

ÉQUATIONS – INÉQUATIONS– SYSTÈMES

Site MathsTICE de Adama Traoré Lycée Technique Bamako

I – Équations du second degré :

1°) – Résolution par la méthode du discriminant :

Pour résoudre l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) d'inconnu x , je calcule le discriminant noté : $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$;
- Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} .$$

- Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une solution unique : $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$.

2°) – Discriminant réduit :

Si b est pair on pose $b' = \frac{b}{2} \Leftrightarrow b = 2b'$; alors on calcule le discriminant réduit

$$\Delta' = (b')^2 - ac.$$

- Si $\Delta' < 0$, alors l'équation n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$;
- Si $\Delta' > 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} .$$

- Si $\Delta' = 0$, alors l'équation admet une solution unique : $x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a}$.

3°) – Recettes :

Soit l'équation du second degré : $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

R₁) Si $a + b + c = 0$, alors $x_1 = 1$ et $x_2 = \frac{c}{a}$;

Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $3x^2 - 12x + 9 = 0$
 $3 - 12 + 9 = 0$ donc $x_1 = 1$ et $x_2 = 3$. D'où $S = \{1; 3\}$

R₂) Si $a + c = b$, alors $x_1 = -1$ et $x_2 = \frac{-c}{a}$.

Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $-x^2 + 8x + 9 = 0$
 $-1 + 9 = 8$ donc $x_1 = -1$ et $x_2 = 9$. D'où $S = \{-1; 9\}$

4°)– Somme et Produit des racines :

Soit l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) de discriminant $\Delta \geq 0$ alors l'équation admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{a} .$$

a) Somme des racines :

$$S = x_1 + x_2 \Leftrightarrow S = \frac{-b - \sqrt{\Delta} - b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b}{a} ; \quad S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} .$$

b) Produit des racines :

$$P = x_1 \times x_2 \Leftrightarrow P = \frac{(-b - \sqrt{\Delta})(-b + \sqrt{\Delta})}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a} .$$

$$P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} .$$

c) Remarque : Deux nombres x_1 et x_2 dont la somme est S et le produit est P sont les solutions de l'équation : $x^2 - Sx + P = 0$.

d) Exemples :

1- Soit l'équation $x^2 + 10x + 21 = 0$.

Trouver les racines en utilisant la somme S et le produit P .

$$S = -10 \text{ et } P = 21 \Rightarrow x_1 = -7 \text{ et } x_2 = -3 .$$

2- Former l'équation du second degré dont les racines sont : $x_1 = 4$ et $x_2 = -3$.

$$x_1 = 4 \text{ et } x_2 = -3 \Rightarrow S = 1 \text{ et } P = -12 \text{ d'où } x^2 - x - 12 = 0 .$$

3- Déterminer les racines x_1 et x_2 d'une équation du second degré dont la somme est $S = \frac{12}{5}$ et le produit $P = \frac{7}{5}$.

5°) – Factorisation de $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) :

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \Leftrightarrow \\ &= a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right] \Leftrightarrow \\ &= a \left[x^2 - Sx + P \right] \Leftrightarrow \\ &= a \left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \times x_2 \right] \Leftrightarrow \\ &= a \left[x^2 - xx_1 - x_2x + x_1x_2 \right] \Leftrightarrow \\ &= a \left[x(x - x_1) - x_2(x - x_1) \right] \Leftrightarrow \\ &= a(x - x_1)(x - x_2) . \end{aligned}$$

Exemple :

Factoriser $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$; $g(x) = x^2 - 8x + 7$; $h(x) = 3x^2 + 18x + 27$.

6°)– Équations bicarrées :

Exemples : résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations bicarrées suivantes :

- $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; $x^4 - 24x^2 - 25 = 0$; $x^6 - 124x^3 - 125 = 0$.
(indication on pose $x^2 = T$ ou $x^3 = U$)

II –Inéquations:**1°) Signe du binôme $ax + b$:**

Soit le binôme $f(x) = ax + b$

- Si $a = 0$, alors $f(x)$ est du signe de b .
- Si $a \neq 0$, alors $f(x) = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	Signe de $(-a)$	0	Signe de a

Exemple : étudier le signe de $f(x) = -2x + 12$

$$-2x + 12 = 0 \Rightarrow x = 6.$$

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$-2x + 12$	+	0	-

Pour $x \in]-\infty ; 6]$ $f(x) \geq 0$; Pour $x \in [6 ; +\infty[$ $f(x) \leq 0$

2°) Signe d'un trinôme du second degré:

Considérons le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) ; Δ le discriminant de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

1^{er} cas : Si $\Delta < 0$, alors le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a .

