \iff x \leq 14$: $r^{-1}([-1, 3]) = [-2, 14]$.
2. a) $x^2 + 1 \geq 1$ donne $0 < k(x) \leq 4$. Réciproquement, pour $y \in]0, 4]$, $\frac{4}{y} - 1 \geq 0$ et $x = \sqrt{\frac{4}{y} - 1}$ vérifie $x^2 + 1 = \frac{4}{y}$, donc $k(x) = y$. Ainsi $k(\mathbb{R}) =]0, 4]$.

b) $k(-x) = k(x)$; k croît sur $]-\infty, 0]$ et décroît sur $[0, +\infty[$ (car $x^2 + 1$ y décroît puis croît). Donc $k([-1, 0]) = [k(-1), k(0)] = [2, 4]$ et $k([0, 2]) = [k(2), k(0)] = [\frac{4}{5}, 4]$ (antécédents $\pm\sqrt{\frac{4}{y}-1}$), d'où

$$k([-1, 2]) = [\frac{4}{5}, 4]. \text{ Si } x \geq 1, 0 < k(x) \leq 2; \text{ pour } y \in]0, 2], x = \sqrt{\frac{4}{y}-1} \geq 1 : k([1, +\infty[) =]0, 2].$$

$$c) 1 \leq k(x) \leq 2 \iff 2 \leq x^2 + 1 \leq 4 \iff 1 \leq |x| \leq \sqrt{3} : k^{-1}([1, 2]) = [-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}].$$

$$k(x) > 2 \iff x^2 < 1 : k^{-1}(]2, +\infty[) =]-1, 1[. \quad k(x) = 4 \iff x = 0 : \{0\}. \quad k(x) > 0 : k^{-1}(]-\infty, 0]) = \emptyset.$$

d) Comme $k(x) \leq 4 < 8$, $k(x) \in [2, 8] \iff k(x) \geq 2 \iff x^2 \leq 1 : k^{-1}([2, 8]) = [-1, 1]$, puis $k([-1, 1]) = [2, 4] : k(k^{-1}([2, 8])) = [2, 4] \neq [2, 8]$ (les réels de $]4, 8]$ n'ont pas d'antécédent).

■ Corrigé de l'exercice 41

1. $(\Rightarrow)$ Supposons $f(A) \subset B$. Pour $x \in A$, $f(x) \in f(A) \subset B$, donc $x \in f^{-1}(B)$. $(\Leftarrow)$ Supposons $A \subset f^{-1}(B)$. Soit $y \in f(A) : y = f(x)$ avec $x \in A \subset f^{-1}(B)$, donc $y = f(x) \in B$.

2. Par double inclusion. $(\subset)$ Soit $y \in f(A \cap f^{-1}(B)) : y = f(x)$ avec $x \in A$ et $f(x) \in B$; donc $y \in f(A)$ et $y \in B$. $(\supset)$ Soit $y \in f(A) \cap B : y = f(x)$ avec $x \in A$; comme $f(x) = y \in B$, $x \in f^{-1}(B)$; donc $x \in A \cap f^{-1}(B)$ et $y \in f(A \cap f^{-1}(B))$.

Une partie P de E vérifie $f(P) = \emptyset \iff P = \emptyset$; avec $P = A \cap f^{-1}(B) : f(A) \cap B = \emptyset \iff A \cap f^{-1}(B) = \emptyset$.

3. Les images directes et réciproques conservent l'inclusion. De $A \subset f^{-1}(f(A))$ on tire $f(A) \subset f(f^{-1}(f(A)))$; et l'inclusion $f(f^{-1}(B)) \subset B$ appliquée à $B = f(A)$ donne l'inclusion inverse. D'où $f(f^{-1}(f(A))) = f(A)$.

De même, $A \subset f^{-1}(f(A))$ appliquée à $A = f^{-1}(B)$ donne $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(f(f^{-1}(B)))$; et de $f(f^{-1}(B)) \subset B$ on tire $f^{-1}(f(f^{-1}(B))) \subset f^{-1}(B)$. D'où $f^{-1}(f(f^{-1}(B))) = f^{-1}(B)$.

4. a) $(\Rightarrow) B' = f(A)$ convient. $(\Leftarrow)$ Si $A = f^{-1}(B')$, la question 3 donne $f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(f(f^{-1}(B'))) = f^{-1}(B') = A$.

b) Ici $f(2-x) = |1-x| = f(x)$, et $f(z) = f(x) \iff z-1 = \pm(x-1) \iff z = x$ ou $z = 2-x$.

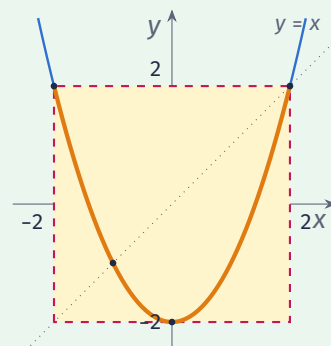
$(\Rightarrow)$ Si $A = f^{-1}(f(A))$ et $x \in A : f(2-x) = f(x) \in f(A)$, donc $2-x \in f^{-1}(f(A)) = A$.

$(\Leftarrow)$ Si A est symétrique par rapport à 1 : soit $z \in f^{-1}(f(A))$; alors $f(z) = f(x)$ avec $x \in A$, donc $z = x$ ou $z = 2-x$: dans les deux cas $z \in A$. Ainsi $f^{-1}(f(A)) \subset A$, et l'autre inclusion est toujours vraie.

$[0, 2]$ est symétrique ($0 \leq x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq 2-x \leq 2$) : $f^{-1}(f([0, 2])) = [0, 2]$. $[1, 2]$ ne l'est pas ($2 \in [1, 2]$ mais $0 \notin [1, 2]$) : en effet $f([1, 2]) = [0, 1]$ et $f^{-1}([0, 1]) = [0, 2] \neq [1, 2]$.

■ Corrigé de l'exercice 42

1. Pour $x \in [-2, 2]$: $0 \leq x^2 \leq 4$, donc $-2 \leq f(x) \leq 2$; pour $y \in [-2, 2]$, $x = \sqrt{y+2} \in [0, 2]$ et $f(x) = y$.
Donc $f([-2, 2]) = [-2, 2]$. Pour $x \geq 2$, $f(x) \geq 2$; pour $y \geq 2$, $x = \sqrt{y+2} \geq 2$: $f([2, +\infty[) = [2, +\infty[$.
Enfin $-2 \leq x^2 - 2 \leq 2 \iff x^2 \leq 4 \iff |x| \leq 2$: $f^{-1}([-2, 2]) = [-2, 2]$.
2. Rappel : f décroît sur $]-\infty, 0]$, croît sur $[0, +\infty[$, et $f(x) = y \iff x = \pm\sqrt{y+2}$ ($y \geq -2$).
- a) Si $0 \leq a$: f croît sur $[a, b]$ et $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$ (antécédent $\sqrt{y+2} \in [a, b]$). Donc $f(a) = a$ et $f(b) = b$: a et b sont racines de $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$, donc appartiennent à $\{-1, 2\}$, ce qui est impossible avec $0 \leq a < b$.
- b) Si $b \leq 0$: f décroît sur $[a, b]$ et $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$, donc $b^2 - 2 = a$ et $a^2 - 2 = b$. Par différence, $b^2 - a^2 = a - b$, soit $(b-a)(a+b+1) = 0$, et $b \neq a$ donne $a+b = -1$. Alors $a^2 - 2 = -1 - a$, soit $a^2 + a - 1 = 0$; comme $a < b = -1 - a$, $a < -\frac{1}{2}$, d'où $a = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $b = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0$: contradiction.
- c) Si $a < 0 < b$: $f([a, b]) = f([a, 0]) \cup f([0, b]) = [-2, a^2 - 2] \cup [-2, b^2 - 2] = [-2, M-2]$. Donc $a = -2$, puis $M \geq a^2 = 4$ et $M-2 = b$. Si $b \leq 2$, $M = 4$ et $b = 2$; si $b > 2$, $M = b^2$ et $b^2 - b - 2 = 0$, d'où $b \in \{-1, 2\}$: contradiction.
- Conclusion (avec 1) : $[-2, 2]$ est l'unique segment invariant.
3. a) $f(-x) = f(x)$, donc $x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B \iff f(-x) \in B \iff -x \in f^{-1}(B)$.
- b) Supposons $f^{-1}([a, b]) = [a, b]$. D'après a), $-a$ et $-b$ sont dans $[a, b]$: $-a \leq b$ et $a \leq -b$, donc $a = -b$ avec $b > 0$. Comme $0 \in [-b, b]$, $f(0) = -2 \in [-b, b]$, donc $b \geq 2$. Alors $-b \leq x^2 - 2 \leq b \iff x^2 \leq b+2$ (car $2-b \leq 0$), d'où $f^{-1}([-b, b]) = [-\sqrt{b+2}, \sqrt{b+2}]$. Il faut $\sqrt{b+2} = b$, soit $b^2 - b - 2 = 0$ avec $b > 0$: $b = 2$. Réciproquement $[-2, 2]$ convient (question 1) : $[a, b] = [-2, 2]$.



