

FONCTIONS POLYNÔMES

Classe : 11^{ème} Sciences

Durée : 12 H

Domaine : SMT

Discipline : Mathématique

Thème : Fonction Polynômes

Compétences :

- Résoudre une situation problème
- Communiquer des messages en utilisant le langage et le symbolisme mathématique.

Composantes et manifestations :

- Participer à des échanges d'informations à Caractère Scientifique, mathématique ou technologiques.
- Partager les informations relatives à la démarche Scientifique et mathématique.

Ressources Educatives

Ressources humaines : Professeurs ; élèves

Ressources Matérielles : tableau, livres, règle, équerre,

Stratégies d'animation : Travaux en groupes

Contenu

Séquence 1 : Généralités sur les Polynômes	1
1.1. Définition.....	2
1.2. Identification d'une fonction polynôme à un autre	2
Séquence 2 : Zéros d'un polynôme ; Factorisation ; divisibilité.....	2
2.1. Théorème fondamental.....	2
2.2. Méthodes pratiques de factorisation.....	2
2.3. Etudier le Signe de l'image d'un nombre réel par une fonction	3
Séquence 3 : Fonctions rationnelles.....	3

Déroulement des activités

Pré évaluation :

Soit $P(x) = x^2 + 3x - 4$

- 1) Donner la nature de $P(x)$;
- 2) Résoudre $P(x) = 0$ puis en déduire la forme factorisée de $P(x)$;
- 3) Résoudre les inéquations $P(x) \geq 0$ et $P(x) < 0$

Séquence 1 : Généralités sur les Polynômes

Activité1

Consigne :

Développer et réduire suivant l'ordre décroissant les fonctions suivantes ;

$$a) f(x) = (2x - 1)^2 + (3x - 2)(x + 1)$$

$$b) g(x) = (x^3 + 3x^2 - x + 2)(2x - 1)$$

1.1. Définition

- Toute expression de la forme ax^n est appelée monôme avec $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
- On appelle polynôme ou fonction polynôme toute fonction P de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire sous la forme :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$ sont des coefficients réels

- On dit que P est un polynôme de degré n et on écrit $d^\circ P = n$.
- L'écriture $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ est appelée forme développée, réduite et ordonnée de $P(x)$ suivant les puissances décroissantes de x .
- Le domaine de définition de une fonction polynôme $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est : $D_P = \mathbb{R}$.

1.2. Identification d'une fonction polynôme à un autre

Activité 2 :

Soient $f(x) = x^2 + 3x + \frac{1}{2}$ et $g(x) = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{7}{4}$.

Développe réduire puis ordonne $f(x)$ et $g(x)$. Conclue

Synthèse partielle :

Soit deux fonctions polynômes f et g tels que pour tout réel x ,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \text{ et } g(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

avec $a_n \neq 0$ et $b_n \neq 0$

$$(f = g) \Leftrightarrow (d^\circ f = d^\circ g) \Leftrightarrow (n = p) \text{ et les coefficients de même rang sont identiques}$$

Séquence 2 : Zéros d'un polynôme ; Factorisation ; divisibilité

2.1. Théorème fondamental

Soit f une fonction polynôme et a un réel donné.

- Si $P(a) = 0$ alors on dit que a est un zéro ou une racine du polynôme P .
- Le polynôme $P(x)$ est alors divisible par $x - a$, c'est-à-dire qu'on peut écrire :

$$P(x) = (x - a)Q(x) \text{ où } Q(x) \text{ est un polynôme tel que } d^\circ Q = d^\circ P - 1.$$

2.2. Méthodes pratiques de factorisation

Activité 3 :

Soit le polynôme $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 1$.

- Calculer $f(1)$.
- Développe et réduire $f(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$ suivant les puissances décroissantes de x où a , b et c sont des réels.
- Détermine les réels a , b et c tels que $f(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$.

Synthèse :

Pour factoriser une fonction polynôme on pourra utiliser une des méthodes suivantes :

- la méthode des coefficients indéterminés ;

- la division euclidienne ;
- la méthode de Hörner

Evaluation

Exercice 1 : Soit le polynôme $P(x) = x^3 - 3x^2 - 18x + 40$

1°) Calculer $P(2)$

2°) Détermine les réels a , b et c tels que $f(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$

Exercice 2 : Soit le polynôme $f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$

Calcule $f(2)$ et en déduire que pour tout réel x , $f(x) = (x - 2)(ax^3 + bx^2 + cx + d)$, où a ; b ; c ; d sont des réels à déterminer.