2^{ème} cas : Si $\Delta = 0$, alors le trinôme $ax^2 + bx + c$ est du signe de a pour toutes valeurs $x \neq -\frac{b}{a}$.

3^{ème} cas : Si $\Delta > 0$, et x_1 ; x_2 les racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ($x_1 < x_2$) alors le trinôme du second degré **est du signe de a à l'extérieur des racines** et du **signe de $(-a)$ à l'intérieur des racines**.

X	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$ax^2 + bx + c$	Signe de a	0	Signe de $(-a)$	0	Signe de a

Exemples : étudier le signe des polynômes suivants :

$$f(x) = 2x^2 + x + 1 ; g(x) = x^2 - 11x + 30 ; h(x) = \frac{x+3}{-2x+8}.$$

3°) Application à la résolution d'inéquations :

Exemples : résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$-2x^2 + 4x + 30 \leq 0 ; \quad 3x^2 + 5x + 4 \neq 0 ; \quad 9x^2 + 6x + 1 \neq 0 ; \quad \frac{x^2 + 2x - 3}{-x + 5} \leq 0 ;$$

III – Équations et Inéquations irrationnelles simples:

1°) Équations irrationnelles simples :

Propriété : $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ (\sqrt{a})^2 = b^2 \end{cases}$

Exemple : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{2x+1} = x-1$.

L'ensemble de validité $D_v = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x-1 \geq 0\}$.

$$x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \Rightarrow D_v = [1; +\infty[.$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+1} = x-1 &\Leftrightarrow 2x+1 = (x-1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \\ x(x-4) = 0 &\Leftrightarrow x=0 \notin D_v \text{ ou } x=4 \in D_v ; \text{ d'où } S = \{4\}. \end{aligned}$$

2°) Inéquations irrationnelles simples :

a) Exemple 1 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{3(x^2-1)} \leq 2x-1$.

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 & (1) \\ 2x - 1 \geq 0 & (2) \\ \left(\sqrt{3(x^2-1)}\right)^2 \leq (2x-1)^2 & (3) \end{cases}$$

$$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1 ; 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

$$3(x^2 - 1) \leq 4x^2 - 4x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 16 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 2.$$

Le système devient

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 & (1) \\ 2x - 1 \geq 0 & (2) \\ x^2 - 4x + 4 \geq 0 & (3) \end{cases} \quad \text{En dressant le tableau des signes de chacune des}$$

inéquations on a :

x	$-\infty$	-1	1/2	1	2	$+\infty$
$x^2 - 1$	+	0	-	-	0	+
$2x - 1$	-	-	0	+	+	+
$x^2 - 4x + 4$	+	+	+	+	0	+

L'ensemble des solutions est $S = [1 ; +\infty[$

b) Exemple 2 : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $5 - x \leq \sqrt{x+1}$.

$$1^{\text{er}} \text{ cas : } \begin{cases} 5 - x \leq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} ; 5 - x = 0 \Leftrightarrow x = 5 ; x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

x	$-\infty$	-1	5	$+\infty$
$5 - x$	+	+	0	-
$x + 1$	-	0	+	+

$$S_1 = [5 ; +\infty [$$

$$2^{\text{ème}} \text{ cas : } \begin{cases} 5 - x \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \\ (5 - x)^2 \leq (\sqrt{x+1})^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - x \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \\ x^2 - 11x + 24 \leq 0 \end{cases}$$

$$5 - x = 0 \Leftrightarrow x = 5 ; x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1 ; x^2 - 11x + 24 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_1 = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = 8.$$

x	$-\infty$	-1	3	5	8	$+\infty$
$5-x$	+	+	+	0	-	-
$x+1$	-	0	+	+	+	+
$x^2-11x+24$	+	+	0	-	-	+

$$S_2 =] 3 ; 5]$$

L'ensemble des solutions est $S = S_1 \cup S_2 =] 3 ; +\infty [$

IV– Signes des racines d’une équation du second degré:

1°) Signes des racines :

Soit l’équation $ax^2 + bx + c = 0$, ($a \neq 0$) ; supposons que $\Delta > 0$, on calcule le produit $P = \frac{c}{a}$ et la somme $S = \frac{-b}{a}$.

