

DENOMBREMENT-PROBABILITE

Domaine : Sciences, Mathématiques et Technologies

Compétences : Résoudre une situation problème, Communiquer des messages utilisant le langage et le symbolisme Mathématiques. *Composantes* : Diagnostiquer la situation problème, mettre à l'essai des pistes de solutions et partager les informations relatives à la démarche et formuler les résultats.

Manifestations : Sélectionner les données mathématiques, scientifiques et technologiques qui sont en rapport avec la situation, établir des relations entre les données retenues ; Inventorier des différentes pistes de solution, Choisir une piste et l'appliquer.

Ressources :

Ressources humaines : Professeur, élèves,

Ressources Matérielles : Tableau, Livres ; cahier ; règle ; compas ; Chiffon ; craie ...

Stratégies d'animation : Travaux en groupe (pédagogie active).

Contenu :

A- DENOMBREMENT

I. Ensemble-élément

Activité1 :

Considérons les notations suivantes :

$$G = a ; b ; \quad F = \{a, b, c, d\} \quad N = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}, \quad T = \frac{5}{2} + \frac{1}{3} + 1$$

Consigne : parmi les notations ci-dessus ; donner celles qui sont des ensembles

Synthèse partielle : un ensemble est une collection d'objets distincts. Les objets de cet ensemble sont appelés les éléments.

Exemple : $F = \{a, b, c, d\}$ est un ensemble et a, b, c, d sont des éléments.

- Un troupeau de mouton est un ensemble dont les éléments sont des moutons

Remarque : un ensemble ne contenant pas d'élément est un ensemble vide noté $\emptyset$ ou $\{\}$

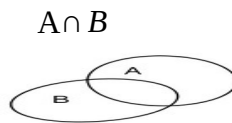
- Un ensemble contenant un élément est un singleton,
- Un ensemble peut contenir d'autre ensemble.

Exemple : N contient l'ensemble des nombres pairs $\{0, 2, 4, 6, \dots\}$

II. Intersection- Réunion- Inclusion- Complémentaire d'un ensemble :

Définition1 :

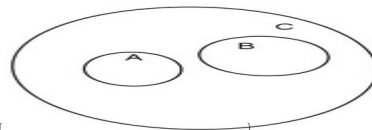
Soit A et B deux ensembles, on appelle l'intersection de A et B ; on note $A \cap B$ et se lit A inter B. l'ensemble des elements communs à A et à B. on a le diagramme.



Exemple : $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$; $B = \{0, 2, 5, 10, 15\}$; $A \cap B = \{0, 2, 5\}$

Remarque : $A \cap B = \emptyset$. On dit que A et B sont disjoints.

Definition2 : on appelle réunion de deux ensembles A et B notée $A \cup B$ et se lit A union B l'ensemble des éléments appartenant A ou B. On a le diagramme :



Exemple : $A = \{0, 1, 2, a, c\}$, $B = \{a, b, c\}$; $A \cup B = \{0, 1, 2, a, b, c\}$

Definition3 : un ensemble A est inclus dans un ensemble B si tout élément de A est élément de B, on note $A \subset B$, qui se lit A inclus dans B. on dit que A est un sous ensemble de B ou une partie de B Exemple : $A = \{a ; b ; c\}$; $B = \{1 ; 2 ; a ; b ; c\}$ alors $A \subset B$

Définition 4 : A étant un sous ensemble de E, on appelle complémentaire de A dans E l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A noté $C_E^A = \bar{A} = \{x \in E ; x \notin A\}$

Exemple : $E = \{a ; b ; c ; d ; e\}$; $A = \{b ; c\}$; $C_E^A = \{a ; d ; e\}$

Remarque : si A et B sont des sous-ensembles de E, $A \subset B \Rightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$

III. Complément sur les ensembles

1. **Un ensemble fini** : un ensemble est dit fini lorsqu'on peut compter le nombre d'éléments exemple : $A = \{a ; b ; c ; d ; e ; f\}$ est un ensemble fini
2. **Ensemble des parties d'un ensemble** : l'ensemble des parties d'un ensemble E noté $P(E)$ Exemple : $E = \{a ; b ; c\}$; $P(E) = \{\emptyset ; \{a\} ; \{b\} ; \{c\} ; \{a ; b\} ; \{a ; c\} ; \{b ; c\} ; \{a ; b ; c\}\}$
3. **Ordre d'un ensemble**
4. **La différence de deux ensembles**
5. **La différence symétrique de deux ensembles**

6. Position d'un ensemble :

Définition : les parties d'un ensemble E forment une partition E si :

- Elles sont disjointes deux à deux
- Elles sont non vides. Leur réunion égale à E

7. Cardinal d'un ensemble fini :

Définition : cardinal d'un ensemble fini E est le nombre d'éléments de cet ensemble.
On note Card(E) Exemple : $A = \{0 ; 1 ; 2 ;\}$; $B = \{a ; b ; c ; d\}$; Card(A)=3 ; Card(B)= 4 ;
Card($\emptyset$)=0

