

NOTION DE PROBABILITÉ

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

I- Introduction :

1°) Exemple :

On lance 2 fois en l'air un dé non pipé (normal), x et y font un pari.

Si 6 apparaît alors x gagne 600Frs. Si 4 ou 5 apparaît alors y gagne 300Frs.

Qui est favorisé dans ce jeu ?

On constate que x a « une chance » sur 6 de gagner 600Frs. Par contre y a « deux chances » sur 6 de gagner 300Frs.

6 numéros peuvent apparaître quand on lance un dé en l'air : c'est ce qu'on appelle les **cas possibles**. L'ensemble des cas possibles forment l'**Univers de probabilité** Ω ;

$\Omega = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$. Dans le cas de y, 2 numéros lui permettent de gagner 300Frs. On dit qu'il y'a 2 **cas favorables** pour y.

Conclusion :

Dans cet exemple l'issue de l'opération « lancer le dé en l'air » n'est pas certaine, on dit que c'est une **opération aléatoire**.

2°) Définitions ou vocabulaire :

- **Cas possibles** = résultats d'une épreuve ;
- **Univers de probabilité** = ensemble de cas possibles ;
- **Cas favorables** = situation qui est favorable ;
- **Évènement** = sous-ensemble de l'univers de probabilité ;

Exemple1 : Dans le lancé de dé $\Omega = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$ un évènement $A = \{1 ; 3 ; 6\}$. Pour y les cas favorables sont : 4 et 5 ; $B = \{4 ; 5\}$ est un **évènement favorable** ; $C = \{4\}$ est un **évènement favorable**.

- **Évènement élémentaire ou éventualité** = sous-ensemble de Ω ayant un seul élément.

Exemple2 : On lance 3 fois de suite une pièce de monnaie normale. Déterminer le nombre de cas possibles.

Le nombre de cas possible $\Omega = \{ PPP ; PFP ; FFP ; FFF ; FPF ; PFF ; FPP ; PPF \}$

Un cas possible est : {3 lancers} $\rightarrow \{P, F\}$ le nombre d'application : $2^3 = 8$;

$X = \{PFP\}$ est une éventualité.

- **Évènement impossible** = c'est un évènement qui ne peut pas se réaliser ; il est noté ϕ .

Exemple : On tire au hasard 2 cartes d'un jeu normal de 32 cartes. Le nombre de cas favorables est C_{32}^2 . « Avoir 2 As de cœur » est un évènement impossible.

- **Évènement certain** = évènement qui se réalise à coup sûr au cours d'une épreuve
Par exemple « Avoir Pile (P) ou bien Face (F) en lançant une pièce de monnaie en l'air ».

- **Évènements équiprobables** = évènements ayant les mêmes chances de réalisation.

Exemple : On lance en l'air une pièce de monnaie 2 fois. Le nombre de cas possibles est $2^2=4$. $\Omega = \{PP ; PF ; FF ; FP\}$. Les évènements **A** = « avoir 0 fois P » et **B** = « avoir exactement 2 fois F » sont 2 évènements équiprobables.

II– Probabilité :

Soit un Ω univers d'éventualités équiprobables (on ne peut pas discerner les éventualités qu'après l'épreuve). Posons $\text{Card } \Omega = n$.

Soit A un évènement de Ω tel que $\text{card}A = k$.

- **Définition :**

La probabilité de réalisation de A est k réel notée P(A) définie par :

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{Nombre de cas Favorables}}{\text{Nombre de cas Possibles}}.$$

$$k \leq n \Rightarrow \frac{k}{n} \leq \frac{n}{n}=1 \Rightarrow P(A) \leq 1 ; k \geq 0 \Rightarrow \frac{k}{n} \geq \frac{0}{n} = 0 \quad (n \neq 0) \Rightarrow P(A) \geq 0 \text{ d'où} \\ 0 \leq P(A) \leq 1.$$

Remarques :

R₁) La probabilité d'un évènement certain est égal à 1 ; $P(\Omega) = \frac{n}{n} = 1$.