1^{er} cas : Si $P < 0$, alors les deux racines sont de signes contraires ; le signe de S permet de dire laquelle des deux racines est la plus grande en valeur absolue.

2^{ème} cas : Si $P > 0$, alors les deux racines sont de même signes;

- Si $S > 0$, alors les deux racines sont positives
- Si $S < 0$, alors les deux racines sont négatives.

3^{ème} cas : Si $P = 0$, alors l’une au moins des racines est nulle.

- Si $S > 0$, alors $x_1 = 0$ et $x_2 > 0$;
- Si $S < 0$, alors $x_1 < 0$ et $x_2 = 0$;
- Si $S = 0$, alors $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$;

On résume ces résultats dans le tableau suivant (en supposant $x_1 \leq x_2$)

P	-	-	-	+	+	0	0	0
S	+	-	0	+	-	+	-	0
Signes des racines	$x_1 < 0$ $x_2 > 0$ $ x_1 < x_2 $	$x_1 < 0$ $x_2 > 0$ $ x_1 > x_2 $	$x_1 = x_2$	$x_1 > 0$ $x_2 > 0$	$x_1 < 0$ $x_2 < 0$	$x_1 = 0$ $x_2 > 0$	$x_1 < 0$ $x_2 = 0$	$x_1 = 0$ $x_2 = 0$

2°) Exemples d'équations paramétriques :

a) Exemple 1 :

Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre réel m l'équation (E_m) :
 $(m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m-6 = 0$.

– 0 –

Si $m-2 \neq 0$, $\Leftrightarrow m \neq 2$, alors l'équation est du second degré..

$$\Delta = 4(2m-3)^2 - 4(m-2)(5m-6) \Leftrightarrow \Delta = 4[-m^2 + 4m - 3].$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow -m^2 + 4m - 3 = 0 \Leftrightarrow m_1 = 1 \text{ et } m_2 = 3.$$

m	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
Δ	-	0		0	-

- Pour $m \in]-\infty; 1[\cup]3; +\infty[$ $\Delta < 0$ donc pas de racines ;
- Pour $m \in]1; 2[\cup]2; 3[$ $\Delta > 0$ donc l'équation admet deux racines

$$x_1 = \frac{-4m+6-2\sqrt{-m^2+4m-3}}{2(m-2)} ; x_2 = \frac{-4m+6+2\sqrt{-m^2+4m-3}}{2(m-2)} ; S = \{x_1; x_2\}$$
- Pour $m = 1$, $\Delta = 0$ donc $x_1 = x_2 = \frac{-4m+6}{2(m-2)} = -1$; donc $S = \{-1\}$;
- Pour $m = 2$, l'équation est du 1^{er} degré, $2x + 4 = 0$ $x = -2$; $S = \{-2\}$
- Pour $m = 3$, $\Delta = 0$ donc $x_1 = x_2 = \frac{-4m+6}{2(m-2)} = -3$; donc $S = \{-3\}$;

b) Exemple 2 :

Soit l'équation paramétrique (E_m) : $(m-2)x^2 + (2m+2)x + 10m-14 = 0$.

1°) Discuter suivant les valeurs de m l'existence et le signe des racines de (E_m) .

2°) Trouver entre les racines x_1 et x_2 une relation indépendante de m .

3°) Pour quelles valeurs de m l'équation admet 2 racines de signes contraires

4°) Pour quelles valeurs de m l'équation admet 2 racines positives.

– 0 –

$$1^\circ) \text{ Pour } m \neq 2 \text{ on a : } \Delta = -36m^2 + 144m - 108.$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow -36m^2 + 144m - 108 = 0 ; a + b + c = 0 , \text{ donc } m_1 = 1 \text{ et } m_2 = 3 .$$

m	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
Δ	-	0		0	-

Etudions le signe du produit P et de la somme S.