Remarque: soit E un ensemble fini de Card(E)=n, alors Card (P(E))= 2^n

Propriétés : Soit E un ensemble fini et $E_1 : E_2 \rightarrow E_p$ des ensembles formant une partition de E : on a : Card(E)= Card E_1 + Card E_2 + Card E_3 + ... + Card E_p

Soient A et B deux ensembles. On a

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$$

NB : Si A et B sont disjoints i.e. $A \cap B = \emptyset$ alors Card (A $\cup$ B)=Card (A)+Card (B)

8. Produit cartésien :

Soient A et B deux ensembles, on appelle produit cartésien de A et B on note AxB se lit A croix B, l'ensemble des couples (a ; b) tel que $a \in A$ et $b \in B$. On a: $A \times B = \{(a; b) \mid a \in A \text{ et } b \in B\}$

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$$

Remarque: si $A = B$; $A \times B = A^2 = B^2$ alors Card(A^2) = (CardA)²

Exemple : $A = \{1 ; 2\}$; $B = \{a ; b ; c\}$

A\B	A	B	C
1	(1 ; a)	(1 ; b)	(1 ; c)
2	(2 ; a)	(2 ; b)	(2 ; c)

$$\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B) = 2 \times 3 = 6$$

IV. P-uplets; arrangement; permutations; combinaison

1) P-uplets d'un ensemble

a) Définition et Propriété

- **Définition:** soit E un ensemble à n éléments et p un nombre entier naturel non nul. On appelle p-uplet de E tout élément de l'ensemble E^p

Exemple :

- (5,2), (8,8), (2,5), (0,0) sont des couples de $\mathbb{N}^2$;
- (0,0,1) , (1,1,0) , (0,0,0) sont des triplets de l'ensemble $\{0 ; 1\}$
- **Propriété :** le nombre de p-uplets d'un ensemble à n éléments est n^p

2) Arrangements :

a) Définition et Propriétés

- **Définition :** soit E un ensemble à n éléments et p un nombre entier naturel non nul tel que : $p \leq n$. on appelle arrangement de p éléments de E tout p-uplets de E deux à deux distincts.
- **Propriété :** le nombre d'arrangements de p éléments d'un ensemble E à n éléments, noté A_n^p est tel que : $A_n^p = n (n-1) (n-2) \dots (n-p+1)$

Remarque :

- Le nombre de facteurs du produit $n(n-1)(n-2)\dots(n-p+1)$ est égal à p . Par exemple, A_{10}^4 est le produit de 4 entiers consécutifs dont le plus grand est 10, $A_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$
- Si $p > n$, il est impossible de trouver p éléments deux à deux distincts dans E .

3) Notation factorielle :

- Pour tout nombre entier naturel n non nul, le produit $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ est appelé « factorielle n » et est noté $n!$
- Par convention : $0! = 1$

Exemple : $1! = 1$; $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$

Propriété :

Soit n et p deux nombres entiers naturels non nuls tels que : $p \leq n$ on a : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

Par convention : $A_n^0 = 1$

4) Permutations :

Définition : Soit E un ensemble à n éléments. On appelle permutation de E tout arrangement des n éléments de E . On déduit du paragraphe précédent que le nombre de permutations de E est $n!$

Propriété : le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments est $n!$

5) Combinaison :

Définition : Soit E un ensemble à n éléments et p un nombre entier naturel tels que : $p \leq n$. On appelle combinaison de p éléments de E tout sous ensemble de E ayant p éléments.

Propriété 1: le nombre de combinaison de p éléments d'un ensemble à n éléments

noté $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Propriété 2 : Soit n et p deux nombres entiers naturels tels que : $p \leq n$

✓ On a : $C_n^{n-p} = C_n^p$

✓ Si de plus $0 < p < n$, alors on a : $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$

V. Formule du Binôme de Newton :

Soit a et b deux nombres réels et n un nombre entier naturel non nul.

On a : $(a+b)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p a^{n-p} b^p$

VI. Triangle de Pascal:

Ce triangle permet de retrouver les coefficients de la formule du binôme

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 = C_4^0 a^4 b^0 + C_4^1 a^{4-1} b^1 + C_4^2 a^{4-2} b^2 + C_4^3 a^{4-3} b^3 + C_4^4 a^{4-4} b^4$$

0	1
1	1 1
2	1 2 1

3	1331
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1
9	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
10	1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

VII. Probleme de Denombrement:

Soit E un ensemble à n éléments

Tirages des boules dans une urne

Modélisation	Les p éléments ordonnés	Les p éléments distincts	Outils	Nombre de tirages
Tirages successifs avec remise	OUI	NON	p listes	n^p
Tirages successifs sans remise	OUI	OUI	Arrangement	A_n^p
Tirages simultanés	NON	OUI	Combinaison	C_n^p

VIII. Principe de la somme et du produit :

Pour dénombrer un ensemble E, on peut utiliser l'un des deux principes suivants ;

1) Principe de la somme :

On définit une partition de E par des ensembles $E_1; E_2; E_3 \dots; E_p$ alors $\text{card}E = \text{card}E_1 + \text{card}E_2 + \dots + \text{card}E_p$

2) Principe du produit :

On décompose E en un produit cartésien d'ensemble $E_1; E_2; E_p$ on a alors $\text{card}E = \text{card}E_1 * \text{card}E_2 * \dots * \text{card}E_p$

Exemple : une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12 dont 3 rouges ; 4 vertes ; 5 blanches. On tire successivement et avec remise 3 boules de cette urne. Calculer le nombre de tirages distincts dans les cas suivants

- 1) Les 3 boules tirées sont de la même couleur
- 2) La première et la troisième sont vertes

B- PROBABILITE.

