

Equations et Inéquations

Classe : 11^{ème} Sciences

Durée : 20H

Domaine : SMT

Discipline : Mathématique

Compétences :

- Résoudre une situation problème
- Communiquer des messages en utilisant le langage et le symbolisme mathématique.

Composantes et manifestations :

- Participer à des échanges d'informations à Caractère Scientifique, mathématique ou technologiques.
- Partager les informations relatives à la démarche Scientifique et mathématique.

Ressources Educatives

Ressources humaines : Professeurs ; élèves

Ressources Matérielles : tableau, livres, règle, équerre,

Stratégies d'animation : Travaux en groupes

Contenus : Equations et Inéquations dans

Déroulement des activités :

Séquence 1 : Equations du second degré à une inconnue IR.

1.1 Définition

Une **équation du second degré**, à une inconnue x est une équation qui peut s'écrire sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$, où a , b et c sont trois réels donnés, $a \neq 0$.

1.2 Résolution de l'équation du second degré

Résoudre l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, c'est trouver tous les nombres u tels que $au^2 + bu + c = 0$. Un tel nombre u est dit **solution** ou encore **racine** de l'équation.

Activité 1 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$a) x^2 - 4 = 0 ; \quad b) -2x^2 + 32 = 0 ; \quad c) x^2 + 2x + 1 = 0 ; \quad d) 2x^2 + 3x = 0$$

Synthèse 1 :

Pour résoudre une équation du second degré, on peut utiliser les méthodes suivantes :

La factorisation particulière ;

La forme canonique ;

Le discriminant Δ ;

1.2.1 Résolution par la méthode du discriminant

Rappels : la forme canonique

On considère $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$; ($a \neq 0$)

Comme $a \neq 0$, on peut écrire pour tout réel x :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= ax^2 + bx + c \\
 &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c \\
 &= a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) + c \\
 &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 \right) + c \\
 &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - a \frac{b^2}{4a^2} + c \\
 &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c \\
 &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\
 &= a(x - \alpha)^2 + \beta
 \end{aligned}$$

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \quad \text{avec } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Méthode : Allons-y à la recherche des solutions :

Dans $f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$ posons $\Delta = b^2 - 4ac$.

Donc $ax^2 + bx + c = 0$; ($a \neq 0$) est équivalent à :

$$\begin{aligned}
 a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} &= 0 \\
 \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} &= 0
 \end{aligned}$$

$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ est factorisable si et seulement $\frac{\Delta}{4a^2} \geq 0$ si $\Delta \geq 0$. D'où

$$\begin{aligned}
 &\left[\left(x + \frac{b}{2a} \right) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right] \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right] = 0 \\
 \text{D'où } x &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou } x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}
 \end{aligned}$$

Synthèse Générale

Pour résoudre l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$; ($a \neq 0$) ; je calcule le discriminant « deltat » $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Lorsque $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions (racines) : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
 - Forme factorisée :** $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
- Lorsque $\Delta = 0$, l'équation admet une solution : $x_0 = x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ (dite solution double)
 - Forme factorisée :** $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)(x - x_0)$
- Lorsque $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution (racine) dans IR.

NB : si le réel b est divisible par 2 alors on utilise $\Delta' = b'^2 - 4ac$ avec $b' = \frac{b}{2}$ et dans ce cas :

(L .MAFA)

- Lorsque $\Delta' > 0$, l'équation admet deux solutions (racines) : $x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta}}{a}$ et $x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta}}{a}$
- Lorsque $\Delta' = 0$, l'équation admet une solution : $x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a}$ (dite solution double)

1.2.2 Utilisation des Recettes

soit à résoudre $ax^2 + bx + c = 0$; ($a \neq 0$)

☞ Si $a + b + c = 0$ alors $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{c}{a}$

☞ Si $a + c = b$, alors $x_1 = -1$ et $x_2 = -\frac{c}{a}$

Evaluation 1 : résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

- a) $3x^2 - 12x + 9 = 0$, b) $-x^2 + 8x + 9 = 0$; c) $2x^2 + 3x + 4 = 0$;
 d) $x^2 = 2\sqrt{2}x + 2$; e) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{6} = 0$; f) $(\sqrt{2} + 1)x^2 + 2x - \sqrt{2} + 1 = 0$
 g) $x^2 + (\sqrt{3} - 2)x - 2\sqrt{3} = 0$.

1.3 Somme et produit des solutions (racines)

Soit x_1 et x_2 les solutions de $ax^2 + bx + c = 0$; ($a \neq 0$) : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta} - b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \times x_2 = \frac{(-b - \sqrt{\Delta})(-b + \sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

1.3.1 Théorème

Si l'équation $ax^2 + bx + c = 0$; ($a \neq 0$) admet deux solutions (racines) distinctes ou confondues leur somme $S = -\frac{b}{a}$ et le produit $P = \frac{c}{a}$

1.3.2 Propriété :

Deux nombres réels ont pour somme S et pour produit P si et seulement s'ils sont les solutions de l'équation : $x^2 - Sx + P = 0$.