Exercice 3 : Soit $f(x) = 2x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 7x + 3$ et $g(x) = x^2 + 2x + 1$.

Trouver le polynôme $q(x)$ tel que : $f(x) = g(x) \times q(x)$

2.3. Etudier le Signe de l'image d'un nombre réel par une fonction

Activité 4 : Soit le polynôme $f(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 13x + 6$

- Calculer $f(2)$ et $f(-3)$
- En déduire une factorisation de $f(x)$
- Trouvez les zéros de f et leur ordre de multiplicité.
- Etudier le signe de $f(x)$ puis en déduire les solutions de l'inéquation $f(x) < 0$

Synthèse partielle :

Pour étudier le signe de l'image d'un nombre réel par une fonction polynôme f , il faut étudier le signe de chaque facteur de f puis calculer le produit de signes de facteurs de f qui correspond le signe de l'image du nombre réel par la dite fonction polynôme .

Séquence 3 : Fonctions rationnelles

Activité 5 : Soient f et g deux fonctions polynômes définies respectivement sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 8x - 4 \text{ et } g(x) = (x - 1)^2$$

Consigne 1 : En effectuant la division euclidienne de f par g montrer qu'il existe 4 réels a , b , c , d telles que pour tout $x \neq 1$; $\frac{f(x)}{g(x)} = ax + b + \frac{cx + d}{(x - 1)^2}$

Consigne 2 : En utilisant la méthode des coefficients indéterminés, trouver les constantes réels a ; b ; c telles que $\frac{f(x)}{g(x)} = x + a + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{(x - 1)^2}$

Synthèse partielle :

Définition : On appelle fonction rationnelle toute fonction f telle que $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont deux polynômes. Le domaine de définition de f s'écrit $Df = \{x / x \in \mathbb{R} \text{ et } Q(x) \neq 0\}$

Division euclidienne :

$P(x)$ (dividende)	$Q(x)$ (diviseur)	$\longleftrightarrow f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = G(x) + \frac{R(x)}{Q(x)} \text{ avec } Q(x) \neq 0$
$R(x)$ (reste)	$G(x)$ (quotient)	

Après la division euclidienne, il faut faire une identification pour pouvoir déterminer les coefficients demandés.

Méthodes de coefficients indéterminés :

Réduire au même dénominateur toutes les fonctions puis identifier les numérateurs.

Activité 6 : simplification

Consigne : Soit la fonction rationnelle f définie par $f(x) = \frac{x^2-x-6}{9-x^2}$

- Déterminer le domaine de définition de f .
- Vérifier que 3 est un zéro commun au numérateur et au dénominateur.
- Trouver une écriture simplifiée de $f(x)$.

Synthèse partielle :

De façon générale si $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ est une fonction rationnelle et si α est un zéro commun à P et à Q , alors $f(x) = \frac{(x-\alpha)P_1(x)}{(x-\alpha)Q_1(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$, pour tous $x \in D_f$ est une forme simplifiée de $f(x)$.

1. Evaluation

Exercice 1 :

Montrer que la fonction polynôme f définie par

$f(x) = x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 16x + 16$ est le carré d'une fonction polynôme g que l'on déterminera.

Exercice 2 :

Soit le polynôme $f(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + ax + b$ où a et b sont des réels, et le polynôme $g(x) = x^2 - 5x + 6$. Trouver les réels a et b pour que le polynôme $f(x)$ soit divisible par $g(x)$.

Exercice 3 :

Soit le polynôme $P(x) = x^3 - 3x^2 - 18x + 40$

- Calculer $P(2)$
- Déterminer les réels a ; b ; c tels que $P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) > 0$.

Exercice 4 :

Soit la fonction rationnelle f définie par $f(x) = \frac{x^3+4x^2+5x+3}{x^2+3x+2}$

- Déterminer l'ensemble de définition de f
- Trouver les réels a , b , c , d tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{x+2}$

Exercice 5 :

Soit la fonction rationnelle définie par $f(x) = \frac{3x^2-4x+1}{x-2}$. Montrer qu'il existe trois réels a ; b ; c tels que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{2\} f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$

Exercice 6 :

Après avoir déterminé l'ensemble de définition, simplifier l'expression de $f(x)$ dans les cas suivants

$$f(x) = \frac{x^3 - 7x + 6}{x^2 + x - 6} ; g(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^3 - 19x - 30} ; h(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 - 8x - 3}{2x^3 - x^2 - 5x - 2}$$