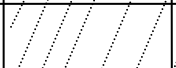
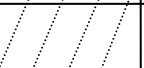
$$P = \frac{c}{a} = \frac{10m-14}{m-2} ; \quad 10m-14=0 \Leftrightarrow m = \frac{7}{5} ; \text{ et } m \neq 2.$$

m	$-\infty$	$\frac{7}{5}$	2	$+\infty$
$10m-14$	-	0	+	+
$m-2$	-	-	0	+
P	+	0	-	+

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-2m-2}{m-2} ; \quad -2m-2=0 \Leftrightarrow m = -1 \text{ et } m \neq 2.$$

m	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$-2m-2$	+	0	-	-
$m-2$	-	-	0	+
S	-	0	+	-

Tableau récapitulatif des signes de Δ , P et S.

m	$-\infty$	-1	1	$\frac{7}{5}$	2	3	$+\infty$
Δ	-	-	0	+	+	+	-
P			+	0	-	+	
S			+	+	-	-	
Conclusions	Pas de solutions $S=\emptyset$		$x_1 > 0$ $x_2 > 0$ $x_1 = x_2 = 2$	$x_1 < 0$ $x_2 > 0$ $ x_1 < x_2 $ $x_1 = 0$ $x_2 > 0$	$x_1 < 0$ $x_2 < 0$ $x = -1$	$x_1 = x_2 = -4$	$S=\emptyset$

2°) Relation entre les racines, indépendante de m.

Je tire m dans les formules de P et S puis je les égalise.

$$P = \frac{10m-14}{m-2} \Leftrightarrow m = \frac{2P-14}{P-10} \quad \text{et} \quad S = \frac{-2m-2}{m-2} \Leftrightarrow m = \frac{2S-2}{S+2}$$

$$m = m \Leftrightarrow \frac{2P-14}{m-2} = \frac{2S-2}{S+2} \Leftrightarrow 6P + 6S - 48 = 0 \Leftrightarrow P + S - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 x_2) + (x_1 + x_2) - 8 = 0 \quad \text{est la relation cherchée.}$$

3°) Pour quelles valeurs de m l'équation admet 2 racines de signes contraires ?

Pour $m \in] 7/5 ; 2[$ x_1 et x_2 sont de signes contraires.

4°) Pour quelles valeurs de m l'équation admet 2 racines positives.

Pour $m \in [1 ; 7/5]$ x_1 et x_2 sont toutes deux positives.

3– Comparaison d'un réel α aux racines d'une équation du second degré:

1°) Théorème :

Soit l'équation $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) avec $\Delta > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Si $af(\alpha) < 0$, alors on a : $x_1 < \alpha < x_2$;
- Si $af(\alpha) > 0$, alors on a : $x_1 < x_2 < \alpha$ ou $\alpha < x_1 < x_2$;
 - Si en plus $\left(\alpha + \frac{b}{2a}\right) < 0$, alors $x_1 < x_2 < \alpha$;
 - Si en plus $\left(\alpha + \frac{b}{2a}\right) > 0$, alors $\alpha < x_1 < x_2$;
- Si $af(\alpha) = 0$, alors α est solution de l'équation.

2°) Exemple :

Classer $\alpha = 2$ par rapport aux racines de l'équation :

$$(m-2)x^2 - 2(m+1)x + m-3 = 0$$

Réponse :

1^{er} cas : si $m-2 = 0 \Leftrightarrow m = 2$ l'équation devient $-6x-1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} < \alpha = 2$.

2^{ème} cas : $m-2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$; $\Delta' = 7m - 5$. $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = \frac{5}{7}$.

m	$-\infty$	$\frac{5}{7}$	$+\infty$
Δ'	-	0	+

$$af(\alpha) = (m-2)[(m-2)4 - 4(m+1) + m-3] ;$$

$$af(\alpha) = (m-2)(m-15) ;$$

$$af(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (m-2)(m-15) = 0 \Leftrightarrow m = 2 \text{ ou } m = 15.$$

m	$-\infty$	2	15	$+\infty$
$af(\alpha)$	+	0	-	+

$$\alpha + \frac{b}{2a} = \frac{2m-10}{2(m-2)} = \frac{m-5}{m-2}. \text{ Dressons le tableau récapitulatif}$$

m	$-\infty$	$\frac{5}{7}$	2	5	15	$+\infty$
Δ'	-	0	+	+	+	+
$af(\alpha)$		+	0	-	0	+
$\alpha + \frac{b}{2a}$		+	-	0	+	+
Résultats	Pas de racines	$x_1 < x_2 < \alpha$	$x_1 < \alpha < x_2$	$x_1 < \alpha < x_2$	$x_1 < x_2 < \alpha$	
	$x_1 = x_2 = \frac{-4}{3} < \alpha$	$x_1 = \frac{-1}{6} < \alpha$ $x_2 = \alpha$	$x_1 < \alpha < x_2$	$x_1 = \alpha$ $x_2 = \frac{-6}{13} < \alpha$		

4 – Exemple d'Inéquation paramétrique:

Exemple :

Soit $f(x) = (m-2)x^2 + 2(2m-3)x + 5m-6$. Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre réel m l'inéquation $f(x) < 0$.