I. Vocabulaire ;

- 1) **Univers :** C'est l'ensemble de la réalisation possible d'une expérience, il est généralement noté Ω
- 2) **Evènement :** c'est la partie (sous ensemble) de l'univers Ω
- 3) **Evènement élémentaire :** c'est un évènement contenant un seul élément de Ω
- 4) **Evènement impossible :** c'est l'évènement qui n'est pas réalisable (ensemble vide)

5) Evènement certain : c'est un évènement qui est toujours réalisable (univers Ω) On dit qu'un évènement est réalisé lorsque le résultat de l'expérience est une éventualité appartenant à cet évènement.

Exemple : une urne contient deux boules rouges (R_1 et R_2) et deux boules blanches (B_1 et B_2), on tire simultanément 2 boules de cette urne

- Quel est l'univers Ω de cette expérience, quel est $\text{card}\Omega$
- Quel est l'évènement A 'tire une boule blanche'
- Quel est l'évènement B 'tire 2 boules de même couleur'
- Quel est l'évènement C 'tire 2 boules de même numéro'
- Quel est l'évènement D 'tire 2 boules telles que la somme de leur numéro soit = 2'
- Quel est l'évènement E 'tire 2 boules telles que la somme de leur numéro soit = 3'
- Quel est l'évènement F 'tire 2 boules telles que la somme de leur numéro soit = 5'

Solution

$$\Omega = \{(R_1 R_2); (R_1 B_1); (R_2 B_1); (R_2 B_2); (R_1 B_2); (B_1 B_2)\}; \text{card}\Omega = 6$$

$$A = \{(R_1 B_1); (R_2 B_1); (R_2 B_2); (R_1 B_2)\}; \text{card}A = 4$$

$$B = \{(R_1 R_2); (B_1 B_2)\}; \text{card}B = 2$$

$$C = \{(R_1 B_1); (R_2 B_2)\}; \text{card}C = 2$$

$$D = \{(R_1 B_1)\}; \text{card}D = 1$$

$$E = \{(R_1 R_2); (R_2 B_1); (R_1 B_2); (B_1 B_2)\}; \text{card}E = 4$$

$$F = \{\} = \emptyset \quad \text{card}F = 0, F \text{ est un évènement impossible}$$

6) Intersection de deux évènements :

Soit E et F deux évènements de l'univers Ω On appelle intersection des évènements E et F l'évènement constitué des éléments appartenant à E et à F, on note $E \cap F$ ou « E et F »

7) Réunion de deux évènements :

On appelle réunion des évènements A et B, l'ensemble constitué des éléments appartenant à A ou B, on note $A \cup B$ ou « A ou B »

8) Evènements incompatibles :

Deux évènements E et F sont incompatibles si et seulement si $E \cap F = \emptyset$

9) L'évènement contraire :

L'évènement contraire de l'évènement E est l'ensemble des éléments de Ω n'appartenant pas à E, on note $\bar{E}$; $\text{card} \bar{E} = \text{card} \Omega - \text{card} E$

II. Calculs de probabilités :

Définition 1 : Soit Ω un univers et E un évènement de Ω la probabilité de E noté

$$P(E) = \frac{\text{card}E}{\text{card}\Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Définition 2: Soit $\Omega = \{ R_1; R_2; R_3; \dots R_n \}$ l'ensemble des réalisations possibles d'une expérience, $\text{card } \Omega = n$. Une probabilité sur Ω est la donnée des réels $P_1; P_2; \dots P_n$ associées respectivement aux éventualités $R_1; R_2; \dots R_n$ de Ω

- Chaque P_i est compris entre 0 et 1
- La somme de P_i est égale 1 i.e. $P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n = 1$

Remarque : $P(\emptyset) = 0$; $P(\Omega) = 1$

Si $\emptyset \neq E \in \Omega$; $P(E) < 1$; $P(\bar{E}) = P(\Omega) - P(E) = 1 - P(E)$

Soit A et B deux événements de Ω ; $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Si A et B sont incompatibles i.e. $A \cap B = \emptyset$; $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

III. Equiprobabilité :

Lorsque toutes les réalisations ont la même probabilité de se produire. On dit que l'expérience vérifie l'hypothèse de l'équiprobabilité : la probabilité de chaque

élément élémentaire est $\frac{1}{\text{card } \Omega}$

Exemple : on lance un dé cubique parfaitement équilibré

- 1) Déterminer l'univers Ω
- 2) Calculer la probabilité A « obtenir un résultat impair »
- 3) Calculer la probabilité B « obtenir un multiple de 3 »
- 4) Calculer la probabilité C « obtenir le chiffre 1 »