31

Corrigés : injections, surjections

■ Corrigé de l'exercice 43

1. On a toujours $f(x) = |x+2| \geq 0$, et $f(-2-s) = f(-2+s) = |s|$.
- a) $E = F = \mathbb{R}$: $f(-3) = f(-1) = 1$ avec $-3 \neq -1$: **non injective** ; -1 n'a pas d'antécédent ($f \geq 0$) : **non surjective**.
- b) $E = [-2, +\infty[$, $F = \mathbb{R}$: pour $x \geq -2$, $f(x) = x+2$, donc $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$: **injective** ; -1 n'a toujours pas d'antécédent : **non surjective**.
- c) $E = \mathbb{R}$, $F = [0, +\infty[$: pour $y \geq 0$, $x = y-2$ vérifie $f(x) = |y| = y$: **surjective** ; mais $f(-3) = f(-1)$: **non injective**.
- d) $E = [-2, +\infty[$, $F = [0, +\infty[$: injective (comme en b) et surjective ($x = y-2 \geq -2$) : **bijective**.
- e) $E = [-3, 1]$, $F = [0, 3]$: pour $-3 \leq x \leq 1$, $-1 \leq x+2 \leq 3$, donc $f(x) \in [0, 3]$ (f est bien une application de E dans F). Pour $y \in [0, 3]$, $x = y-2 \in [-2, 1] \subset E$: **surjective**. Mais -3 et -1 sont dans E et ont la même image : **non injective**.

La même formule donne des propriétés différentes selon les ensembles de départ et d'arrivée.

2. a) Par exemple $1 \mapsto a, 2 \mapsto b, 3 \mapsto c, 4 \mapsto c$: chaque élément de F a un antécédent.
 b) Une injection de E dans F donnerait 4 images deux à deux distinctes dans F , qui n'a que 3 éléments (principe des tiroirs) : impossible.
 c) $a \mapsto 1, b \mapsto 2, c \mapsto 3$ est injective. Une application g de F dans E a au plus 3 images, donc $g(F) \neq E$: **aucune** surjection de F sur E .

■ Corrigé de l'exercice 44

- a) $f(n) = f(n') \Rightarrow 3n+2 = 3n'+2 \Rightarrow n = n'$: **injective**. Comme $3n+2 \geq 2$, 0 n'a pas d'antécédent : **non surjective**. Un entier m s'écrit $3q+2 = f(q)$ si et seulement si le reste de sa division euclidienne par 3 est 2 : $f(\mathbb{N}) = \{m \in \mathbb{N} : \text{le reste de } m \text{ par } 3 \text{ est } 2\}$.
 b) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, 10^{k-1} s'écrit avec k chiffres (1 suivi de $k-1$ zéros) : $g(10^{k-1}) = k$, donc g est **surjective**. Mais $g(0) = g(1) = 1$: **non injective**.
 c) $h(n) = n(n+1)$ et $h(-1-n) = (-1-n)(-n) = n(n+1) = h(n)$. Ainsi $h(-1) = h(0) = 0$: **non injective**. Le produit $n(n+1)$ de deux entiers consécutifs est pair, donc 1 n'a pas d'antécédent : **non surjective**. Si $0 \leq n < n'$, alors $n^2 < n'^2$ et $n < n'$, donc $h(n) < h(n')$: $h|_{\mathbb{N}}$ est strictement croissante, donc **injective**.
 d) $|k(n)| = n$. Si $k(n) = k(n')$, alors $n = |k(n)| = |k(n')| = n'$: **injective**. Si $k(n) = 1$, alors $n = |k(n)| = 1$, mais $k(1) = -1 \neq 1$: 1 n'a pas d'antécédent, **non surjective**.

Sur l'ensemble infini $\mathbb{N}$, une injection peut ne pas être surjective (a, d), et une surjection ne pas être injective (b) : contrairement au cas de deux ensembles finis de même cardinal.

■ Corrigé de l'exercice 45

1. $\varphi(1, 0) = (-1, 1) = \varphi(-1, 0)$, $\varphi(2, 3) = (-1, 7)$, $\varphi(0, 1) = (1, 1)$. Les couples distincts $(1, 0)$ et $(-1, 0)$ ont la même image : φ **n'est pas injective** (plus généralement $\varphi(-x, y) = \varphi(x, y)$).
 2. $\varphi(x, y) = (u, v) \iff \begin{cases} y - x^2 = u \\ y + x^2 = v \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{u+v}{2} \\ x^2 = \frac{v-u}{2} \end{cases}$ (par somme et différence des deux lignes).
 Donc : si $u < v$, **deux** antécédents $\left(\pm\sqrt{\frac{v-u}{2}}, \frac{u+v}{2}\right)$; si $u = v$, **un seul**, $(0, u)$; si $u > v$, **aucun**.
 3. $(1, 0)$ n'a pas d'antécédent ($1 > 0$) : φ **n'est pas surjective**. D'après 2, (u, v) a au moins un antécédent si et seulement si $u \leq v$: $\varphi(\mathbb{R}^2) = \Delta = \{(u, v) : u \leq v\}$.
 4. Pour $(x, y) \in P$, $\varphi(x, y) \in \varphi(\mathbb{R}^2) = \Delta$: ψ est bien définie. Soit $(u, v) \in \Delta$: d'après 2, ses antécédents dans $\mathbb{R}^2$ sont les (x, y) avec $y = \frac{u+v}{2}$ et $x = \pm\sqrt{\frac{v-u}{2}}$, et un seul d'entre eux vérifie $x \geq 0$. Chaque élément de Δ a donc exactement un antécédent dans P : ψ est **bijjective**, et $\psi^{-1}(u, v) = \left(\sqrt{\frac{v-u}{2}}, \frac{u+v}{2}\right)$.

■ Corrigé de l'exercice 46

1. a) $u(-1) = u(1) = 0$ avec $-1 \neq 1$: u **n'est pas injective** (plus généralement $u(-x) = u(x)$).
- b) $1 - \frac{2}{x^2+1} = \frac{x^2+1-2}{x^2+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1} = u(x)$. Comme $x^2 + 1 \geq 1$, $0 < \frac{2}{x^2+1} \leq 2$, d'où $-1 \leq u(x) < 1$. Le réel 1 n'a donc pas d'antécédent : u **n'est pas surjective**.
- c) D'après b), $u(\mathbb{R}) \subset [-1, 1[$. Soit $y \in [-1, 1[$: $u(x) = y \iff x^2 - 1 = y(x^2 + 1) \iff x^2(1 - y) = 1 + y \iff x^2 = \frac{1+y}{1-y}$, car $1 - y > 0$. Comme $\frac{1+y}{1-y} \geq 0$, le réel $x = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$ est un antécédent de y . Donc $u(\mathbb{R}) = [-1, 1[$.
- d) U est bien définie d'après b). Pour $y \in [-1, 1[$, le calcul de c) montre que les antécédents de y dans $\mathbb{R}$ sont $\pm \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$, dont un seul est dans $[0, +\infty[$ (les deux sont nuls si $y = -1$). Chaque y a exactement un antécédent par U : U **est bijective**, et $U^{-1}(y) = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$.
2. a) $v\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, $v(1) = 1 - 2 = -1$, $v\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$, $v\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$. Comme $\frac{1}{2} < 1$ et $v\left(\frac{1}{2}\right) > v(1)$, v n'est pas croissante ; comme $1 < \frac{3}{2}$ et $v(1) < v\left(\frac{3}{2}\right)$, elle n'est pas décroissante : v **n'est pas monotone**.
- b) De $k \leq x < k+1$ on tire $k - 2k \leq x - 2k < k+1 - 2k$, soit $-k \leq v(x) < -k+1$. Comme $-k$ est un entier, $E(v(x)) = -k = -E(x)$.
- c) Si $v(x) = v(x')$, alors $E(x) = -E(v(x)) = -E(v(x')) = E(x')$, puis $x = v(x) + 2E(x) = v(x') + 2E(x') = x'$: v est **injective**.
- d) Soit $y \in \mathbb{R}$, $m = E(y)$ et $x = y - 2m$. De $m \leq y < m+1$ on tire $-m \leq x < -m+1$, donc $E(x) = -m$ et $v(x) = x + 2m = y$: v est **surjective**, donc **bijective**.
- Ainsi v est injective (et même bijective) sans être monotone : la réciproque de « strictement monotone $\Rightarrow$ injective » est **fausse**.