– 0 –

1^{er} cas : Si $m-2=0 \Rightarrow m=2$, alors on a : $2x+4 < 0 \Leftrightarrow x < -2$;
d'où $S =]-\infty ; -2[$.

2^{ème} cas : Si $m-2 \neq 0, \Leftrightarrow m \neq 2$, alors

$$\Delta = 4(2m-3)^2 - 4(m-2)(5m-6) \Leftrightarrow \Delta = 4[-m^2 + 4m - 3] = 4\Delta'.$$

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow -m^2 + 4m - 3 = 0 \Leftrightarrow m_1 = 1 \text{ et } m_2 = 3.$$

On étudie le signe de Δ' et de a (ici $= m-2$).

m	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
Δ'	-	0		0	-
$m-2$	-	-	0	+	+

- Pour $m \in]-\infty ; 1[$ $\Delta' < 0$ donc $f(x)$ est du signe de $a = m-2$; qui est négatif d'où $S = \mathbb{R}$;
- Pour $m \in]1 ; 2[$ $\Delta' > 0$ donc l'équation admet deux racines

$$x_1 = \frac{-2m+3-\sqrt{-m^2+4m-3}}{(m-2)} ; x_2 = \frac{-2m+3+\sqrt{-m^2+4m-3}}{(m-2)} ; \text{ et } (m-2) \text{ négatif}$$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$	-	0	0	-

$$S =]-\infty ; x_1[\cup]x_2 ; +\infty [$$

- Pour $m \in]2 ; 3[$ $\Delta' > 0$ et $(m-2)$ positif

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-	+

$$S =]x_1 ; x_2[$$

- Pour $m \in]-\infty ; 1[\cup]3 ; +\infty[$ $\Delta' < 0$ donc $f(x)$ est du signe de $a = m-2$ qui est positif d'où $S = \emptyset$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	+	

$$S = \emptyset$$

- Pour $m = 1$, $\Delta' = 0$ donc $x_1 = x_2 = \frac{-2m+3}{(m-2)} = -1$ et $m-2$ négatif ;

x	$-\infty$	$x_1 = x_2 = -1$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	-

$$S = \mathbb{R} - \{-1\}$$

- Pour $m = 3$, $\Delta' = 0$ donc $x_1 = x_2 = \frac{-4m+6}{2(m-2)} = -3$ et $m-2$ positif ;

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	+	0	+

$$S = \emptyset$$

V – Systèmes d'équations et d'inéquations :

1°) Système d'équations du 1^{er} degré à 2 inconnues :

a) Définition :

Soient a, b, c, a', b', c' six réels donnés. Résoudre pour x et y réels le système

$$\begin{cases} ax + by = c & (E_1) \\ a'x + b'y = c' & (E_2) \end{cases}$$

Consiste à déterminer l'ensemble S des couples $(x ; y)$ de réels qui vérifient simultanément les deux équations.

c) Exemple :

Résoudre pour x et y réels le système (S) $\begin{cases} 2x - 5y = 11 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$

- 1^{ère} méthode : par combinaison linéaires

$$(S) \begin{cases} 2x - 5y = 11 & \times (-3) \\ 3x + 4y = 5 & \times (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6x + 15y = -33 \\ 6x + 8y = 10 \end{cases}$$

 $23y = -23 \Leftrightarrow y = -1$

$$(S) \begin{cases} 2x - 5y = 11 & \times (4) \\ 3x + 4y = 5 & \times (5) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -8x - 20y = 44 \\ 15x + 20y = 25 \end{cases}$$

 $3x = 69 \Leftrightarrow x = 3$

Le système (S) admet le couple $(3 ; -1)$ comme solution ; $S = \{ (3 ; -1) \}$.

- 2^{ème} méthode : par substitution

$$(S) \begin{cases} 2x - 5y = 11 & (1) \\ 3x + 4y = 5 & (2) \end{cases}$$

Dans l'équation (1) exprimons x en fonction y : $2x - 5y = 11 \Leftrightarrow x = \frac{5y + 11}{2}$.