Exemple :

- a. Trouve les nombres dont : a) $S = 1$ et $P = -6$; b) $S = -\sqrt{2}$ et $P = -4$;
 b. Déterminer les dimensions d'un champ rectangulaire dont le périmètre est 64m et l'aire est 240m^2 .

1.3.3 Signe des solutions d'une équation du second degré à une inconnue dans $\mathbb{R}$

Activité : Dans les cas suivants calcule $P = x_1 \times x_2$ et $S = x_1 + x_2$. Conclure

- a) $P = 2 \times 3$ et $S = 2 + 3$; b) $P = (-2)(-3)$ et $S = (-2) + (-3)$;
 c) $P = 2(-3)$ et $S = 2 + (-3)$; d) $P = (-2)(-3)$ et $S = (-2) + (-3)$.

Synthèse

Signe de P	Signe de S	Signe de x_1 et x_2
+	+	$x_1 > 0$ et $x_2 > 0$
	0	Impossible
	-	$0 < x_1$ et $x_2 < 0$
0	+	$x_1 = 0$ et $x_2 > 0$ ou $x_2 = 0$ et $x_1 > 0$
	0	$x_1 = x_2 = 0$
	-	$x_1 = 0$ et $x_2 < 0$ ou

	-	$x_2=0$ et $x_1<0$
-		$x_1<0<x_2$ ou $x_2<0<x_1$

I.3.4 Comparaison d'un nombre aux solutions d'une équation du second degré

Activité :

Soit l'équation : $x^2 + x - 6 = 0$

Comparer le réel 1 et -5 aux solutions de l'équation ; justifier vos réponses.

Synthèse :

Théorème :

Soient la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$; ($a \neq 0$) ; $\Delta > 0$ et α un nombre réel.

Supposons les deux solutions vérifient : $x_1 < x_2$

a) Si $a \times f(\alpha) < 0$, alors $x_1 < \alpha < x_2$

b) Si $a \times f(\alpha) > 0$, alors $\alpha < x_1 < x_2$ ou $x_1 < x_2 < \alpha$. Déplus si :

$$\begin{cases} \alpha < -\frac{b}{2a}, \text{ alors } \alpha < x_1 < x_2 \\ \alpha > -\frac{b}{2a}, \text{ alors } x_1 < x_2 < \alpha \end{cases}$$

1.4 Equations bicarrées

Activité :

Soit l'équation : $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ cette équation.

Indication (poser $x^2 = t$)

Synthèse :

On appelle équation bicarrée, toute écriture qui peut se ramener à la la forme

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \text{ avec } a \neq 0$$

Pour résoudre une équation bicarrée, on peut poser $X = x^2 \Rightarrow X^2 = x^4$.

NB : Le changement de variable est utilisé pour résoudre d'autres types d'équations.

Evaluation : Résous dans $\mathbb{R}$:

a) $x^4 - 3x^2 - 28 = 0$; b) $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$; c) $4x^4 + 20x^2 + 21 = 0$;

d) $x + \sqrt{x} - 6 = 0$; e) $(x^2 - 9)^2 - 4(x^2 - 9) + 3 = 0$.

Séquence 2 : Inéquations du second degré

2.1. Signe du binôme $ax + b$

Activité :

Etudier le signe de f suivant les de x

$$f(x) = -2x + 12$$

Synthèse :

Soit le binôme $f(x) = ax + b$

Si $a = 0$, alors $f(x)$ est du signe de b ;

$$\text{Si } a \neq 0, \text{ alors } f(x) = 0 \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	
		a	
$ax + b$		Signe de $(-a)$	Signe de a

2.2. Signe d'un trinôme du second degré :

Activité :

Etudier le signe de f et g suivant les valeurs de x

$$f(x) = -2x^2 + 4x + 30 \quad \text{et} \quad g(x) = 3x^2 + 5x + 4$$

Remarque préliminaire :

Pour une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$:

- si $a > 0$, sa représentation graphique est une parabole tournée vers le haut : 

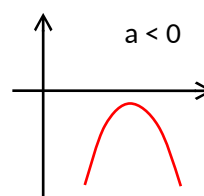
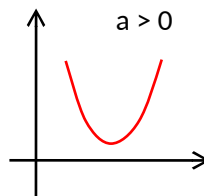
- si $a < 0$, sa représentation graphique est une parabole tournée vers le bas : 

Propriété : Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Supposons que $x_1 < x_2$.

- Si $\Delta < 0$:

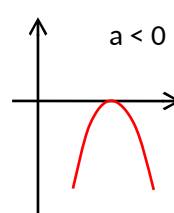
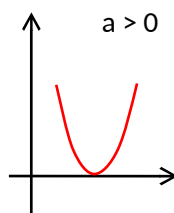
x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	



L'équation $f(x)=0$ n'a pas de solution donc la courbe de f ne traverse pas l'axe des abscisses.