■ Corrigé de l'exercice 47

1. $\Phi(\{1, 3, 4\}) = (\{1\}, \{3\}) = \Phi(\{1, 3\})$: deux parties distinctes ont la même image, Φ n'est pas injective. Si $\Phi(A) = (\{2\}, \emptyset)$, alors $A \cap B = \{2\}$ donne $2 \in A$; comme $2 \in C$, $2 \in A \cap C = \emptyset$: absurde. Donc $(\{2\}, \emptyset)$ n'a **pas d'antécédent**.
2. ($\Leftarrow$) Supposons $B \cup C = E$ et $\Phi(A) = \Phi(A')$, c'est-à-dire $A \cap B = A' \cap B$ et $A \cap C = A' \cap C$. Alors, par distributivité :
- $$A = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) = (A' \cap B) \cup (A' \cap C) = A' \cap (B \cup C) = A'.$$
- ($\Rightarrow$) Par contraposée : si $B \cup C \neq E$, soit $x \in E$ avec $x \notin B$ et $x \notin C$. Alors $\Phi(\{x\}) = (\emptyset, \emptyset) = \Phi(\emptyset)$ avec $\{x\} \neq \emptyset$: Φ n'est pas injective. Donc $\Phi \text{ injective} \iff B \cup C = E$.
3. ($\Leftarrow$) Supposons $B \cap C = \emptyset$. Soit $(U, V) \in \mathcal{P}(B) \times \mathcal{P}(C)$ et $A = U \cup V$. Alors $A \cap B = U \cup (V \cap B) = U$, car $V \cap B \subset C \cap B = \emptyset$; de même $A \cap C = (U \cap C) \cup V = V$. Donc $\Phi(U \cup V) = (U, V)$: Φ est surjective.
- ($\Rightarrow$) Par contraposée : si $x \in B \cap C$, le couple $(\{x\}, \emptyset)$ de $\mathcal{P}(B) \times \mathcal{P}(C)$ n'a pas d'antécédent (comme en 1, $A \cap B = \{x\}$ impose $x \in A \cap C$). Donc $\Phi \text{ surjective} \iff B \cap C = \emptyset$.
4. Si $C = C_E^B$, alors $B \cup C = E$ et $B \cap C = \emptyset$: Φ est injective (2) et surjective (3), donc **bijective**. D'après 3, l'unique antécédent de (U, V) est $U \cup V$: $\Phi^{-1}(U, V) = U \cup V$. Une partie de E est entièrement déterminée par ses « traces » sur B et sur son complémentaire.

■ Corrigé de l'exercice 48

1. $\varphi(\{1\}) = \varphi(\{2\}) = \{a\}$: φ n'est pas injective. Toute image $f(A)$ est contenue dans $\{a, b\}$, donc $\{c\}$ n'a pas d'antécédent par φ : non surjective. $\psi(\{c\}) = \emptyset = \psi(\emptyset)$: ψ n'est pas injective. Si $1 \in f^{-1}(B)$, alors $a \in B$, donc $2 \in f^{-1}(B)$: la partie $\{1\}$ n'a pas d'antécédent par ψ , non surjective.
2. f injective $\iff \varphi$ injective. $(\Rightarrow)$ Supposons f injective et $f(A) = f(A')$. Soit $x \in A$: $f(x) \in f(A) = f(A')$, donc $f(x) = f(x')$ avec $x' \in A'$, et $x = x' \in A'$. Ainsi $A \subset A'$, et de même $A' \subset A$: $A = A'$, φ est injective.
 $(\Leftarrow)$ Supposons φ injective et $f(x) = f(x')$. Alors $\varphi(\{x\}) = \{f(x)\} = \{f(x')\} = \varphi(\{x'\})$, donc $\{x\} = \{x'\}$, c'est-à-dire $x = x'$: f est injective.
 f surjective $\iff \varphi$ surjective. $(\Rightarrow)$ Supposons f surjective et soit $B \subset F$. On sait que $f(f^{-1}(B)) \subset B$; inversement, pour $y \in B$, il existe x tel que $f(x) = y$, et $x \in f^{-1}(B)$, donc $y \in f(f^{-1}(B))$. Ainsi $f(f^{-1}(B)) = B$: $B = \varphi(f^{-1}(B))$ a un antécédent, φ est surjective.
 $(\Leftarrow)$ Si φ est surjective, F a un antécédent A : $f(A) = F$, donc tout $y \in F$ s'écrit $f(x)$ avec $x \in A$: f est surjective.
3. f surjective $\iff \psi$ injective. $(\Rightarrow)$ Supposons f surjective et $f^{-1}(B) = f^{-1}(B')$. En appliquant f et l'égalité encadrée en 2 : $B = f(f^{-1}(B)) = f(f^{-1}(B')) = B'$: ψ est injective.
 $(\Leftarrow)$ Par contraposée : si f n'est pas surjective, soit $y \in F$ sans antécédent. Alors $\psi(\{y\}) = \emptyset = \psi(\emptyset)$ avec $\{y\} \neq \emptyset$: ψ n'est pas injective.
 f injective $\iff \psi$ surjective. $(\Rightarrow)$ Supposons f injective et soit $A \subset E$. On sait que $A \subset f^{-1}(f(A))$; inversement, si $z \in f^{-1}(f(A))$, alors $f(z) = f(x)$ avec $x \in A$, donc $z = x \in A$. Ainsi $A = f^{-1}(f(A)) = \psi(f(A))$: ψ est surjective.
 $(\Leftarrow)$ Supposons ψ surjective et $f(x) = f(x')$. Il existe B tel que $f^{-1}(B) = \{x\}$. Alors $f(x) \in B$, donc $f(x') \in B$, et $x' \in f^{-1}(B) = \{x\}$: $x' = x$, f est injective.

32

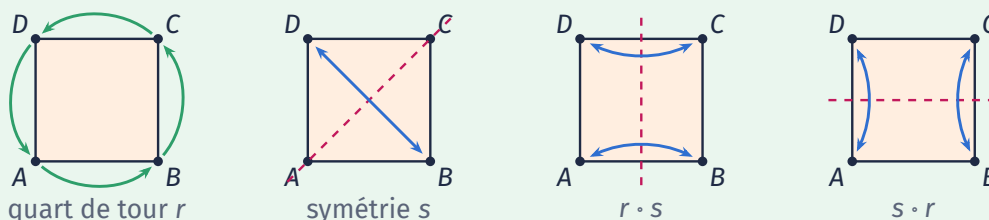
Corrigés : bijections

■ Corrigé de l'exercice 49

1. a) Soit $y \in \mathbb{R}$. $f(x) = y \iff 5 - 2x = 4y \iff x = \frac{5-4y}{2}$: une solution et une seule. Donc f est bijective et $f^{-1}(y) = \frac{5-4y}{2}$.
 b) Bien définie : $g(x) = 3(x-2)^2 - 5 \geq -5$. Soit $y \geq -5$. Pour $x \leq 2$, on a $x-2 \leq 0$, donc $g(x) = y \iff (x-2)^2 = \frac{y+5}{3} \iff x-2 = -\sqrt{\frac{y+5}{3}}$ (la racine positive est exclue). Cette unique solution est bien ≤ 2 : g est bijective et $g^{-1}(y) = 2 - \sqrt{\frac{y+5}{3}}$.
 c) Bien définie : pour $x \geq 0$, $0 \leq x < x+2$, donc $0 \leq h(x) < 1$. Soit $y \in [0, 1[$: $h(x) = y \iff x = y(x+2) \iff x(1-y) = 2y \iff x = \frac{2y}{1-y}$ ($1-y \neq 0$), réel bien ≥ 0 . Donc $h^{-1}(y) = \frac{2y}{1-y}$.
2. $f^{-1}(1) = \frac{1}{2}$ (contrôle : $f(\frac{1}{2}) = \frac{4}{4} = 1$) ; $g^{-1}(7) = 2 - \sqrt{4} = 0$ ($g(0) = 7$) ; $h^{-1}(\frac{1}{2}) = 2$ ($h(2) = \frac{2}{4}$).
3. $G(0) = 7 = G(4)$ avec $0 \neq 4$: G n'est pas injective. Comme $G(x) = 3(x-2)^2 - 5 \geq -5$, le réel -6 n'a pas d'antécédent : G n'est pas surjective. Seuls les ensembles ont changé : au départ, deux

réels symétriques par rapport à 2 ont la même image ; à l'arrivée, les réels < -5 ne sont pas atteints.

■ Corrigé de l'exercice 50



- Chaque sommet a exactement un antécédent par r et par s (s échange B et D , fixe A et C) : r et s sont **bijectives**. En renversant les flèches : $r^{-1}(A) = D, r^{-1}(B) = A, r^{-1}(C) = B, r^{-1}(D) = C$: le quart de tour indirect.
 - $s(s(B)) = s(D) = B, s(s(D)) = D$, et A, C sont fixes : $s \circ s = \text{Id}_E$, donc $s^{-1} = s$. $r \circ r : A \mapsto C, B \mapsto D, C \mapsto A, D \mapsto B$ (demi-tour) ; $r \circ r \circ r : A \mapsto D, B \mapsto A, C \mapsto B, D \mapsto C$; $r \circ r \circ r \circ r = \text{Id}_E$. Comme $r \circ (r \circ r \circ r) = (r \circ r \circ r) \circ r = \text{Id}_E$: $r^{-1} = r \circ r \circ r$.
- | x | A | B | C | D |
|-----------|-----|-----|-----|-----|
| $s(x)$ | A | D | C | B |
| $r(s(x))$ | B | A | D | C |
| $r(x)$ | B | C | D | A |
| $s(r(x))$ | D | C | B | A |
3. $(r \circ s)(A) = B \neq D = (s \circ r)(A)$: $r \circ s$ échange A et B , et C et D : c'est une involution, la symétrie d'axe la médiatrice de $[AB]$. $s \circ r$ échange A et D , B et C : la symétrie d'axe la médiatrice de $[AD]$.
- $(r \circ s)^{-1} = s^{-1} \circ r^{-1} = s \circ r^{-1} : A \mapsto s(D) = B, B \mapsto A, C \mapsto s(B) = D, D \mapsto C$: c'est $r \circ s$, comme l'annonçait 3 (une involution est sa propre réciproque). Mais $r^{-1} \circ s^{-1}$ envoie A sur D : $(r \circ s)^{-1} \neq r^{-1} \circ s^{-1}$, l'ordre s'inverse.