R₂) La probabilité d'un évènement impossible est égal à 0.

Exemple :

Dans un jeu normal de 32 cartes, on tire au hasard sans remise 3 cartes. Calculer la probabilité d'avoir exactement 2 Rois et 1 As parmi les 3 cartes tirées.

Réponse : le nombre de cas possibles est C_{32}^3 et le nombre de cas favorable est : $C_4^2 \times C_4^1$. La probabilité de A = « d'avoir un Roi et un As » est :

$$P(A) = \frac{C_4^2 \times C_4^1}{C_{32}^3} = \frac{24}{32 \times 155} = \frac{3}{620} = 0,004.$$

III– Probabilité conditionnelle :

Soit Ω un univers d'éventualités, A et B 2 évènements de Ω .

1°) Évènement Somme :

a) Définition 1 :

L'évènement somme de A, B est l'évènement noté : $A \cup B$ « A ou B » qui est réalisé si et seulement si l'un au moins des évènements A ou B est réalisé.

Exemple : On lance en l'air un dé normal. C= « avoir 5 ou 4 » est la somme des évènements A= « avoir 5 » ; B = « avoir 4 » ; C = $A \cup B$.

b) Définition 2 : On dit que 2 évènements A et B sont incompatibles si et seulement si ils ne peuvent pas se produire en même temps.

Exemple : Dans le lancé d'un dé, A= « avoir 5 » ; B = « avoir 4 » ; A et B sont incompatibles, $A \cap B = \phi$.

c) Théorème 1 :

Soient A et B 2 évènements incompatibles d'un univers Ω .

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Démonstration

Le nombre de cas possibles est $\text{card } \Omega = n$; $n \neq 0$.

Le nombre de cas favorables : posons $\text{card}A = k$ et $\text{card}B = m$.

$\text{Card}(A \cup B) = \text{card}A + \text{card}B - \text{card}(A \cap B)$; $A \cap B = \phi \Rightarrow \text{card}(A \cup B) = k + m$.

$$P(A \cup B) = \frac{k+m}{n} = \frac{k}{n} + \frac{m}{n} = P(A) + P(B).$$

Exemple: On tire au hasard 2 cartes d'un jeu normal de 32 cartes. Calculer la probabilité d'avoir 2 Dames ou 2 Rois.

Le nombre de cas possibles est C_{32}^2 . Soit C = « avoir 2D ou 2R » et soient les évènements A = « avoir 2D » ; B = « avoir 2R ».

A et B sont incompatibles $A \cap B = \phi$. Donc $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

$$P(A) = \frac{C_4^2}{C_{32}^2} \text{ et } P(B) = \frac{C_4^2}{C_{32}^2} ; P(A \cup B) = \frac{C_4^2}{C_{32}^2} + \frac{C_4^2}{C_{32}^2} = 2 \frac{C_4^2}{C_{32}^2}.$$

2°) Évènement Contraire :

Soit Ω un univers d'éventualités, A et B deux évènements de Ω .

a) Définition 3 : On dit que l'évènement B est l'évènement contraire de A si et seulement si, $\begin{cases} B \text{ est réalisé si } A \text{ ne l'est pas} \\ \text{et } A \text{ est réalisé si } B \text{ ne l'est pas} \end{cases}$ Notation : $B = \overline{A}$.

– Exemple 1 : Dans le lancé d'une pièce de monnaie, soient $A = \ll \text{avoir P} \gg$ et $B = \ll \text{avoir F} \gg$; $B = \overline{A}$ et $A = \overline{B}$.

b) Théorème 2 :

Soit A un évènement d'un univers Ω . $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Démonstration

$$A \cap \overline{A} = \Phi ; A \cup \overline{A} = \Omega, \quad p(\overline{A} \cup A) = p(A) + p(\overline{A}) = 1 ; \text{ d'où } p(\overline{A}) = 1 - p(A).$$

Exemple 2 :

- i) Dans un jeu de 32 cartes, quelle est la probabilité pour qu'un joueur recevant 5 cartes au hasard ait au moins 1 cœur ?
- ii) Même question avec au moins 2 cœurs ?

