

Classe : 11 Sciences**Durée** : 10 heures**1. Domaine** : Sciences Mathématiques et Technologies (SMT)**Discipline** : Mathématiques**2. Compétences :**

Résoudre une situation-problème

Composantes**Diagnostiquer la situation – problème****Manifestations**

- Sélectionner les données mathématiques, scientifiques et technologiques qui sont en rapport avec la situation.
- Etablir des relations entre les données retenues.
- Comparer cette situation – problème avec des situations semblables déjà résolues
- Formuler le problème

3. Contenu : Fonctions polynômes**4. Ressources éducatives**

- **Ressources humaines** : Néant
- **Ressources matérielles** : craie, tableau, la règle
- **Ressources financières** : Néant

5. Stratégies d'animation :

- Travail individuel
- Travail en petit groupe
- Brainstorming

6. Déroulement des activités (situation d'apprentissage)**Pré – évaluation :**Soient les fonctions f , g , h , i , j et k définies sur $\mathbb{R}$ par $ax^2 + bx + c$ tels que

$$f(x) = 2x^2 - 5x - 3 \quad i(x) = -3x^2 + 6x + 72 \quad g(x) = x^2 + x + 1$$

$$j(x) = -x^2 - 2x - 1 \quad h(x) = 9x^2 - 12x + 4 \quad k(x) = 6x^2 + 20x + 20$$

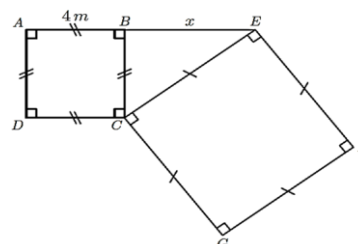
Fonctions	f	g	h	i	j	k
$\Delta = b^2 - 4ac$						
Signe de Δ (+ ; - ou 0)						
Existence de solution(s) (oui ou non)						
Si oui, nombre de solution(s)						

En déduire dans $\mathbb{R}$ les solutions des équations $f(x) = 0$; $i(x) = 0$; $k(x) = 0$ **Situation problème :**

Un champ est composé de deux carrés et d'un triangle rectangle.

On a représenté ce champ dans la figure ci – dessous :

- Trouver l'aire A de ce champ en fonction de x .
- Trouver l'aire A de ce champ sachant que $x = 6m$
- Trouver les réels γ , α et β tels que $A(x) = \gamma(x + \alpha)^2 + \beta$

**Bilan :**

- Soit A_1 l'aire du carré $ABCD$; A_2 l'aire du carré $BEFG$ et A_3 celle du triangle BEC rectangle en B .

Cherchons le coté du carré $EFGC$.

Pour cela considérons le triangle BEC rectangle en B .

$CE^2 = x^2 + 4^2$ D'après le théorème de Pythagore.

$$CE = \sqrt{x^2 + 16}$$

$$\text{Donc } A = A_1 + A_2 + A_3 = (4^2) + \left(\frac{4x}{2}\right) + (\sqrt{x^2 + 16})^2 = 16 + 2x + x^2 + 16 = x^2 + 2x + 32$$

D'où $A = x^2 + 2x + 32$.

b) Pour $x = 6m$

$$A = 6^2 + 2(6) + 32 = 36 + 12 + 32 = 80$$

D'où $A = 80m$

L'expression de l'aire A de ce champ en fonction de x se note $A(x) = x^2 + 2x + 32$ est une fonction polynôme du second degré.

Activité 1 : Généralité

On considère le nombre 7645. Ce nombre peut s'écrire : $7000 + 600 + 40 + 5$ ou encore

$7 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 5 \times 10^0$ appelée écriture polynomiale de 7645 notée $P(10)$

Ainsi $P(10) = 7 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 5 \times 10^0 = 7645$

a) En t'inspirant de l'écriture $P(10)$ donne l'écriture de $P(2)$; $P(5)$; $P(7)$.

b) En déduire pour tout réel x l'écriture de $P(x)$.

Synthèse partielle :

$P(x)$ est le polynôme de degré 3. On note $d^0P = 3$ et des coefficients réels 7, 6, 4 et 5

Donne deux exemples de polynôme et précise leur coefficients et leur degré.