■ Corrigé de l'exercice 51

- Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. $\varphi(x, y) = (u, v) \iff (x + y^2 = u \text{ et } y = v) \iff (y = v \text{ et } x = u - v^2)$: une solution unique, donc φ est bijective et $\varphi^{-1}(u, v) = (u - v^2, v)$. De même, $\psi(x, y) = (u, v) \iff (x = u \text{ et } y = v + 2u)$: $\psi^{-1}(u, v) = (u, v + 2u)$.
 - $\theta(x, y) = \psi(x + y^2, y) = (x + y^2, y - 2x - 2y^2)$. En remplaçant $x + y^2$ par u dans la seconde équation :

$$\theta(x, y) = (u, v) \iff (x + y^2 = u \text{ et } y - 2u = v) \iff (y = 2u + v \text{ et } x = u - (2u + v)^2).$$
 Une solution unique : θ est bijective et $\theta^{-1}(u, v) = (u - (2u + v)^2, 2u + v)$. Et $\varphi^{-1}(\psi^{-1}(u, v)) = \varphi^{-1}(u, v + 2u) = (u - (v + 2u)^2, v + 2u) = \theta^{-1}(u, v)$ ✓.
 - $\psi^{-1}(\varphi^{-1}(u, v)) = \psi^{-1}(u - v^2, v) = (u - v^2, v + 2u - 2v^2)$: en $(0, 1)$, on obtient $(-1, -1)$, alors que $\theta^{-1}(0, 1) = (-1, 1)$. Donc $\psi^{-1} \circ \varphi^{-1} \neq (\psi \circ \varphi)^{-1}$.
- $\theta(x, y) = (x, y) \iff (y^2 = 0 \text{ et } y - 2x - 2y^2 = y) \iff (x, y) = (0, 0)$: seul point invariant, $(0, 0)$.

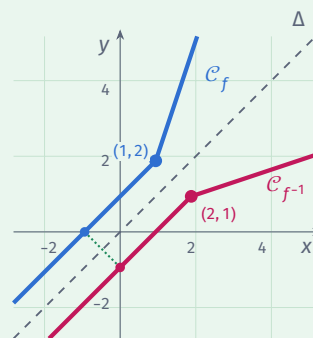
■ Corrigé de l'exercice 52

1. Si $x \geq 1$: $f(x) = 3x - 1$; si $x < 1$: $f(x) = x + 1$. Soit $y \in \mathbb{R}$. Dans $[1, +\infty[$: $3x - 1 = y \iff x = \frac{y+1}{3}$, qui convient si et seulement si $\frac{y+1}{3} \geq 1$, soit $y \geq 2$. Dans $]-\infty, 1[$: $x = y - 1$, qui convient si et seulement si $y < 2$. Pour chaque y , une seule des deux zones fournit une solution : f est bijective et

$$f^{-1}(y) = y - 1 \text{ si } y < 2, \quad f^{-1}(y) = \frac{y+1}{3} \text{ si } y \geq 2.$$

Contrôle : si $y \geq 2$, $\frac{2y-1-(y-2)}{3} = \frac{y+1}{3}$; si $y < 2$, $\frac{2y-1+(y-2)}{3} = y - 1$ ✓.

2. Deux demi-droites pour chaque courbe (ci-contre), symétriques par rapport à Δ : $(1, 2) \in \mathcal{C}_f$ et $(2, 1) \in \mathcal{C}_{f^{-1}}$; $(-1, 0)$ et $(0, -1)$.



3. Si $x < 1$: $f(x) - x = 1 > 0$; si $x \geq 1$: $f(x) - x = 2x - 1 > 0$. Donc $f(x) > x$: $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de Δ . Pour $y \in \mathbb{R}$ et $x = f^{-1}(y)$: $y = f(x) > x = f^{-1}(y)$.

Par l'absurde, si $M(a, b)$ était sur les deux courbes : $b = f(a) > a$ et $b = f^{-1}(a) < a$, contradiction : **les courbes ne se coupent pas**.

4. Image réciproque. Si $x < 1$: $0 \leq x + 1 \leq 5 \iff -1 \leq x \leq 4$, d'où $[-1, 1[$; si $x \geq 1$: $0 \leq 3x - 1 \leq 5 \iff \frac{1}{3} \leq x \leq 2$, d'où $[1, 2]$. Donc $\{x : f(x) \in [0, 5]\} = [-1, 2]$. Image directe par f^{-1} : pour $y \in [0, 2[$, $y - 1$ décrit $[-1, 1[$; pour $y \in [2, 5]$, $\frac{y+1}{3}$ décrit $[1, 2]$: encore $[-1, 2]$.

C'est général : si f est bijective, $f(x) \in B \iff x = f^{-1}(y)$ avec $y = f(x) \in B$. L'image réciproque de B par f et l'image directe de B par f^{-1} coïncident : la notation $f^{-1}(B)$ n'est pas ambiguë.

■ Corrigé de l'exercice 53

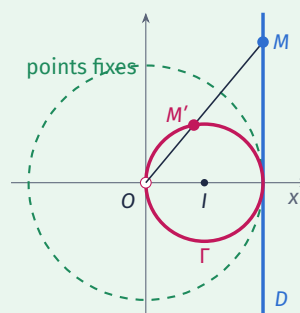
1. Si $M(x, y) \neq O$, alors $x^2 + y^2 = OM^2 \neq 0$: $\tau(M)$ existe, et ses coordonnées $\frac{x}{OM^2}, \frac{y}{OM^2}$ ne sont pas toutes deux nulles, donc $\tau(M) \in P^*$. Les coordonnées de $\vec{OM}'$ sont celles de $\vec{OM}$ divisées par OM^2 : $\vec{OM}' = \frac{1}{OM^2} \vec{OM}$, d'où $OM' = \frac{OM}{OM^2} = \frac{1}{OM}$ et $OM \times OM' = 1$ (M' est sur la demi-droite $[OM)$).

2. Soit $M'' = \tau(M')$. D'après 1, appliqué à M' puis à M : $\vec{OM}'' = \frac{1}{OM'^2} \vec{OM}' = OM^2 \times \frac{1}{OM^2} \vec{OM} = \vec{OM}$. Donc $\tau \circ \tau = \text{Id}_{P^*}$: τ est bijective et $\tau^{-1} = \tau$.

$\tau(M) = M \iff \frac{1}{OM^2} \vec{OM} = \vec{OM} \iff OM^2 = 1$ (car $\vec{OM} \neq \vec{0}$) : les points fixes forment le **cercle de centre O et de rayon 1**.

3. a) $IM^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = x^2 + y^2 - x + \frac{1}{4}$, donc $x^2 + y^2 = x \iff IM^2 = \frac{1}{4} \iff IM = \frac{1}{2}$: Γ est le cercle de centre I et de rayon $\frac{1}{2}$, privé de O .

b) Pour $M \neq O$: $M \in \tau^{-1}(D) \iff \frac{x}{x^2+y^2} = 1 \iff x^2 + y^2 = x$. Donc $\tau^{-1}(D) = \Gamma$ (image réciproque).



Comme $\tau^{-1} = \tau$, l'image directe de D par τ est l'image directe de D par τ^{-1} , c'est-à-dire l'image

réciroque de D par τ (exercice 52) : $\tau(D) = \Gamma$, puis $\tau(\Gamma) = \tau(\tau(D)) = D$. Contrôle : $\tau(1, 1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ ✓.

4. Avec $r^2 = x^2 + y^2$, qui ne change pas quand on remplace y par $-y$: $\sigma(\tau(x, y)) = (\frac{x}{r^2}, -\frac{y}{r^2}) = \tau(x, -y) = \tau(\sigma(x, y))$. Donc $(\tau \circ \sigma) \circ (\tau \circ \sigma) = \tau \circ (\sigma \circ \tau) \circ \sigma = (\tau \circ \tau) \circ (\sigma \circ \sigma) = \text{Id}_{P^*}$: $\tau \circ \sigma$ est une involution. Ses points fixes : $(\frac{x}{r^2}, -\frac{y}{r^2}) = (x, y) \iff (x = \frac{x}{r^2} \text{ et } y(1 + \frac{1}{r^2}) = 0)$, d'où $y = 0$, puis $x \neq 0$ et $r^2 = x^2 = 1$: $(1, 0)$ et $(-1, 0)$.