Solution :

i) $A = \ll \text{avoir au moins 1 cœur} \gg$ $\overline{A} = \ll \text{avoir 0 cœur parmi les cartes tirées} \gg$.

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \text{ Calculons } P(\overline{A})$$

Nombre de cas possibles est C_{32}^5 ; nombre de cas favorables C_{24}^5 .

$$P(\overline{A}) = \frac{C_{24}^5}{C_{32}^5}. \text{ Donc } P(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - \frac{C_{24}^5}{C_{32}^5}.$$

ii) $A = \ll \text{avoir au moins 2 cœurs} \gg$ $\overline{A} = \ll \text{avoir 0 cœur ou 1 cœur} \gg$.

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \text{ Calculons } P(\overline{A})$$

$B = \ll \text{avoir 1 cœur parmi les cartes tirées} \gg$; $C = \ll \text{avoir 0 cœur parmi les cartes tirées} \gg$. $B \cup C = \overline{A}$ et $B \cap C = \Phi$ donc $P(\overline{A}) = P(B) + P(C)$.

- $P(B)$: nombre de cas possibles = C_{32}^5 ; nombre de cas favorables = $C_8^1 \times C_{24}^4$.

$$\text{D'où } P(B) = \frac{C_8^1 \times C_{24}^4}{C_{32}^5}.$$

- $P(C)$: nombre de cas possibles = C_{32}^5 ; nombre de cas favorables = $C_8^0 \times C_{24}^5$.

$$\text{D'où } P(C) = \frac{C_8^0 \times C_{24}^5}{C_{32}^5}. \quad P(\overline{A}) = \frac{C_8^1 \times C_{24}^4 + C_8^0 \times C_{24}^5}{C_{32}^5} \Leftrightarrow P(A) = 1 - p(\overline{A}) = 0,37.$$

3°) Évènement Produit :

Soit Ω un univers d'éventualités, A et B deux évènements de Ω .

a) Définition 4 :

l'évènement produit des évènements A , B est l'évènement C noté $A \cap B$ qui est réalisé si et seulement si, A et B sont simultanément réalisés.

Exemple :

un lancé de 2 dés C « avoir 6 et 5 » ; A= « avoir 5 » ; B = « avoir 6 » . $C = A \cap B$.

b) Théorème 3 :

Soient 2 évènements quelconques A et B. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Exemple : D'un jeu de 32 cartes on tire au hasard simultanément 2 cartes. Calculer la probabilité d'avoir un Roi ou un Valet parmi les cartes tirées.

4°) Probabilité conditionnelle – évènements indépendants :

Soient les évènements A et B d'un univers Ω .

a) Définition 5 : La probabilité conditionnelle de B sachant que A est réalisé est le nombre réel noté $P(B/A)$ et définie par : $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$; $P(A) \neq 0$.

Exemple : D'un jeu de 32 cartes on tire successivement 2 cartes au hasard. Quelle est la probabilité d'avoir un as au 2^{ème} tirage ?

a) Définition 6 :

Deux évènements A et B sont dits indépendants si et seulement si,

$$P(A \cap B) = P(B/A) \times P(A) .$$

Remarque : En réalité dans le concret, 2 évènements A et B sont indépendants si la réalisation de A n'a aucune influence sur celle de B et réciproquement.

Exemple : d'un sac contenant des boules blanches et des boules noires on tire au hasard successivement en remettant chaque fois la boule tirée.

A = « avoir une boule blanche au 1^{er} tirage »

B = « avoir une boule noire au 2^{ème} tirage »

A et B sont indépendants. Deux évènements concrètement indépendants sont indépendants en probabilité.