Dans l'équation (2) remplaçons x par sa valeur :

$$3\left(\frac{5y + 11}{2}\right) + 4y = 5 \Leftrightarrow \frac{15y}{2} + 4y = 5 - \frac{33}{2} \Leftrightarrow 15y + 8y = -23 \Leftrightarrow 23y = -23$$

$\Leftrightarrow y = -1$. On remplace y par -1 dans l'expression de $x = \frac{5y + 11}{2}$. On obtient $x = 3$. D'où l'ensemble solution du système est $S = \{ (3 ; -1) \}$.

- **3^{ème} méthode : par déterminant**

Soit le système de deux équations du premier degré à deux inconnues x et y .

$$\begin{cases} ax + by = p & (E_1) \\ cx + dy = q & (E_2) \end{cases}$$

Où $a ; b ; c ; d ; p ; q$ sont des réels donnés. Pour résoudre ce système on calcule

le déterminant principal : $Dét = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$;

le déterminant secondaire en x : $D_x = \begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix} = pd - bq$;

le déterminant secondaire en y : $D_y = \begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix} = aq - pc$;

- Si $Dét \neq 0$; alors les droites (E_1) et (E_2) sont sécantes en un point $I(x ; y)$. Le système admet un couple unique $(x ; y)$ de solution tel que :

$$x = \frac{D_x}{Dét} \text{ et } y = \frac{D_y}{Dét} \text{ . et } S = \{(x ; y)\}$$

- $\left. \begin{array}{l} \text{Si } Dét = 0 \\ \text{et } D_x \neq 0 \text{ ou } D_y \neq 0 \end{array} \right\}$ Alors les droites (E_1) et (E_2) sont parallèles

Le système n'admet pas de solutions, $S = \emptyset$.

- $\left. \begin{array}{l} \text{Si } Dét = 0 \\ \text{et } D_x = 0 ; D_y = 0 \end{array} \right\}$ Alors les droites (E_1) et (E_2) sont confondues.

Le système admet une infinité de solutions de la forme,

$$S = \{(x ; \alpha x + \beta) / x \in \mathbb{R}\} \text{ ou } S = \{(\alpha y + \beta ; y) / y \in \mathbb{R}\}.$$

Exemple : Soit à résoudre par la méthode du déterminant le système

$$(S) \begin{cases} 2x - 5y = 11 & (1) \\ 3x + 4y = 5 & (2) \end{cases}$$

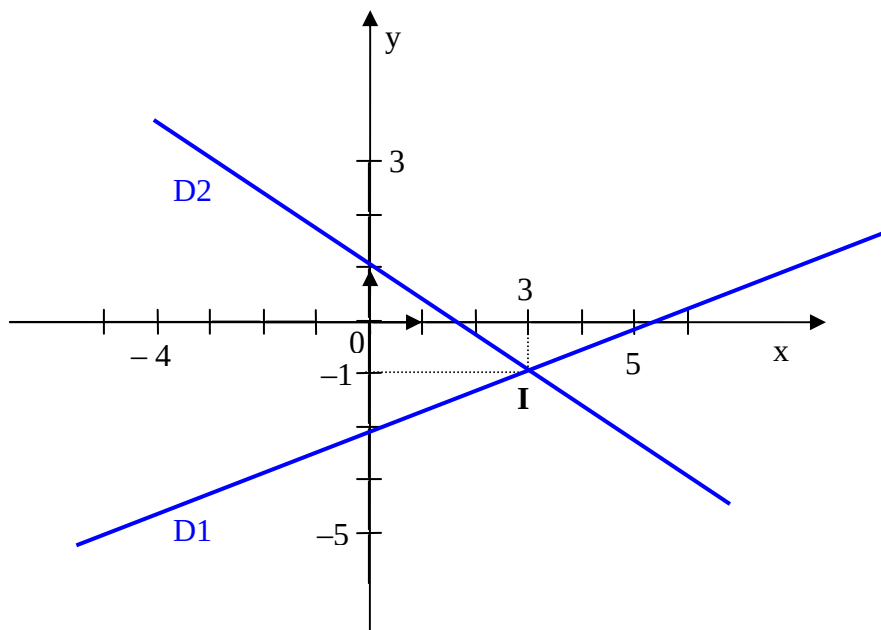
$$Dét = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - (-15) = 23 ; D_x = \begin{vmatrix} 11 & -5 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 44 - (-25) = 69 ;$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - (33) = -23 ; x = \frac{D_x}{Dét} = \frac{69}{23} = 3 ; y = \frac{D_y}{Dét} = \frac{-23}{23} = -1.$$

D'où l'ensemble solution est : $S = \{(3 ; -1)\}$.

d) Interprétation graphique du système :

$$(S) \begin{cases} 2x - 5y = 11 & (1) \\ 3x + 4y = 5 & (2) \end{cases}$$



$2x - 5y = 11$ est une équation d'une droite D_1 .