■ Corrigé de l'exercice 54

1. a) Pour $x \in [0, 1]$: $1 - x \geq 0$ et $1 + x > 0$, donc $u(x) \geq 0$; et $u(x) \leq 1 \iff 1 - x \leq 1 + x \iff x \geq 0$. En multipliant numérateur et dénominateur par $1 + x$:

$$u(u(x)) = \frac{1 - \frac{1-x}{1+x}}{1 + \frac{1-x}{1+x}} = \frac{(1+x) - (1-x)}{(1+x) + (1-x)} = \frac{2x}{2} = x : \quad u \circ u = \text{Id}_{[0,1]}, \text{ donc } u^{-1} = u.$$

- b) $u(x) = x \iff 1 - x = x + x^2 \iff x^2 + 2x - 1 = 0 \iff x = -1 \pm \sqrt{2}$; seul $\sqrt{2} - 1$ est dans $[0, 1]$.

c) $u(x) = \frac{2}{1+x} - 1$: si $0 \leq x < x' \leq 1$, $\frac{2}{1+x} > \frac{2}{1+x'}$, donc $u(x) > u(x')$. Soit $a = \sqrt{2} - 1$. Double inclusion. Si $0 \leq x \leq a$, alors $u(a) \leq u(x) \leq u(0)$, soit $a \leq u(x) \leq 1$. Si $y \in [a, 1]$, $x = u(y)$ vérifie $u(1) \leq x \leq u(a)$, soit $x \in [0, a]$, et $u(x) = u(u(y)) = y$. Donc $u([0, a]) = [a, 1]$.

2. Par l'absurde, supposons $f(a) \neq a$. Si $f(a) > a$, la stricte croissance donne $f(f(a)) > f(a)$, soit $a > f(a)$: contradiction. Si $f(a) < a$, de même $a = f(f(a)) < f(a)$: contradiction. Donc $f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$; ce n'est pas contradictoire avec u , qui est décroissante.

3. a) s et t sont bijectives, donc $s \circ t$ aussi, et $(s \circ t)^{-1} = t^{-1} \circ s^{-1} = t \circ s$. Une bijection g est une involution si et seulement si $g^{-1} = g$ (si $g^{-1} = g$, alors $g \circ g = g \circ g^{-1} = \text{Id}$). Donc $s \circ t$ est une involution $\iff (s \circ t)^{-1} = s \circ t \iff t \circ s = s \circ t$.

b) $(s \circ t)(x) = -(2-x) = x-2$ et $(t \circ s)(x) = 2+x$: elles diffèrent, donc $s \circ t$ n'est pas une involution (et $(s \circ t)^{-1} = t \circ s$ ✓). Pour $c \in \mathbb{R}$, $t_c(x) = -c - x$ est une involution ($-c - (-c - x) = x$) et $(s \circ t_c)(x) = x + c$: $x \mapsto x + c = s \circ t_c$.

33

Corrigés : composition

■ Corrigé de l'exercice 55

1. $(f \circ g)(x) = 5 - 2(x^2 + 2) = 1 - 2x^2$; $(g \circ f)(x) = (5 - 2x)^2 + 2 = 4x^2 - 20x + 27$; $(f \circ f)(x) = 5 - 2(5 - 2x) = 4x - 5$. En $x = 0$: $1 \neq 27$, donc $f \circ g \neq g \circ f$.

$(g \circ f)(x) - (f \circ g)(x) = 6x^2 - 20x + 26 = 2(3x^2 - 10x + 13)$; le discriminant de $3x^2 - 10x + 13$ vaut $100 - 156 = -56 < 0$: ce trinôme est du signe de 3, strictement positif. Donc $(f \circ g)(x) < (g \circ f)(x)$ pour tout x .

2. $((f \circ g) \circ f)(x) = 1 - 2(5 - 2x)^2 = -8x^2 + 40x - 49$ et $(f \circ (g \circ f))(x) = 5 - 2(4x^2 - 20x + 27) = -8x^2 + 40x - 49$: même résultat $-8x^2 + 40x - 49$ (associativité).

3. a) $r \circ g$ sur $\mathbb{R}$ ($g(x) \geq 2 \geq 0$) ; b) $i \circ f$ sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{5}{2}\}$ (il faut $f(x) \neq 0$) ; c) $f \circ r$ sur $[0, +\infty[$; d) $\frac{1}{x^2} + 2 = g(i(x))$: $g \circ i$ sur $\mathbb{R}^*$; e) $i \circ g$ sur $\mathbb{R}$ ($g(x) \neq 0$) : comparer avec d), l'ordre compte.

■ Corrigé de l'exercice 56

1. $D_f = [2, +\infty[$ et $D_g = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. $x \in D_{g \circ f} \iff (x \geq 2 \text{ et } \sqrt{x-2} \neq 3) \iff (x \geq 2 \text{ et } x \neq 11)$:

$$D_{g \circ f} = [2, 11[\cup]11, +\infty[\quad \text{et} \quad (g \circ f)(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}-3}.$$

2. $x \in D_{f \circ g} \iff (x \neq 3 \text{ et } g(x) \geq 2)$. Or $g(x) - 2 = \frac{1-2(x-3)}{x-3} = \frac{7-2x}{x-3}$, qui est positif ou nul exactement pour $3 < x \leq \frac{7}{2}$ (tableau de signes : 3 est valeur interdite, $\frac{7}{2}$ annule le numérateur). $D_{f \circ g} =]3, \frac{7}{2}]$ et $(f \circ g)(x) = \sqrt{\frac{7-2x}{x-3}}$.

3. $f \circ f$: il faut $x \geq 2$ et $\sqrt{x-2} \geq 2$, soit $x \geq 6$: $D_{f \circ f} = [6, +\infty[$, $(f \circ f)(x) = \sqrt{\sqrt{x-2}-2}$.

$g \circ g$: il faut $x \neq 3$ et $\frac{1}{x-3} \neq 3$, soit $x \neq \frac{10}{3}$: $D_{g \circ g} = \mathbb{R} \setminus \left\{3, \frac{10}{3}\right\}$, $(g \circ g)(x) = \frac{1}{\frac{1}{x-3}-3} = \frac{x-3}{10-3x}$. Cette expression simplifiée vaut 0 en 3, mais $3 \notin D_{g \circ g}$ ($g(3)$ n'existe pas) : **le domaine se détermine avant de simplifier.**

■ Corrigé de l'exercice 57

1. $(g \circ f)(t) = \frac{(3t-1)-t+1}{2} = t$: $g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$. Comme $\text{Id}_{\mathbb{R}}$ est bijective, le cours donne : $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective ; $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.
2. $M(x, y) \in D \iff y = 3x - 1 \iff M = f(x) : f(\mathbb{R}) = D$. Le point $(0, 0) \notin D$ n'a pas d'antécédent : f n'est pas surjective. $g(0, 0) = \frac{1}{2} = g(1, 1) : g$ n'est pas injective. $(f \circ g)(0, 0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) : f \circ g \neq \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$.
3. a) $p(x, y) = f\left(\frac{y-x+1}{2}\right) = \left(\frac{y-x+1}{2}, \frac{3y-3x+1}{2}\right)$, et par associativité $p \circ p = f \circ (g \circ f) \circ g = f \circ \text{Id}_{\mathbb{R}} \circ g = p$.
- b) $p(M) = f(g(M)) \in f(\mathbb{R}) = D$. Si $M = f(t) \in D$, $p(M) = f((g \circ f)(t)) = f(t) = M$; réciproquement, si $p(M) = M$, alors $M \in D$. Enfin $M \vec{p}(M) = \left(\frac{y-3x+1}{2}, \frac{y-3x+1}{2}\right) = \frac{y-3x+1}{2} \vec{u}$. Donc $p(M)$ est l'intersection de D et de la droite passant par M dirigée par $\vec{u}$: **p est la projection sur D parallèlement à la droite $y = x$.**
4. $(g_1 \circ f)(t) = (a+3b)t + (c-b)$. Si $g_1 \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$, $t = 0$ donne $c = b$ et $t = 1$ donne $a+3b = 1$; réciproquement, cela suffit. $g_1(x, y) = (1-3b)x + by + b$, $b \in \mathbb{R}$: **une infinité** ($b = \frac{1}{2}$ redonne g). Pas d'unicité, car f n'est pas surjective (si f était bijective, on aurait $g_1 = f^{-1}$). Pour $b = 0$: $g_1(x, y) = x$ et $(f \circ g_1)(x, y) = (x, 3x-1)$, projection sur D parallèlement à l'axe des ordonnées.

■ Corrigé de l'exercice 58

1. $x \in D_w \iff u(x) \neq 0 \iff x(x-2) \neq 0 : D_w = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$, $w(x) = \frac{2}{x^2-2x}$. Si $x \in D_w$, alors $2-x \in D_w$ et $u(2-x) = (2-x)(-x) = u(x)$, d'où $w(2-x) = w(x)$; ainsi $w(-1) = w(3) = \frac{2}{3} : w$ n'est pas injective.
2. $u(x) = (x-1)^2 - 1$. Double inclusion. Si $x > 2$, alors $(x-1)^2 > 1$ et $u(x) > 0$; réciproquement, pour $y > 0$, $x = 1 + \sqrt{1+y}$ vérifie $x > 2$ et $u(x) = y$. Si $0 < x < 2$, alors $0 \leq (x-1)^2 < 1$ et $-1 \leq u(x) < 0$; réciproquement, pour $-1 \leq y < 0$, $x = 1 + \sqrt{1+y} \in [1, 2[$ et $u(x) = y$.
- Comme $t \mapsto \frac{2}{t}$ envoie $]0, +\infty[$ sur lui-même et $[-1, 0[$ sur $]-\infty, -2]$ (si $z \leq -2$, $t = \frac{2}{z} \in [-1, 0[$) : $w([2, +\infty[) =]0, +\infty[$ et $w([0, 2[) =]-\infty, -2]$.