1) Définition :

- Toute expression de la forme ax^n est appelée monôme avec $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
- On appelle polynôme, toute somme de monômes.
- Le polynôme $P(x)$ s'écrit sous la forme : $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ appelée forme développée, réduire et ordonnée de P suivant les puissances décroissantes de x
On dit que $P(x)$ est un polynôme de degré n et on écrit $d^0P = n$.
- Le domaine de définition de P est $\mathbb{R}$, noté $D_P = \mathbb{R}$.
- La fonction $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto P(x)$ est appelée une fonction polynôme.

2) Identification d'une fonction polynôme à un autre :

Soient deux polynôme f et g telles que pour tout réel x ,

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$g(x) = b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0 \quad \text{avec } a_n \neq 0 \text{ et } b_n \neq 0$$

$$(f = g) \Leftrightarrow (d^0 f = d^0 g) \Leftrightarrow (n = p) \text{ et les coefficients de même rang sont identiques.}$$

Activité 2 : Forme canonique d'un polynôme du second degré

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 10$ et $AD = 6$.

Soit x un nombre de l'intervalle $[0 ; 6]$ et E, F, G, H les points appartenant respectivement aux segments $[AB]$; $[BC]$; $[CD]$; $[DA]$ tels que $AE = BF = CG = DH = x$.

On appelle $a(x)$ l'aire du quadrilatère $EFGH$.

1) Exprimer $a(x)$ en fonction de x .

2) Vérifier que $a(x) = 2(x - 4)^2 + 28$.

3) En déduire que la fonction a , définie sur l'intervalle $[0 ; 6]$ par la relation précédente, admet un minimum pour une valeur de x que l'on précisera ; quelle est la valeur de ce minimum ?

Synthèse partielle :

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. On dit que f est une fonction polynôme du second degré s'il existe 3 réels a , b , c ($a \neq 0$) tels que : $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Synthèse partielle :

Soit $ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré ($a \neq 0$);

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \Leftrightarrow f(x) = \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

Cette dernière écriture de $f(x)$ est appelée forme canonique du polynôme.

Activité 3 : Zéros d'une fonction polynôme :

On donne la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 4$

a) Quelle est la nature de f ?

b) Préciser le degré de f puis calculer $f(0)$; $f(-1)$ et $f(1)$.

c) Que représente f pour la fonction f ?

Synthèse partielle

Soit f une fonction polynôme et a un nombre réel. Si $f(a) = 0$ alors, on dit que a est un zéro ou une racine de f .

Soit P le polynôme du second degré défini par : $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du polynôme P .

- Si $\Delta < 0$, alors P n'a pas de racine et n'est pas factorisable.
- Si $\Delta = 0$, alors P a une racine unique $\frac{-b}{2a}$. On a : $P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$.
- Si $\Delta > 0$, alors P a deux racines distinctes x_1 et x_2 telles que : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$. On a : $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Remarque :

Si la somme des coefficients d'une fonction polynôme est nul, alors, 1 un zéro de cette fonction polynôme.

Si la somme des coefficients de puissance paire est égale à la somme des coefficients de puissance impaire d'une fonction polynôme, alors, -1 un zéro de cette fonction polynôme.

Activité 4 : Opération sur les fonctions polynômes

Soient les fonctions P et Q définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 + 4x - 1 \quad \text{et} \quad Q(x) = 1 - x^2$$

Calculer $P(x) + Q(x)$, $P(x) \times Q(x)$, $2P(x) - 3Q(x)$

Synthèse partielle :

La somme de deux polynômes P et Q est un polynôme noté $P + Q$ tel que $d^\circ(P + Q)$ est inférieur ou égal au plus grand degré de P et Q .

Le produit de deux polynômes P et Q est un polynôme noté $P \times Q$ tel que $d^\circ(P \times Q) = d^\circ P + d^\circ Q$

Activité 4 : Factorisation d'un polynôme

Activité :

$$\text{Soit } p(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$$

Calculer $p(-2)$; $p(1)$; $p(2)$

Synthèse partielle :

$p(1) = 0$; on dit 1 est une racine éventuelle de p ou que p est divisible par $x - 1$.

Soit p un polynôme de degré n et α un réel.