$3x + 4y = 5$ est une équation d'une droite D_2 .

Le calcul précédent permet d'affirmer que les droites (D_1) et (D_2) sont sécantes au point I $(3 ; -1)$. $(3 ; -1)$ est la solution du système.

2°) Systèmes de trois équations à trois inconnues :

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système suivant

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 13 & (L_1) \\ x + 3y - 5z = -16 & (L_2) \\ 4x + 2y - z = 3 & (L_3) \end{cases}$$

- **Méthode de Substitution :**

$(L_3) \Rightarrow z = 4x + 2y - 3$. En remplaçant z par sa valeur dans les autres équations

on a le système devient :
$$\begin{cases} 11x + 3y = 19 & (1) \\ -19x - 7y = -31 & (2) \end{cases}$$

$(1) \Rightarrow 3y = 19 - 11x \Leftrightarrow y = \frac{19 - 11x}{3}$. En remplaçant y par sa valeur dans (2) on

obtient : $20x = 40 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = -1 \quad z = 3$. D'où la solution du système est le triplet $(2 ; -1 ; 3)$. Et l'ensemble solution est $S = \{ (2 ; -1 ; 3) \}$.

- **Méthode du pivot de Gauss :**

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 13 & (L_1) \\ x + 3y - 5z = -16 & (L_2) \\ 4x + 2y - z = 3 & (L_3) \end{cases}$$

Éliminons x dans les équations (L_2) et (L_3)

$$\begin{array}{rcl} (L_1) & 3x - y + 2z = 13 & (4L_1) \quad 12x - 4y + 8z = 52 \\ (-3L_2) & -3x - 9y + 15z = 48 & (-3L_2) \quad -12x - 6y + 3z = -9 \\ \hline & = 0 - 10y + 17z = 61 & = 0 - 10y + 11z = 43 \end{array}$$

Le système devient :
$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 13 & (L_1) \\ 0 - 10y + 17z = 61 & (L_2) \\ 0 - 10y + 11z = 43 & (L_3) \end{cases}$$

Éliminons y dans l'équation (L_3)

$$\begin{array}{rcl} (L_2) & -10y + 17z = 61 & \\ (-L_3) & 10y - 11z = -43 & \\ \hline & & \text{Le système devient :} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} & = 0 + 6z = 18 & \\ \begin{cases} 3x - y + 2z = 13 & (L_1) \\ 0 - 10y + 17z = 61 & (L_2) \\ 0 + 0 + 6z = 18 & (L_3) \end{cases} & \text{Un tel système est dit } \text{échelonné ou triangularisé.} & \end{array}$$

$$(L_3) \Rightarrow 6z = 18 \Leftrightarrow z = 3$$

$$(L_2) \Rightarrow -10y + 51 = 61 \Leftrightarrow y = -1 \text{ d'où } S = \{ (2; -1; 3) \}$$

$$(L_1) \Rightarrow 3x + 1 + 6 = 13 \Leftrightarrow x = 2$$

3°) Système d'inéquations du 1^{er} degré à 2 inconnues :

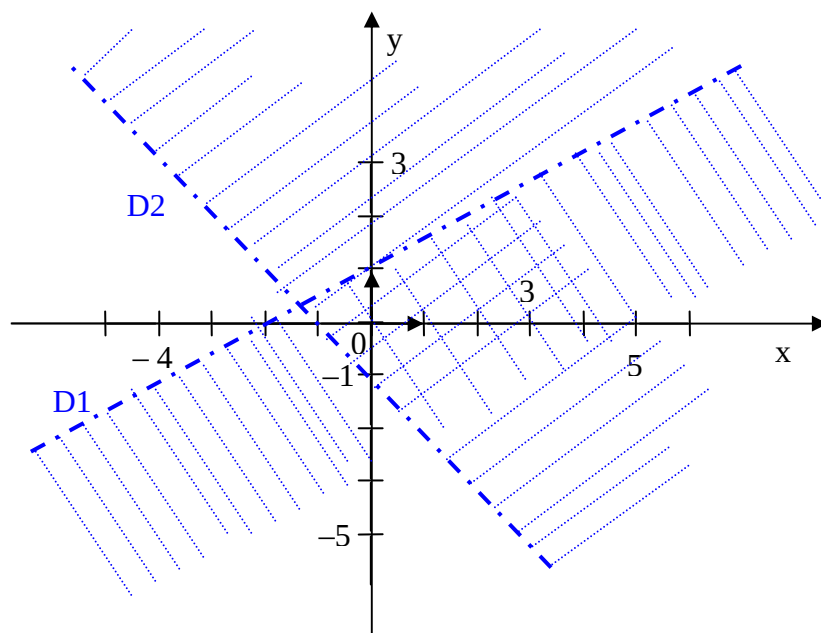
Exemple 1 :