3. $\frac{2}{t} \geq 1$ impose $t > 0$, puis équivaut à $t \leq 2$: $v^{-1}([1, +\infty[) =]0, 2]$. Donc $w(x) \geq 1 \iff 0 < x^2 - 2x \leq 2$.
 Or $x^2 - 2x > 0 \iff (x < 0 \text{ ou } x > 2)$, et $x^2 - 2x - 2 \leq 0 \iff 1 - \sqrt{3} \leq x \leq 1 + \sqrt{3}$:
 $S = [1 - \sqrt{3}, 0[\cup]2, 1 + \sqrt{3}]$.

4. D'après 2, W est à valeurs dans $]0, +\infty[$. Soit $y > 0$. Pour $x > 2$ (donc $x - 1 > 0$) :

$$W(x) = y \iff x^2 - 2x = \frac{2}{y} \iff (x - 1)^2 = 1 + \frac{2}{y} \iff x = 1 + \sqrt{1 + \frac{2}{y}},$$

et ce réel est bien > 2 . Une solution unique : W est bijective et $W^{-1}(y) = 1 + \sqrt{1 + \frac{2}{y}}$ (contrôle : $W^{-1}(\frac{2}{3}) = 1 + 2 = 3 \checkmark$).

■ Corrigé de l'exercice 59

- $(i_B \circ i_{B'})(A) = (A \cap B') \cap B = A \cap (B \cap B') = i_{B \cap B'}(A)$ pour toute partie A ; de même avec la réunion.
 Donc $i_B \circ i_B = i_{B \cap B} = i_B$.
- Par De Morgan, le complémentaire de $C_E^A \cap B$ est $A \cup C_E^B$: $(c \circ i_B \circ c)(A) = A \cup C_E^B = u_{C_E^B}(A)$. Appliqué à C_E^B , dont le complémentaire est B : $c \circ i_{C_E^B} \circ c = u_B$; en composant par c à gauche et à droite ($c \circ c = \text{Id}$) : $i_{C_E^B} = c \circ u_B \circ c$.
- $(i_B \circ u_C)(A) = (A \cup C) \cap B = (A \cap B) \cup (C \cap B)$ et $(u_C \circ i_B)(A) = (A \cap B) \cup C$. Si $C \subset B$, $C \cap B = C$ et les deux sont égales. Réciproquement, si elles sont égales, l'image de $A = \emptyset$ donne $C \cap B = C$, donc $C \subset B$. $i_B \circ u_C = u_C \circ i_B \iff C \subset B$.
- a) $h(A) = (A \cap B) \cup (C \cap B)$, donc $h(h(A)) = ((A \cap B) \cup (C \cap B) \cup C) \cap B = ((A \cap B) \cup C) \cap B = h(A)$.
 b) Si $C \cap B \subset A \subset B$: $A \cap B = A$, donc $h(A) = A \cup (C \cap B) = A$. Réciproquement, si $h(A) = A$: $A = (A \cup C) \cap B \subset B$ et $C \cap B \subset (A \cup C) \cap B = A$. Image de h , par double inclusion : si $A' = h(A)$, alors $h(A') = h(h(A)) = A'$, donc $C \cap B \subset A' \subset B$; réciproquement, une telle partie vérifie $A = h(A)$.
 c) $C \cap B = \{3\}$: $\{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$. h n'est pas injective ($h(\emptyset) = \{3\} = h(\{3\})$), ni surjective (toute image contient 3 : $\emptyset$ n'a pas d'antécédent).

■ Corrigé de l'exercice 60

- $(\text{Id}_E)^* = \varphi \circ \varphi^{-1} = \text{Id}_F$, et par associativité $f^* \circ g^* = \varphi \circ f \circ (\varphi^{-1} \circ g) \circ \varphi^{-1} = (f \circ g)^*$. Si $f \circ f = \text{Id}_E$: $f^* \circ f^* = (f \circ f)^* = \text{Id}_F$. Si f est bijective : $f^* \circ (f^{-1})^* = (f \circ f^{-1})^* = \text{Id}_F$ et de même $(f^{-1})^* \circ f^* = \text{Id}_F$; par la caractérisation des bijections, f^* est bijective et $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.
- $f^*(\varphi(x)) = \varphi(f(\varphi^{-1}(\varphi(x)))) = \varphi(f(x))$, et φ est injective : $f^*(\varphi(x)) = \varphi(x) \iff \varphi(f(x)) = \varphi(x) \iff f(x) = x$. Notons P, P^* les ensembles de points fixes de f et f^* : $\varphi(P) \subset P^*$, et si $y \in P^*$, $x = \varphi^{-1}(y)$ est dans P avec $y = \varphi(x)$. Donc φ envoie P sur P^* , injectivement : c'est une bijection de P sur P^* .
- $\varphi^{-1}(y) = y - 3$, donc $f^*(y) = 2(y - 3) + 3 = 2y - 3$. Comme $(f \circ f \circ f)(x) = 8x$: $f^* \circ f^* \circ f^* = (f \circ f \circ f)^*$ est $y \mapsto 8(y - 3) + 3 = 8y - 21$. Contrôle : $f^*(f^*(y)) = 4y - 9$, puis $2(4y - 9) - 3 = 8y - 21 \checkmark$. (Le point fixe 0 de f devient le point fixe $\varphi(0) = 3$ de f^* .)
- a) Avec $\varphi(x) = x + a$: $\varphi(-\varphi^{-1}(y)) = -(y - a) + a = 2a - y$, égal à $4 - y$ pour $a = 2$: $\varphi(x) = x + 2$.

b) Par l'absurde, supposons $x \mapsto x + 1$ conjuguée de $x \mapsto 2 - x$ par φ . Le réel 1 est fixe par $x \mapsto 2 - x$; d'après 2, $\varphi(1)$ serait fixe par $x \mapsto x + 1$, alors que $y + 1 \neq y$ pour tout y : contradiction. Elles ne sont pas conjuguées (autre argument : $2 - x$ est une involution, $x + 1$ non).

34

Corrigés : défis de concours

■ Corrigé de l'exercice 61

- a) Avec $x = 0$ dans (*) : $f(f(y)) = y + a$. Injectivité : si $f(y) = f(y')$, alors $f(f(y)) = f(f(y'))$, soit $y + a = y' + a$, donc $y = y'$. Surjectivité : tout $z \in \mathbb{Z}$ s'écrit $z = f(f(z - a))$. Donc f est **bijective**.

b) Avec $y = y_0$: $f(x) = f(x) + y_0$, donc $y_0 = 0$: $f(0) = 0$, $a = 0$, et a devient $f(f(y)) = y$: $f \circ f = \text{Id}_{\mathbb{Z}}$.

c) Avec $y = f(z)$ dans (*) : $f(x + f(f(z))) = f(x) + f(z)$, soit $f(x + z) = f(x) + f(z)$. Posons $c = f(1)$ et $P(n)$: « $f(n) = nc$ ». Initialisation. $f(0) = 0$. Hérédité. Si $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq 0$, alors $f(n + 1) = f(n) + f(1) = (n + 1)c$: $P(n + 1)$ est vraie. Conclusion. $f(n) = nc$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; enfin $0 = f(n + (-n)) = f(n) + f(-n)$ donne $f(-n) = -nc$.

d) Analyse. $1 = f(f(1)) = f(c) = c^2$, donc $c = \pm 1$. Synthèse. $f = \text{Id}_{\mathbb{Z}}$: $f(x + f(y)) = x + y = f(x) + y$ ✓ ; $f(x) = -x$: $f(x - y) = -x + y = f(x) + y$ ✓. **Solutions** : $\text{Id}_{\mathbb{Z}}$ et $x \mapsto -x$.
- Par l'absurde, soit f une solution. Avec $x = 0$: $f(f(y)) = f(0) + 2y$, donc f est injective. Avec $y = 0$: $f(x + f(0)) = f(x)$, donc $f(0) = 0$ et $f(f(y)) = 2y$. Avec $x = f(z)$: $f(f(z) + f(y)) = 2z + 2y = f(f(z + y))$, donc $f(z) + f(y) = f(z + y)$ par injectivité. Comme en 1.c), $f(n) = cn$ avec $c = f(1) \in \mathbb{Z}$, et $f(f(1)) = 2$ donne $c^2 = 2$: impossible pour un entier. **Aucune solution**. Sur $\mathbb{R}$, en revanche, $f(x) = \sqrt{2}x$ convient : $f(x + \sqrt{2}y) = \sqrt{2}x + 2y$.