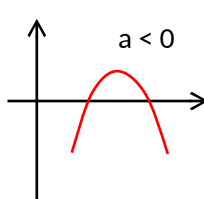
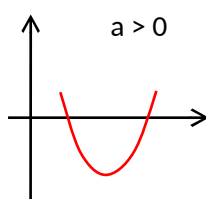
- Si $\Delta = 0$:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	0	Signe de a



- Si $\Delta > 0$:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$f(x)$	Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a



L'équation $f(x)=0$ a deux solutions donc la courbe de f traverse l'axe des abscisses en deux

Evaluation : résous dans $\mathbb{R}$:

$$a) x^2 - 5x + 4 \leq 0 ; b) ; c) x^2 - 4x + 4 < 0; d) x^2 - x + 4 < 0;$$

Séquence 3 : Equations – Inéquations Irrationnelles

3.1. Equations irrationnelles

Une équation irrationnelle est une équation où l'inconnue figure sous le radical.

3.1.1. Equation du type $\sqrt{f(x)} = g(x)$:

Le degré de f et celui de g sont inférieurs ou égaux à 2.

Pour résoudre cette équation, on a la condition suivante :

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \implies \begin{cases} f(x) = [g(x)]^2 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$.

$$a) \sqrt{3-x} = x-1 ; b) \sqrt{x+1} - x + 1 = 0; c) \sqrt{2x+1} = x-1 ; d) \sqrt{2-x} = x+10$$

3.1.2. Equation du type $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \implies \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \text{ ou } g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}$

$$a) \sqrt{x^2-2} = \sqrt{3x-4} ; b) \sqrt{-x^2+5x+9} = \sqrt{x-3}; c) \sqrt{2x^2-7x+4} = \sqrt{x^2+3x-5}$$

3.2. Inéquations irrationnelles

3.2.1. Inéquation du type $\sqrt{f(x)} \leq g(x)$:

$$\sqrt{f(x)} \leq g(x) \implies \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) \leq [g(x)]^2 \end{cases}$$

Exemple : Résoudre $\mathbb{R}$, $\sqrt{7-x} \leq x-1$; b) $\sqrt{3(x^2-1)} \leq 2x-1$; c) $\sqrt{x^2-9} \leq x-9$

3.2.2. Inéquation du type $\sqrt{f(x)} > g(x)$:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \implies (I_1) \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \leq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad (I_2) \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases}$$

Exemple : Résoudre $\mathbb{R}$,

$$a) \sqrt{x+1} > 5-x; b) x + \sqrt{x-1} > 3; c) 2-x < \sqrt{x^2-5x+4};$$

3.2.3. Inéquation du type $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$

$$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \implies \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}$$

Exemple : Résoudre $\mathbb{R}$

$$a) \sqrt{5-x} > \sqrt{x-3}; b) \sqrt{1-x} > \sqrt{2x-3}; c) \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} \geq 3.$$

Séquence 4 : Quelques exemples simples de résolutions d'équations d'inéquations du second degré

1. Exemples d'équations paramétriques :

Exemple 1 :

Résoudre et discuter suivant la valeur du paramètre réel m l'équation

(L .MAFA)

$$\begin{aligned}
 a) \quad (E_m): x^2 + (2m-1)x + m^2 - 1 &= 0 ; \quad \Delta = -4m + 5 \\
 b) \quad (E_m): (1-m)x^2 - 2mx - (m+2) &= 0 ; \quad \Delta = 4(-m+2) \\
 b) \quad (E_m): (m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m-6 &= 0 ; \quad \Delta = -m^2 + 4m - 3 \\
 c) \quad (E_m): (m+1)x^2 - (m+3)x + 3-m &= 0. \quad \Delta = 5m^2 - 2m - 3 \\
 c) \quad (E_m): (m-2)x^2 + 2(m-2)x - 2 &= 0 ; \quad \Delta =
 \end{aligned}$$

Exemple2 :

Soit l'équation paramétrique $(E_m): (m+1)x^2 + (m+3)x + 3 - m = 0$. $\Delta = 5m^2 - 2m - 3$

1. Discuter suivants les valeurs de m l'existence et le signe des solutions de (E_m)
2. Trouver entre les solutions x_1 et x_2 une relation indépendante de m.
3. Pour quelles valeurs de m l'équation admet deux (2) solutions de signe contraire.
4. Pour quelles valeurs de m l'équation admet deux (2) solutions positives.
Pour quelles valeurs de m l'équation admet deux (2) solutions négatives.

Exemple 3 : $\Delta = -36m^2 + 144m - 108$

Soit l'équation paramétrique $(E_m): (m-2)x^2 + (2m+2)x + 10m - 14 = 0$

5. Discuter suivants les valeurs de m l'existence et le signe des solutions de (E_m)
6. Trouver entre les solutions x_1 et x_2 une relation indépendante de m.
7. Pour quelles valeurs de m l'équation admet deux (2) solutions de signe contraire.
8. Pour quelles valeurs de m l'équation admet deux (2) solutions positives.
9. Pour quelles valeurs de m l'équation admet deux (2) solutions négatives.

2. Exemples d'inéquations paramétriques :

Soit $f(x) = (m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m - 6$

Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre réel m l'inéquation $f(x) < 0$