Représentons l'ensemble des solutions du système d'inéquations :

$$\begin{cases} x - 2y + 2 \geq 0 \\ x + y + 1 \leq 0 \end{cases} \text{ Ce système est équivalent au système } \begin{cases} y \leq \frac{1}{2}x + 1 \\ y \geq -x - 1 \end{cases}$$

il faut représenter dans le plan les droites d'équation respectives :

$$(D_1) : y = \frac{1}{2}x + 1 \text{ et } (D_2) : y = -x - 1.$$



La région du plan **non hachurée est la partie solution** du système.

Exemple 2 :

Représentons l'ensemble des solutions du système d'inéquations :

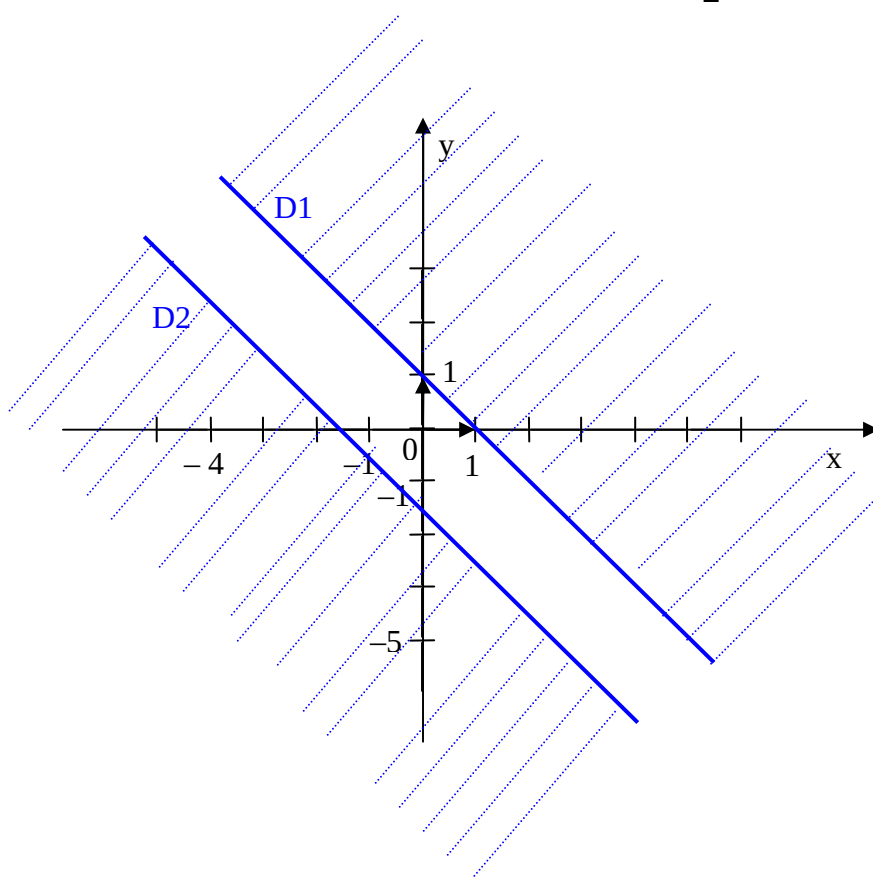
$$\begin{cases} x + y - 1 \leq 0 \\ 2x + 2y + 3 \geq 0 \end{cases}$$

Ce système est équivalent au système

$$\begin{cases} y \leq 1 - x \\ y \geq -x - \frac{3}{2} \end{cases}$$

il faut représenter dans le plan les droites d'équation respectives :

$$(D_1) : y = -x + 1 \text{ et } (D_2) : y = -x - \frac{3}{2}.$$



La région du plan non hachurée est la partie solution du système.