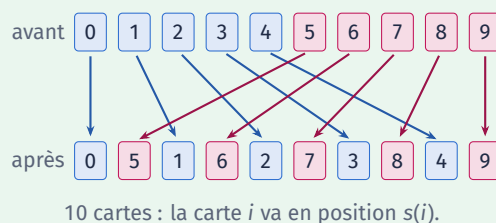
■ Corrigé de l'exercice 62

- a) Une application de E dans E est déterminée par la liste de ses valeurs, chacune choisie dans l'ensemble fini E : il n'y en a qu'un nombre fini M . Les $M + 1$ applications $h_1, \dots, h_{M+1}$ ne sont donc pas deux à deux distinctes (tiroirs) : $h_i = h_j$ avec $i < j$.

b) $h_{j-i} \circ h_i = h_j = h_i \circ \text{Id}_E \circ h_i$, et h_i est bijective (composée de bijections) : en composant à droite par $(h_i)^{-1}$, $h_{j-i} = \text{Id}_E$; $k = j - i \geq 1$ convient.

c) Sur $\{0, 1\}$, la constante $h = 0$ vérifie $h_k = h \neq \text{Id}$ pour tout k . Sur $\mathbb{Z}$ (infini), $h(n) = n + 1$ est bijective et $h_k(n) = n + k \neq n$.
- a) Les cartes $0, \dots, m - 1$ vont aux positions paires, les cartes $m, \dots, 2m - 1$ aux positions impaires : chaque position est atteinte une fois, s est bijective, et $s(N) = s(m + (m - 1)) = N$. Si $i \leq m - 1$: $0 \leq 2i \leq N - 1$ est son propre reste, et $s(i) = 2i$. Si $i = m + j$ avec $j \leq m - 2$: $2i = N + (2j + 1)$ avec $0 \leq 2j + 1 \leq N - 1$: le reste est $2j + 1 = s(j)$.

b) $P(k)$: « pour $i \leq N - 1$, $s_k(i)$ est le reste de $2^k i$ par N ». Initialisation. C'est a). Hérédité. Supposons $P(k)$ vraie pour un $k \geq 1$. Soit $r = s_k(i)$: $2^k i = qN + r$ avec $0 \leq r \leq N - 1$, et $s_{k+1}(i) = s(r)$.



est le reste de $2r$ par N ; si $2r = q'N + r'$ ($0 \leq r' < N$), alors $2^{k+1}i = (2q + q')N + r'$: r' est aussi le reste de $2^{k+1}i$. *Conclusion.* $P(k)$ est vraie pour tout $k \geq 1$.

Comme $s_k(N) = N$, et que pour $0 \leq i < N$, « a a pour reste i » équivaut à « N divise $a - i$ » : $s_k = \text{Id} \iff \forall i < N, N \mid (2^k - 1)i \iff N \mid 2^k - 1$ (prendre $i = 1$ pour le sens direct).

c) 10 cartes : $N = 9$, et $2^k - 1$ vaut 1, 3, 7, 15, 31, 63 = 7×9 : 6 mélanges. 52 cartes : $N = 51$, et $2^k - 1$ vaut 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255 = 5×51 : 8 mélanges, et pas moins.

■ Corrigé de l'exercice 63

1. $h(m) = m^2 + 2$. Pour tout n : $h(n) = n^2 + 2 \neq n^2 + 1 = \Phi_n(n)$, donc $h \neq \Phi_n$. L'application h n'a pas d'antécédent : $n \mapsto \Phi_n$ **n'est pas surjective**.
2. $h \in \mathcal{A}(E, F)$ et Φ est surjective : il existe a tel que $\Phi_a = h$. Alors $\Phi_a(a) = h(a) = t(\Phi_a(a))$: $y_0 = \Phi_a(a)$ vérifie $t(y_0) = y_0$.
3. Soit $b \neq c$ dans F ; on pose $t(c) = b$ et $t(y) = c$ si $y \neq c$: t n'a pas de point fixe. *Par l'absurde*, si une surjection $\Phi : E \rightarrow \mathcal{A}(E, F)$ existait, t aurait un point fixe d'après 2. **Il n'existe donc aucune surjection**, en particulier de $\mathbb{N}$ sur $\mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$, ou de $\mathbb{R}$ sur l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (la question 1 en était un cas particulier, avec $t(y) = y + 1$).

Si $F = \{b\}$, $\mathcal{A}(E, F)$ n'a qu'un élément (la constante b) et toute Φ est surjective ; pas de contradiction : la seule $t : F \rightarrow F$ est Id_F , qui a un point fixe. L'hypothèse « deux éléments » est nécessaire.

■ Corrigé de l'exercice 64

1. $b(\{0, 3, 4\}) = 1 + 8 + 16 =$ 25. Si $A \subset \{0, \dots, m-1\}$: $b(A) \leq 1 + 2 + \dots + 2^{m-1} = 2^m - 1$ (car $2(1 + \dots + 2^{m-1}) - (1 + \dots + 2^{m-1}) = 2^m - 1$).
2. L'ensemble des entiers qui sont dans une seule des deux parties est fini et non vide : m existe. Les entiers $> m$ sont dans les deux parties ou dans aucune : ils apportent la même somme à $b(A)$ et $b(B)$. Avec A', B' les éléments $< m$ de A et B , contenus dans $\{0, \dots, m-1\}$:

$$b(A) - b(B) = 2^m + b(A') - b(B') \geq 2^m - b(B') \geq 2^m - (2^m - 1) = 1.$$

Donc $A \neq B \Rightarrow b(A) \neq b(B)$: b est **injective**.

3. $P(n)$: « n a un antécédent ». *Initialisation.* $b(\emptyset) = 0$. *Hérédité (forte).* Soit $n \geq 1$ tel que $P(k)$ soit vraie pour tout $k < n$, et m le plus grand entier tel que $2^m \leq n$ (donc $n < 2^{m+1}$). L'entier $n' = n - 2^m$ vérifie $0 \leq n' < 2^m \leq n$, donc $n' = b(A')$ avec $A' \in \mathcal{P}_f(\mathbb{N})$. Tout $a \in A'$ vérifie $a < m$ (sinon $b(A') \geq 2^a \geq 2^m > n'$) ; donc $m \notin A'$ et $b(A' \cup \{m\}) = n' + 2^m = n$. *Conclusion.* b est surjective, donc **bijjective**.

$100 = 64 + 32 + 4$: $b^{-1}(100) = \{2, 5, 6\}$; $2026 = 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 32 + 8 + 2$: $b^{-1}(2026) = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (on retire chaque fois la plus grande puissance de 2, comme dans l'hérédité).

Il n'existe pas de bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (théorème de Cantor), mais b^{-1} est une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$: il y a « autant » de parties *finies* que d'entiers, et « strictement plus » de parties de $\mathbb{N}$.

■ **Corrigé de l'exercice 65**

1. Par l'absurde, supposons P impair : chaque $\sigma(k) - k$ est impair, donc $\sigma(k)$ et k sont de parités contraires. Avec $n = 2p + 1$, l'ensemble I des impairs de E_n a $p + 1$ éléments, celui J des pairs en a p . σ envoie I dans J ; injective, elle donnerait $p + 1$ images distinctes dans J (tiroirs) : contradiction. Donc P **est pair**. Pour $n = 2p$: $\sigma(2i - 1) = 2i$, $\sigma(2i) = 2i - 1$ ($1 \leq i \leq p$) ; tous les facteurs valent ± 1 et $P = (-1)^p$ est impair.
2. σ étant bijective, la liste $\sigma(1), \dots, \sigma(n)$ contient chaque élément de E_n une fois : même somme, donc $\sum (\sigma(k) - k) = 0$. Pour tout entier a , $|a| - a \in \{0, -2a\}$ est pair. Donc $S = S - 0 = \sum (|\sigma(k) - k| - (\sigma(k) - k))$ est une somme d'entiers pairs : S **est pair**.
3. a) Par l'absurde, supposons les r_k deux à deux distincts : $k \mapsto r_k$ est une injection de E_n dans $\{0, \dots, n - 1\}$, deux ensembles à n éléments, donc une bijection, et $\sum r_k = 0 + 1 + \dots + (n - 1) = \frac{n(n-1)}{2}$. Chaque $k + \sigma(k) - r_k$ est multiple de n , donc leur somme aussi :

$$\sum (k + \sigma(k)) - \sum r_k = n(n + 1) - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+3)}{2} = qn \quad (q \in \mathbb{Z}),$$

d'où $n + 3 = 2q$, et n serait impair : contradiction.

b) $n = 2p + 1$, r_k est le reste de $2k$. Pour $1 \leq k \leq p$: $r_k = 2k \in \{2, 4, \dots, 2p\}$; pour $p + 1 \leq k \leq 2p$: $0 < 2k - n < n$, donc $r_k = 2k - n \in \{1, 3, \dots, 2p - 1\}$; enfin $r_n = 0$. Ces n restes sont **deux à deux distincts**.