α est une racine du polynôme p ou un zéro de la fonction p , si et seulement si il existe un polynôme Q de degré $n - 1$ tel que : pour tout nombre réel x ; $\frac{p(x)}{(x-\alpha)} = Q(x)$ ou $p(x) = (x - \alpha)Q(x)$

Q est appelé quotient de $p(x)$ par $x - \alpha$

Définition :

Soit f une fonction polynôme définie par : $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$ et g une fonction polynôme. On dit que f est divisible par g (ou factorisable par g) s'il existe h une fonction polynôme telle que : $f = g \times h$

Propriété : Si f est une fonction polynôme et $f(\alpha) = 0$ alors f est divisible par $x - \alpha$

Théorème 1 :

Soit f une fonction polynôme et a un réel donné. a est un zéro ou racine de f si et seulement si, il existe une fonction polynôme h telle que $f(x) = (x - a)h(x) \forall x \in \mathbb{R}$.

Théorème 2 :

Soit f une fonction polynôme non identiquement nulle et de degré n . Alors f admet au plus n racine dans $\mathbb{R}$. De plus si f admet exactement n racines distinctes $a_1 ; a_2 ; \dots ; a_n$, alors :

$f(x) = \gamma(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) \gamma \in \mathbb{R}^*$.

Activité 5 : Méthodes de factorisation

Activité 5-1 : Méthode pratique de la division euclidienne :

a) Soit $f(x) = 2x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 7x + 3$ et $g(x) = x^2 + 2x + 1$

Trouve par **division euclidienne** le polynôme $q(x)$ tel que : $f(x) = g(x) \times q(x)$.

b) Soit $h(x) = x^3 - 4x + 8x - 4$ et $p(x) = x^2 - 2x + 1$

En effectuant par **division euclidienne**, trouve les polynômes $q(x)$ et $R(x)$ tels que $h(x) = p(x) \times q(x) + R(x)$.

Activité 5-2 : Méthode des coefficients indéterminés :

Soit $f(x) = 2x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 7x + 3$ et $g(x) = x^2 + 2x + 1$

Trouver le polynôme $q(x)$ tel que : $f(x) = g(x) \times q(x)$.

$f(x) = g(x) \times q(x) \Rightarrow$ comme $d^\circ f = 4$ et $d^\circ g = 2$ alors $d^\circ q = 2$.

Activité 5-3 : Méthode de Hörner

Activité :

Soit le polynôme $f(x) = x^3 - 7x^2 + 16x - 12$. Calculer $f(2)$ et en déduire que pour tout réel x , $f(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$, où a, b, c sont des réels à déterminer.

Solution :

2 est un zéro de f

Coefficient	1	-7	16	-12
Zéro de $f = 2$	↓	↗	↗	↗
Coefficient cherchés	1	-5	6	0

D'après la méthode de Hörner, $a = 1$; $b = -5$; $c = 6$.

D'où $f(x) = (x - 2)(x^2 - 5x + 6)$

Synthèse générale :

Soient $F(x)$ et $G(x)$ deux fonctions polynômes quelconques telles que $d^{\circ}F \geq d^{\circ}G$ avec $G(x) \neq 0$.

On a :

1. Division euclidienne :

$F(x)$ dividende $G(x)$ diviseur
 $R(x)$ reste $Q(x)$ quotient



$$F(x) = G(x) \times Q(x) + R(x)$$

Si $R(x) = 0$ alors $F(x) = G(x) \times Q(x)$. On dit que le polynôme F est divisible par le polynôme G

$$\frac{F(x)}{G(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{G(x)}$$

2. Coefficient indéterminé :

Soit $q(x)$ la fonction polynôme à coefficients indéterminés telle que $F(x) = G(x) \times q(x)$

Pour déterminer les coefficients de $q(x)$, il faut chercher le degré de $q(x)$ ($d^{\circ}q = d^{\circ}F - d^{\circ}G$), puis développer, réduire et ordonner suivant l'ordre croissant ou décroissant de x de $F(x)$ et $G(x) \times Q(x)$ et par identification de $F(x)$ et $G(x) \times Q(x)$ on trouve les coefficients de $Q(x)$

2) Théorème :