■ **Corrigé de l'exercice 66**

1. a) Si $A \subset \Phi(A)$, tout $x \in A$ est dans M (avec cette partie A) : $A \subset M$, donc $\Phi(A) \subset \Phi(M)$. Si $x \in M$, il existe A avec $A \subset \Phi(A)$ et $x \in A$: $x \in A \subset \Phi(A) \subset \Phi(M)$. Donc $M \subset \Phi(M)$.
b) Par croissance, $M \subset \Phi(M)$ donne $\Phi(M) \subset \Phi(\Phi(M))$: la partie $\Phi(M)$ vérifie la condition de a), donc $\Phi(M) \subset M$. Par double inclusion, $\Phi(M) = M$.
2. a) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B) \Rightarrow F \setminus f(B) \subset F \setminus f(A) \Rightarrow g(F \setminus f(B)) \subset g(F \setminus f(A)) \Rightarrow \Phi(A) \subset \Phi(B)$ (le passage au complémentaire renverse l'inclusion).
b) En passant au complémentaire dans $M = \Phi(M)$: $E \setminus M = g(F \setminus f(M))$. Si $x \notin M$, $x = g(y)$ avec $y \notin f(M)$, et y est unique car g est injective : $\gamma(x) = y \notin f(M)$.
c) **Injectivité**. Soit $x \neq x'$. Si $x, x' \in M$: $f(x) \neq f(x')$. Si $x, x' \notin M$: $g(h(x)) = x \neq x' = g(h(x'))$, donc $h(x) \neq h(x')$. Si $x \in M$, $x' \notin M$: $h(x) \in f(M)$ et $h(x') \notin f(M)$. **Surjectivité**. Soit $y \in F$. Si $y \in f(M)$, $y = f(x) = h(x)$ avec $x \in M$. Sinon, $x = g(y) \in g(F \setminus f(M)) = E \setminus M$ et $h(x) = \gamma(x) = y$. h **est bijective**.
3. a) $f(A) = \{a + 1 : a \in A\}$; pour $n \in \mathbb{N}$: $n \in \Phi(A) \iff n \notin g(\mathbb{N} \setminus f(A)) \iff (n \leq 1 \text{ ou } n - 2 \in f(A)) \iff (n \leq 1 \text{ ou } (n \geq 3 \text{ et } n - 3 \in A))$: $\Phi(A) = \{0, 1\} \cup \{a + 3 : a \in A\}$.
b) n et $n + 3$ ont le même reste par 3. $\subset$: $0, 1 \in M$ et $a \in M \Rightarrow a + 3 \in M$. $\supset$: si $n \in M$, ou bien $n \in \{0, 1\}$, ou bien $n \geq 3$ et $n = (n - 3) + 3$ avec $n - 3 \in M$. Donc $\Phi(M) = M$.
c) Si $n \in M$, $h(n) = n + 1$; sinon (reste 2), $h(n) = \gamma(n) = n - 2$. Ainsi

$$h(3k) = 3k + 1, \quad h(3k + 1) = 3k + 2, \quad h(3k + 2) = 3k :$$

la bijection h fait tourner chaque bloc $\{3k, 3k + 1, 3k + 2\}$.

Corrigé du test d'entrée

Barème : 1 point par réponse juste et justifiée, $\frac{1}{2}$ point si une seule des deux parties est juste. Reporte tes points bloc par bloc dans la case score de la page 4.

Bloc 1 · Calculs sur les fonctions

- ① $f(-2) = 15$, $f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{3}$,
 $f(\sqrt{2}) = 5 - 2\sqrt{2}$. $12 + 4 - 1$;
 $\frac{1}{3} - \frac{2}{3} - 1$; $3 \times 2 - 2\sqrt{2} - 1$.
- ② $f(x) = -3x + 7$; $x = -1$.
 Coefficient $a = \frac{-2-4}{3-1} = -3$,
 puis $b = f(1) - a = 7$;
 $-3x + 7 = 10 \iff x = -1$.
- ③ Pour $x \neq \frac{1}{2}$;
 $g(x) = 1 \iff x = 4$;
 $g(x) = \frac{1}{2}$ n'a aucune
 solution. $x + 3 = 2x - 1$;
 $2x + 6 = 2x - 1$ donne
 $6 = -1$: impossible.
- ④ (a) A : $1 \rightarrow 4 \rightarrow \frac{1}{4}$; B :
 $1 \rightarrow 1 \rightarrow 4$. (b) -3 pour A,
 0 pour B. L'ordre des
 étapes change le résultat ;
 $-3 + 3 = 0$ n'a pas d'inverse.

Bloc 2 · Équations et intervalles

- ⑤ (a) $S = \left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$; (b) $S = \emptyset$.
 $2x^2 - 3x - 2 = (2x + 1)(x - 2)$;
 $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$.
- ⑥ $S =]-5, 2]$. Tableau de
 signes de $2 - x$ et $x + 5$; 2
 est solution, -5 est une
 valeur interdite.
- ⑦ $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$ et $\frac{5}{2} \leq 3 - \frac{1}{x} \leq \frac{14}{5}$.
 L'inverse renverse l'ordre
 sur $]0, +\infty[$; le signe moins
 le renverse encore.
- ⑧ Au moins une solution
 $\iff k \geq -16$; une seule
 $\iff k = -16$.
 $x^2 - 8x = (x - 4)^2 - 16$:
 l'équation s'écrit
 $(x - 4)^2 = k + 16$.

Bloc 3 · Logique et ensembles

- ⑨ (a) P est vraie, Q est
 fausse. (b) $\forall x \in \mathbb{R}$,
 $\exists y \in \mathbb{R}$, $4x + 1 \neq y$. $x = \frac{y-1}{4}$
 convient ; pour x donné,
 $y = 4x$ donne $4x + 1 \neq y$.
- ⑩ « Si $x + y - xy = 1$, alors
 $x = 1$ ou $y = 1$ ». Le « et »
 devient « ou » :
 $x + y - xy - 1 =$
 $-(x - 1)(y - 1) = 0$.
- ⑪ $A \cap B =]2, 4]$, $A \cup B = [-1, 6[$,
 $C_{\mathbb{R}}^A =]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[$.
 Dessine les deux
 intervalles sur une même
 droite.
- ⑫ 9 éléments ; (2, 3), (2, 5) et
 (3, 5). $3 \times 3 = 9$; l'ordre
 compte : (2, 3) convient,
 pas (3, 2).

Ton orientation

les renvois sont cliquables dans le PDF

1. Selon ton score total : par où commencer, quels exercices faire en priorité.

0 à 5
bases à revoir

Commence par tes erreurs (ce corrigé sert de rappel), puis le cours pas à pas, sections 1 à 4 d'abord. **En priorité** : le niveau 1, **exercices 1 à 8**, p. 23 ; puis **exercice 31**, p. 29 et **exercice 37**, p. 31. Refais le test dans une semaine.

6 à 9
bon départ

Commence par le cours complet (sections 1 à 10), puis les pièges de la section 12. **En priorité** : le niveau 2, **exercices 9 à 16**, p. 24 ; puis les thèmes B et C, **exercices 37 à 42**, p. 31 et **43 à 48**, p. 33.

10 à 12
cap concours

Commence par le cours (sections 1 à 10 en lecture rapide), puis les sections 11 à 13. **En priorité** : le niveau 3, **exercices 17 à 23**, p. 26 ; les thèmes D et E, **exercices 49 à 54**, p. 34 et **55 à 60**, p. 36 ; puis le niveau 4, **exercices 24 à 30**, p. 27, et le thème F, **61 à 66**, p. 37.

2. Selon ton bloc le plus faible (2 points sur 4 ou moins) : fais d'abord sa case, puis ta ligne ci-dessus.

Bloc 1 · Calculs sur les fonctions

Relis : les sections 1, 2 et 9 du cours.
Fais : **exercice 2**, p. 23,
exercice 32, p. 29, **exercice 49**,
 p. 34 et **exercice 55**, p. 36.

Bloc 2 · Équations et intervalles

Relis : les sections 3, 4 et 6 du cours.
Fais : **exercice 5**, p. 24,
exercice 33, p. 30, **exercice 38**,
 p. 31 et **exercice 56**, p. 36.

Bloc 3 · Logique et ensembles

Relis : les sections 4, 5 et 11 du cours.
Fais : **exercice 4**, p. 23,
exercice 12, p. 25, **exercice 16**,
 p. 26 et **exercice 41**, p. 32.

Mon bilan sur le chapitre

Partie B · Le parcours en 4 niveaux

Niveau	Exercices	Réussis seul(e)	À refaire
Niveau 1 · Bases ★	1 à 8	/ 8	
Niveau 2 · Bac ★★	9 à 16	/ 8	
Niveau 3 · Approfondissement ★★★	17 à 23	/ 7	
Niveau 4 · Concours ★★★★	24 à 30	/ 7	

Partie C · La banque d'exercices

Thème	Exercices	Réussis seul(e)	À refaire
Thème A · Images et antécédents	31 à 36	/ 6	
Thème B · Image directe et réciproque	37 à 42	/ 6	
Thème C · Injections et surjections	43 à 48	/ 6	
Thème D · Bijections et réciproques	49 à 54	/ 6	
Thème E · Composition	55 à 60	/ 6	
Thème F · Défis de concours	61 à 66	/ 6	

Conseil : refais dans une semaine les exercices ratés, sans regarder le corrigé.

Prochain chapitre : Généralités sur les fonctions

Maths Olympiad