Soit f une fonction polynôme de degré n et a un réel donné. Si $f(a) = 0$ alors on dit que a est un zéro du polynôme $f(x)$. Si $f(a) = 0$, alors le polynôme $f(x)$ est divisible par $x - a$ c'est-à-dire, il existe un polynôme q de degré $n - 1$ tel que $f(x) = (x - a)q(x)$

Evaluations formatives :

1) Vérifie que $f(\alpha) = 0$ puis factorise $f(x)$ par la division euclidienne

- a) $f(x) = x^2 + x - 12$ $\alpha = 3$
 b) $f(x) = x^3 + 6x^2 - x - 30$ $\alpha = -5$
 c) $f(x) = x^3 + 5x^2 + 2x - 8$ $\alpha = -4$
 d) $f(x) = x^3 - 7x + 6$ $\alpha = 2$

2) Calcule $f(\alpha)$ puis détermine $G(x)$ tel que $f(x) = (x - \alpha)G(x)$

- a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ et $\alpha = 1$
 b) $f(x) = x^3 + 11x^2 + 23x - 35$ $\alpha = -7$
 c) $f(x) = x^3 + 8x^2 + 13x + 6$ $\alpha = -1$
 d) $f(x) = x^3 + 6x^2 - 6x - 24$ $\alpha = 2$

3) Factorise les fonctions suivantes par la méthode d'Horner

- a) $x^3 + 6x - x - 30 = 0$ $\alpha = -5$ d) $x^3 + 8x^2 + 19x + 12 = 0$ $\alpha = -3$
 b) $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$ $\alpha = 5$ e) $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$ $\alpha = 2$
 c) $x^3 - 7x + 6 = 0$ $\alpha = 2$

4) On donne la fonction f définie par $f(x) = x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$

- a) Calculer $f(1)$; $f(-1)$ et $f(2)$
 b) Mettre si possible $f(x)$ sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré.
 c) Préciser tous les zéros de f ainsi que leur ordre de multiplicité.

Activité 5 : Signe de l'image d'un nombre réel par une fonction

Soit le polynôme $f(x) = x^4 + 3x^3 - 5x - 13x + 6$

- a) Calculer $f(2)$ et $f(-3)$
 b) Factoriser $f(x)$ puis résoudre l'équation $f(x) = 0$
 c) Etudier les signes de $f(x)$.

Synthèse partielle :

Pour étudier le signe de l'image d'un nombre réel par une fonction polynôme f , On étudie le signe de chaque facteur de f puis on calcule le produit de signe de facteurs de f qui correspond au signe de l'image du nombre réel par la dite fonction polynôme.

Activité 2 : Fonctions rationnelle

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{3x^2-5x+2}{x+3}$

a) Déterminer D_f .

b) Que valent a , b , et c pour que $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+3}$?

Synthèse partielle :

1) Définition : On appelle fonction rationnelle toute expression de la forme $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ où f et g sont des polynômes. Exemple : $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$; $g(x) = \frac{x^2+2x-3}{x+2}$

2) Ensemble de définition d'une fonction rationnelle :

$h(x)$ est une fonction rationnelle de la forme $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ l'ensemble de définition D_h de h (domaine de définition D_h) est : $D_h = \{x/x \in \mathbb{R} \text{ tel que } g(x) \neq 0\}$

Evaluation formative : Trouve l'ensemble de définition de f dans les cas suivants

a) $f(x) = \frac{2x+2}{x-1}$ b) $\frac{x-7}{x^2+1}$ c) $\frac{x^2+2x-1}{x^2+x-6}$ d) $f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-4}$ e) $f(x) = \frac{x+7}{x^3+4x^2-3x-2}$

3) Simplification des fonctions rationnelles :

Pour simplifier une fonction rationnelle on suit les étapes suivantes :

- On factorise le numérateur et le dénominateur ;
- On détermine son ensemble de définition ;
- Pour $x \in D_f$ on simplifie par les facteurs communs au numérateur et au dénominateur ;
- On donne l'expression simplifiée de la fonction.

Evaluation formative : Simplifie les fonctions suivantes

a) $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2+3x-4}$ b) $\frac{x^2+2x-8}{x^2+3x-4}$ c) $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^2+5x+6}$ d) $f(x) = \frac{x^2+x+2}{x^2+1}$